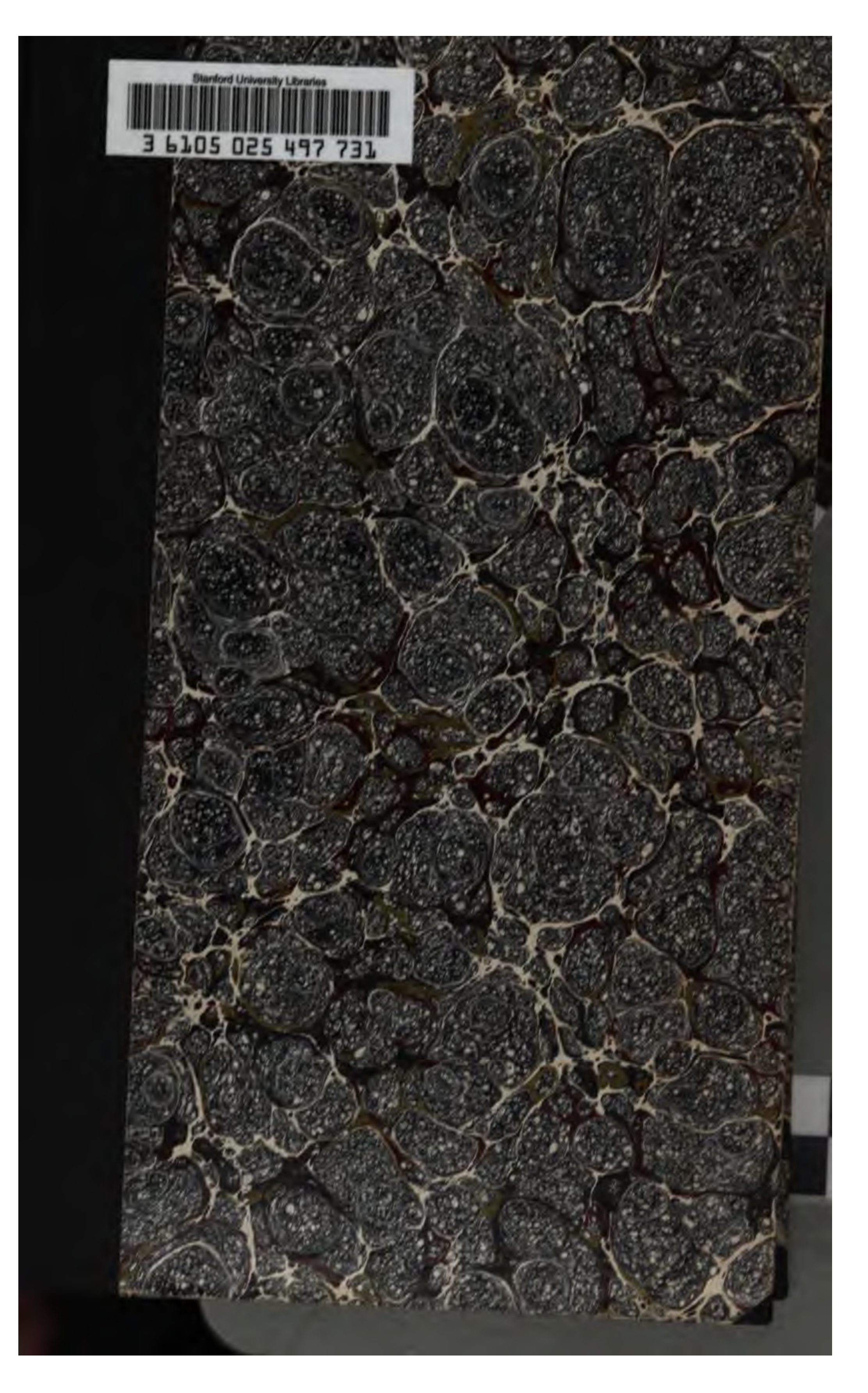
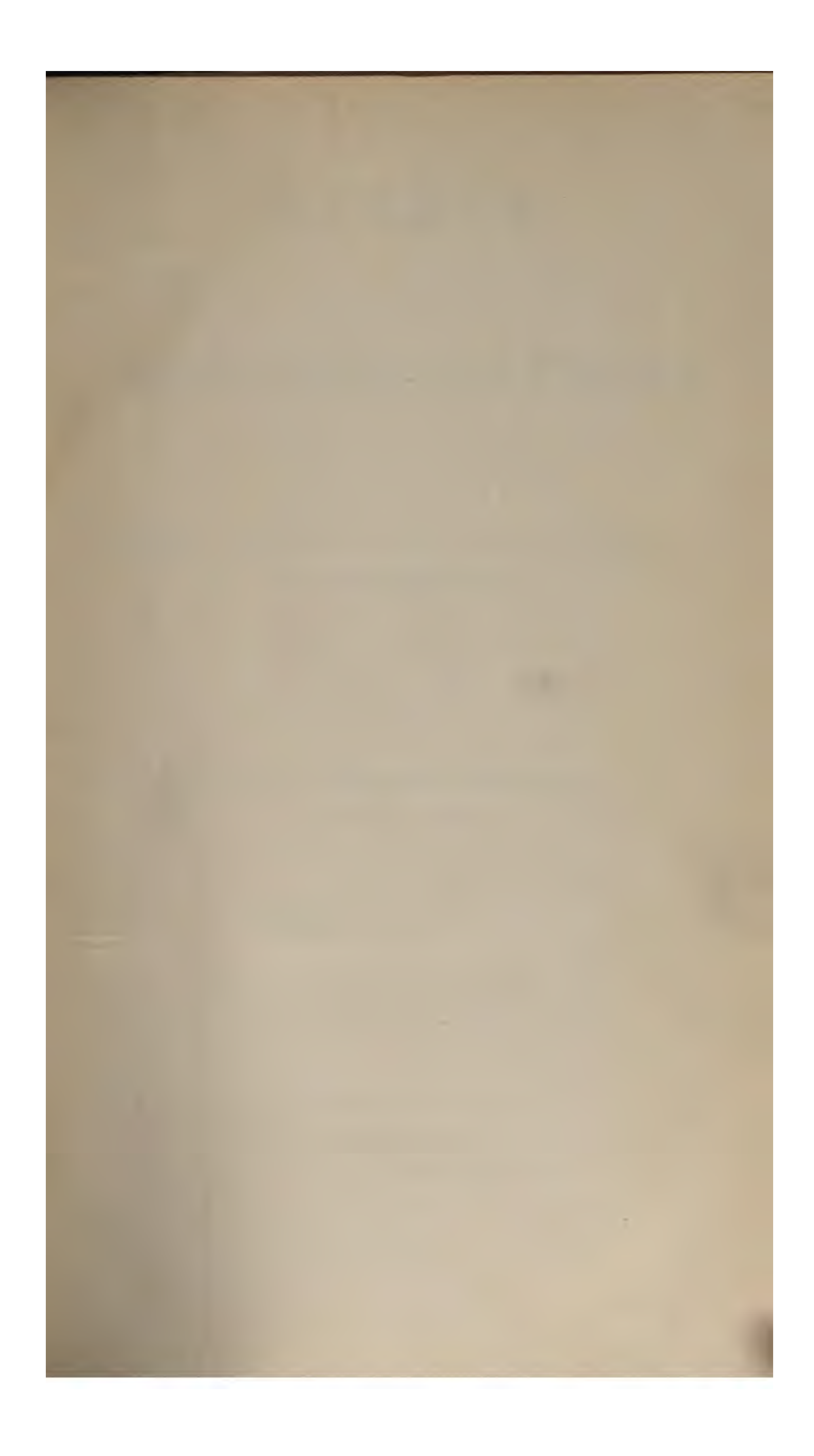

Stanford University Libraries
3 6105 025 497 731



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Achtundvierzigster Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1868.



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Achtundvierzigster Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1868.

Inhaltsverzeichniss des achtundvierzigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

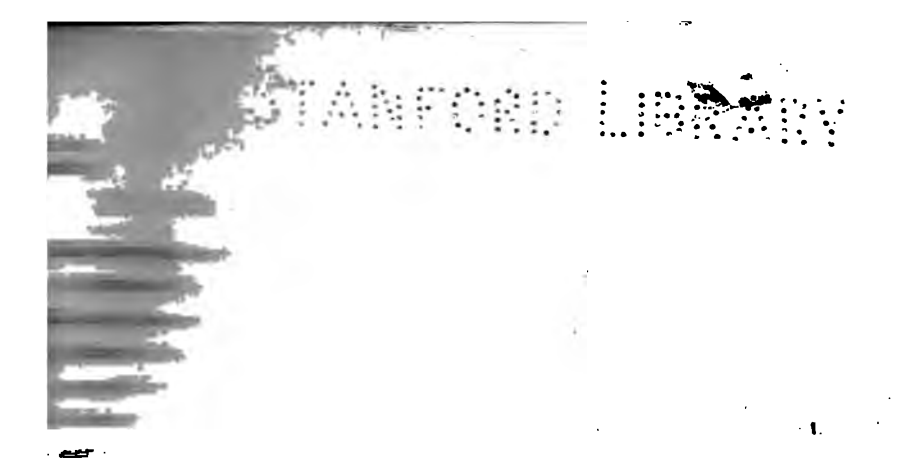
Astronomie.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.



I.

Verschiedene Bemerkungen.

Von

Herrn Professor und Director *F. Strehlke*
in Danzig.

1.

Auflösung der Gleichungen

$$x^3+y^3=a,\quad x^2y+xy^2=b.$$

(Siehe dieses Archiv Theil 47. Heft 1.)

Wenn man die zweite Gleichung mit 3 multiplicirt und zur
addirt, so erhält man den vollständigen Cubus von $x+y$,
ch:

$$x+y=\sqrt[3]{a+3b}.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält
an:

$$x^2(x-y)-y^2(x-y)=a-b,$$

raus:

$$(x-y)^2.(x+y)=a-b,$$

ich:

$$x-y=\pm\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[6]{a+3b}}.$$

Daraus ergeben sich die Werthe:

$$2x = \sqrt[3]{a+3b} \pm \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[6]{a+3b}},$$

$$2y = \sqrt[3]{a+3b} \mp \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[6]{a+3b}}.$$

Für $\frac{x}{y}$, xy, x^2-y^2, x^2+y^2, x^3-y^3 ergeben sich ebenfalls einfache Ausdrücke.

Als Erweiterung der obigen Aufgabe ist die folgende anzusehen:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= a, \\ xy^2 + yx^2 + zx^2 &= b, \\ xz^2 + yz^2 + zy^2 &= c. \end{aligned}$$

2.

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Hofrath Dr. Oettinger über die Nährungswerthe periodischer Kettenbrüche.

(Siehe dieses Archiv Theil 43. S. 304 und S. 305.)

Es heisst dort:

„Hieran knüpft Herr Director und Professor Dr. Strehlke im 3. Hefte S. 343. des 42. Bandes dieses Archivs die Bemerkung, dass er schon „vor längerer Zeit" einen anderen Ausdruck für den einperiodischen Kettenbruch No. I. und einen zweiten für den zweiten Partialbruch des zweigliedrigen periodischen Kettenbruchs No. 2. gefunden habe, und giebt beide an. Dabei ist jedoch eine Lücke gelassen, denn es fehlt der Ausdruck für den $(2r-1)$ten Partialbruch dieses Kettenbruchs, der oben angegeben ist. Diese Lücke findet sich gleichfalls ausgefüllt in meiner Abhandlung über Kettenbrüche nebst ihrer Anwendung auf die Berechnung der Quadratwurzeln und diophantischen Gleichungen, welche im 49. Bande von Crelle's Journal schon im Jahre 1855 erschienen ist, und die der Herr Prof. Strehlke nicht gekannt zu haben scheint."

„Von einem Prioritätsstreite kann im vorliegenden Falle wohl

nicht die Rede sein, da die Sache bei dem vorhandenen Thatbestande sich von selbst entscheidet. Wenn aber durch die Worte „vor längerer Zeit“ ein Prioritätsrecht meiner Abhandlung gegenüber in Anspruch genommen werden sollte, so dürfte eine Wahrung dagegen um so gerechtfertigter erscheinen, da der Druck meiner Abhandlung durch ein besonderes Missgeschick (das eingesendete Manuscript galt für verloren) durch eine lange Reihe von Jahren verzögert wurde.“ So weit Herr Oettinger.

Ich habe hierauf zu erwiedern. Seit mehr als 25 Jahren habe ich keine Gelegenheit gehabt Crelle's Journal zu benutzen, ich kenne also Herrn Oettinger's Aufsatz vom Jahre 1855 nicht. Dass ich für mich den Ausdruck „vor längerer Zeit“ in Anspruch nehme, hat seine guten Gründe. Denn es handelt sich um das Jahr 1820, als ich ein Jahr Bessel's Vorlesungen besucht hatte. In meinem mathematischen Tagebuche aus jener Zeit, das ich jedem Unbefangenen und Befangenen vorlegen kann, finden sich folgende Angaben:

Der $n$te Näherungswerth des Kettenbruchs $\frac{1}{a+}\frac{1}{a+\ldots}$ ist

$$=\frac{a^{n-1}+(n-2)a^{n-3}+\frac{n-3.n-4}{1.2}a^{n-5}+\frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}a^{n-7}+\frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4}a^{n-9}+\ldots}{a^{n}+(n-1)a^{n-2}+\frac{n-2.n-3}{1.2}a^{n-4}+\frac{n-3.n-4.n-5}{1.2.3}a^{n-6}+\frac{n-4.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4}a^{n-8}+\ldots}.$$

Der $n$te Näherungswerth des Kettenbruchs $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+\ldots}$ ist

$$=\frac{a^{\frac{n-2}{2}}.b^{\frac{n}{2}}+(n-2)a^{\frac{n-4}{2}}.b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n-3.n-4}{1.2}a^{\frac{n-6}{2}}.b^{\frac{n-4}{2}}+\frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}a^{\frac{n-8}{2}}.b^{\frac{n-6}{2}}+\ldots}{a^{\frac{n}{2}}.b^{\frac{n}{2}}+(n-1)a^{\frac{n-2}{2}}.b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n-2.n-3}{1.2}a^{\frac{n-4}{2}}.b^{\frac{n-4}{2}}+\frac{n-3.n-4.n-5}{1.2.3}a^{\frac{n-6}{2}}.b^{\frac{n-6}{2}}+\ldots},$$

wenn n eine gerade Zahl; ist n ungerade, so ist der $n$te Näherungswerth des periodischen Kettenbruchs:

$$=\frac{a^{\frac{n-1}{2}}.b^{\frac{n-1}{2}}+(n-2).a^{\frac{n-3}{2}}.b^{\frac{n-3}{2}}+\frac{n-3.n-4}{1.2}a^{\frac{n-5}{2}}.b^{\frac{n-5}{2}}+\frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}a^{\frac{n-7}{2}}.b^{\frac{n-7}{2}}+\ldots}{a^{\frac{n+1}{2}}.b^{\frac{n-1}{2}}+(n-1).a^{\frac{n-1}{2}}.b^{\frac{n-3}{2}}+\frac{n-2.n-3}{1.2}a^{\frac{n-3}{2}}.b^{\frac{n-5}{2}}+\frac{n-3.n-4.n-5}{1.2.3}a^{\frac{n-5}{2}}.b^{\frac{n-7}{2}}+\ldots},$$

Etwa um dieselbe Zeit fand ich die Darstellung von $\sqrt{a^2 \pm \frac{1}{m}}$ durch den zweigliedrigen periodischen Kettenbruch

$$a \pm \cfrac{1}{2am \pm \cfrac{1}{2a \pm \cfrac{1}{2am \pm \cfrac{1}{2a \pm \ldots}}}}$$

Ohne dem Gegenstande selbst gerade eine grosse Bedeutung beizulegen, schien es doch unnöthig, das Recht der wahren Priorität ohne Weiteres aufzugeben.

3.

Einfacher Beweis des Lambert'schen Theorem's vom parabolischen Sector.*)

In einer Parabel seien zwei Punkte, deren Entfernung von einander $= s$, durch die auf einander senkrechten Coordinaten x und $y = \sqrt{2px}$, x' und $y' = \sqrt{2px'}$ bestimmt; die Radien Vectoren von diesen Punkten nach dem Brennpunkte seien r und r', der von r, r' und dem zur Sehne s gehörenden parabolischen Bogen eingeschlossene Sector sei $= F$, so ist der Lambert'sche Ausdruck für:

$$\frac{6F}{\sqrt{2p}} = \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

je nachdem der von den Radien Vectoren auf der Seite des Scheitelpunktes gebildete Winkel $<$ oder $>$ 180°.

Beweis.

Zunächst ist die Fläche des Sectors zwischen $\frac{1}{2}p$ und r immer $= \frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(\frac{1}{2}p - x) = \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}py$, folglich der von r und r' eingeschlossene Sector $= \frac{1}{6}x'y' - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}p.(y'-y)$, oder $= \frac{1}{6}x'y' + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}p.(y'+y)$, je nachdem der von r und r' gebildete Winkel $<$ oder $>$ 180°.

---

*) Lambert: Insigniores orbitae cometarum proprietates, pag. 40.
Bohnenberger: Astronomie S. 326 und 327.
Gauss: Theoria motus corporum coelestium, pag. 119. seq., wo die Prioritat Eulern zugesprochen wird.

Für den ersten Fall ist sonach die Fläche $\frac{6F}{\sqrt{2p}}$ durch die Abscissen und den Parameter ausgedrückt:

$$= x'^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + p\tfrac{3}{2}(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x'} - \sqrt{x})(x' + x + \sqrt{x'x} + \tfrac{3}{2}p);$$

allein durch p und y bestimmt ist:

$$12.F.p = (y' - y)(y'^2 + y^2 + y'y + 3p^2).$$

Da

$$\sqrt{x'} - \sqrt{x} = \sqrt{x + x' - 2\sqrt{x'x}},$$

so ist auch:

$$\frac{6F}{\sqrt{2p}} = \sqrt{x + x' - 2\sqrt{x'x}}.(x' + x + \sqrt{x'x} + \tfrac{3}{2}p)$$

$$= \sqrt{r + r' - p - 2\sqrt{x'x}}.(r + r' + \tfrac{1}{2}(p + 2\sqrt{x'x})).$$

Wie sich leicht zeigen lässt, ist aber:

$$(p + 2\sqrt{x'x})^2 = (r' + r)^2 - s^2,$$

denn

$$(r' + r)^2 - s^2 = (x + x' + p)^2 - (y' - y)^2 - (x' - x)^2$$

$$= (x + x')^2 + 2p(x + x') + p^2 - (x' - x)^2 - 2p(x' + x - 2\sqrt{x'x})$$

$$= 4x'x + p^2 + 4p.\sqrt{x'x}$$

$$= (p + 2\sqrt{x'x})^2.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\frac{r' + r + s}{2} = L^2,$$

$$\frac{r' + r - s}{2} = M^2;$$

so hat man:

$$r' + r = L^2 + M^2,$$

$$s = L^2 - M^2;$$

olglich:

$$\frac{6F}{\sqrt{2p}} = \sqrt{L^2 + M^2 - 2LM}.(L^2 + M^2 + LM)$$

$$= (L - M)(L^2 + M^2 + LM)$$

$$= L^3 - M^3$$

$$= \left(\frac{r' + r + s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r' + r - s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für den zweiten Fall, wenn der von r und r' gebildete Winkel $> 180^0$, ist:

$$F = \tfrac{1}{6}(x'y' + xy) + \tfrac{1}{4}p(y' + y),$$

$$\frac{6F}{\sqrt{2p}} = (\sqrt{x'} + \sqrt{x})(x' + x - \sqrt{x'x} + \tfrac{3}{2}p)$$

$$= \sqrt{r' + r + 2\sqrt{x'x} - p}.(r + r' - \tfrac{1}{2}(2\sqrt{x'x} - p)).$$

Hier ist:

$$s^2 = (y' + y)^2 + (x' - x)^2$$

und:

$$(r' + r)^2 - s^2 = (2\sqrt{x'x} - p)^2,$$

folglich mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen:

$$\frac{6F}{\sqrt{2p}} = (L + M)(L^2 + M^2 - LM)$$

$$= L^3 + M^3$$

$$= \left(\frac{r' + r + s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{r' + r - s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Bemerkung des Herausgebers.

Ich darf mir wohl erlauben, hier auch auf meine drei Abhandlungen über die Quadratur parabolischer und elliptischer Sectoren im Archiv. Thl. XVI. No. XXXIX. S. 439. — Thl. XVII. No. XL. S. 313. — Thl. XX. No. XL. S. 207. zu verweisen.

II.

Zwei wichtige chronologische Regeln.

Von

Herrn Professor *F. Maercker*
in Meiningen.

Man kömmt oft in den Fall, für ein vergangenes oder zukünftiges Datum den Wochentag wissen zu müssen. Die hierfür bekannten Regeln sind meist etwas weitläuftig und für die Rechnung beschwerlich. Es wird daher eine mit grosser Leichtigkeit anzuwendende, die genannte Aufgabe schnell lösende Regel, sowie auch eine sehr leicht zu gebrauchende Regel zur Berechnung des Osterfestes für eine beliebig gegebene Jahrzahl, vielleicht Manchem willkommen sein.

I. Berechnung des Wochentags für ein gegebenes Datum.

a) Für den Gregorianischen Kalender.

§. 1. Ist 18 die Zahl der Jahrhunderte bei der gegebenen Jahrzahl, so dividire man in die zwei letzten Ziffern derselben mit 4, addire den Quotienten mit Vernachlässigung des Restes zum Dividenden und dividire mit 7. Der Rest gibt den Wochentag des 1. März und des 1. November an, indem 1 Sonntag, 2 Montag, 3 Dienstag u. s. w., 0 aber (eigentlich 7) Sonnabend bedeutet. Um den Wochentag eines anderen, beliebigen Datums aus der für den 1. März gefundenen Zahl, welche wir die Normalzahl des Jahres nennen wollen, zu bestimmen, merke man für jeden Monat die hier dabei stehende Zahl:

Januar	4,	im Schaltjahr 3.
Februar	0,	„ „ 6.
März	0,	ebenso im Schaltjahr.
April	3,	„ „ „
Mai	5,	„ „ „
Juni	1,	„ „ „
Juli	3,	„ „ „
August	6,	„ „ „
September	2,	„ „ „
October	4,	„ „ „
November	0,	„ „ „
December	2,	„ „ „

Diese Zahlen nennen wir Monatszahlen.

Zur Bestimmung des Wochentags eines Datums addire man zur Normalzahl des Jahres die Monatszahl und die um 1 verminderte Zahl des Datums; dann erhält man durch Division mit 7 in dem Reste die Zahl des Wochentags. Es sei z. B. der Wochentag des 18. October 1813 zu bestimmen:

4 in 13 geht 3mal; $13+3=16$, was mit 7 dividirt 2 zum Rest lässt als Normalzahl des Jahres 1813. Die Monatszahl des October 4 und dann noch $18-1=17$ zu 2 addirt gibt 23, was mit 7 dividirt 2 zum Rest lässt. Also war der 18. October 1813 ein Montag.

Ganz ebenso verfährt man für die Jahrzahlen derjenigen anderen Jahrhunderte, deren beide ersten Ziffern wie bei 18 mit 4 dividirt 2 zum Rest lassen, also für die mit 22, 26, 30, 34 anfangenden vierzifferigen Jahrzahlen*). Bleibt bei der Division mit 4 in die zwei ersten Ziffern der Jahrzahl eine andere Zahl als 2 übrig, so hat man vor der Division mit 7, bei welcher der Rest die Normalzahl des Jahres ist, erst noch eine Zahl zu addiren, übrigens aber ganz ebenso wie gezeigt wurde zu verfahren. Bleibt nämlich bei der Division mit 4 in die zwei ersten Ziffern der Jahrzahl nichts übrig, wie bei den mit 16, 20, 24, 28, 32 anfangenden Jahrzahlen, so hat man 4, bleibt 1 übrig, wie bei den mit 17, 21,

*) Da beim Gregorianischen Kalender keine niedrigeren als vierzifferige Jahrzahlen vorkommen, und nach ungefähr 3600 Jahren, von 1582 an, unsere Regel eine in dieser Abhandlung nicht zu erörternde Aenderung erleidet, so ist hier immer nur von vierzifferigen Jahrzahlen die Rede.

25, 29, 33 anfangenden, so hat man 2, bleibt 3 übrig, wie bei den mit 15, 19, 23, 27, 31, 35 anfangenden, so hat man 5 zu addiren.

Es sei z. B. der Wochentag des 15. Februar 1763 zu berechnen:

4 in 63 geht 15mal; $63 + 15 + 2 = 80$, was mit 7 dividirt 3 zum Rest lässt. Hierzu die Monatszahl 0 und dann noch 14 addirt*) gibt 17, was mit 7 dividirt den Rest 3 lässt. Also ein Dienstag.

Ferner berechnen wir den Wochentag für den 10. November 1959:

4 in 59 geht 14mal; $59 + 14 + 5 = 78$, was mit 7 dividirt 1 zum Rest lässt. Hierzu die Monatszahl 0 und noch 9 addirt gibt 10, was mit 7 dividirt 3 übrig lässt. Also Dienstag.

Ferner den Wochentag des 31. October 2517: 4 in 17 geht 4mal; $17 + 4 + 2 = 23$, was mit 7 dividirt 2 übrig lässt. Die Monatszahl 4 und noch 30 addirt gibt 36, was mit 7 dividirt 1 übrig lässt. Also Sonntag.

§. 2. Der Beweis für die gegebene Regel ist folgender:

Der 1. März des Jahres 1800 war ein Sonnabend. Da nun das gemeine Jahr 52 Wochen und 1 Tag hat, so ist der Wochentag des 1. März in jedem gemeinen Jahr um 1 Tag, in jedem Schaltjahre um 2 Tage gegen das vorhergehende Jahr fortgerückt. Die zwei letzten Ziffern jeder nicht mit 2 Nullen endigenden Jahrzahl unseres Jahrhunderts geben also an, um wieviel Tage der Wochentag des 1. März seit 1800 fortgerückt sein würde, wenn alle Jahre gemeine gewesen wären. Durch Division mit 4 in die zwei letzten Ziffern findet man die Zahl der seit 1800 eingetretenen Schaltjahre. Addirt man also den Quotienten mit Vernachlässigung des Restes zu den zwei letzten Ziffern der Jahrzahl, so findet man, um wieviel Tage wirklich der Wochentag fortgerückt ist. Statt der erhaltenen Zahl nimmt man aber, weil nach je 7 Tagen wieder derselbe Wochentag ist, den bei der Division mit 7 bleibenden Rest, welcher, da für 1800 der 1. März ein Sonnabend, also die Normalzahl 0 ist, die gesuchte Normalzahl für das in Rechnung genommene Jahr sein muss.

---

*) Es versteht sich von selbst, dass man diese 14, überhaupt jede mit 7 theilbare Zahl, vor der Division mit 7 bei der Addition weglassen und statt irgend einer zu addirenden Zahl den bei ihrer Division mit 7 bleibenden Rest nehmen darf. Doch haben wir dies nirgends gethan, weil der dadurch erlangte Vortheil, den Jeder, wenn er will, selbstständig anzuwenden wissen wird, nur gering ist.

Vom 1. März 1800 bis 1. März 1900 werden 100 Jahre verflossen sein, die 24 Schalttage enthalten, weil 1900 kein Schaltjahr ist. Also rückt der Wochentag des 1. März in dieser Zeit um 124 Tage, oder, da diese Zahl mit 7 dividirt 5 zum Rest lässt, um 5 Tage fort. Die Normalzahl des Jahres 1900 ist demnach 5, und man muss für jede mit 19 anfangende Jahrzahl bei übrigens gleichem Verfahren vor der Division mit 7, deren Rest die Normalzahl des Jahres ist, noch 5 addiren.

Vom 1. März 1800 bis 1. März 2000 verfliessen 200 Jahre mit 49 Schalttagen, da 1900 kein Schaltjahr, aber 2000 ein solches ist. Also rückt in der genannten Zeit der Wochentag des 1. März um 249 Tage, oder, da diese Zahl mit 7 dividirt 4 zum Rest lässt, um 4 Tage vor. Man hat daher bei den mit 20 anfangenden Jahrzahlen, ehe man durch Division mit 7 die Normalzahl findet, noch 4 zu addiren.

Vom 1. März 1800 bis 1. März 2100 verfliessen 300 Jahre mit 73 Schalttagen (von 75 fallen 2, nämlich in 1900 und 2100 weg); also rückt der Wochentag des 1. März um 373 Tage, oder, da bei der Division mit 7 der Rest 2 bleibt, um 2 Tage fort. Man hat also bei den mit 21 anfangenden Jahrzahlen vor der Division mit 7, welche die Normalzahl gibt, 2 zu addiren.

Verfliessen genau 400 Jahre vom 1. März eines Jahres an, so fallen von 100 Schalttagen 3 weg; also rückt der Wochentag um 497 Tage, oder, da hierin die 7 aufgeht, um 0 Tage fort, d. h. es ist nach genau 400 Jahren der Wochentag wieder derselbe. Diejenigen Jahrzahlen also, bei denen die Zahl der Jahrhunderte mit 4 dividirt den nämlichen Rest lässt, haben, wenn sie in der Zahl der Zehner und Einer übereinstimmen, dieselbe Normalzahl. Es ist also vor derjenigen Division mit 7, deren Rest die Normalzahl ist, zu addiren:

α) Wenn in der Zahl der Jahrhunderte die 4 aufgeht, wie bei den Jahrzahlen, die mit 16, 20, 24, 28, 32 anfangen, die Zahl: 4

β) Wenn bei der Division mit 4 in die Zahl der Jahrhunderte 1 übrig bleibt, wie bei den Jahrzahlen, die mit 17, 21, 25, 29, 33 anfangen: 2

γ) Wenn bei genannter Division 2 übrig bleibt, wie bei den mit 18, 22, 26, 30, 34 anfangenden Jahrzahlen: 0

δ) Wenn 3 bei jener Division übrig bleibt, wie bei den mit 15, 19, 23, 27, 31, 35 anfangenden Jahrzahlen: 5.

Um zu zeigen, dass auf die oben angegebene Weise der Wochentag für ein beliebiges Datum aus der Normalzahl richtig gefunden wird, wollen wir die Monatszahlen, d. h. die Zahlen, welche für jeden Monat zur Normalzahl des Jahres addirt werden müssen, um nach Subtraction von 7, wenn wenigstens 7 herausgekommen ist, den Wochentag für den ersten Tag des Monats zu finden, nach einander berechnen:

Da der März 31 Tage hat, welche Zahl mit 7 dividirt 3 zum Rest lässt, so erhält man den Wochentag des 1. April, wenn man zur Normalzahl des Jahres 3 addirt. Den Wochentag des 1. Mai erhält man, weil der April 30 Tage hat, welche Zahl mit 7 dividirt 2 zum Rest lässt, wenn man 3 und 2, also 5, zur Normalzahl addirt. Hierzu kommen zur Bestimmung des 1. Juni noch 3, da der Mai $31 = 28 + 3$ Tage hat. Also ist $5 + 3 - 7 = 1$ die Monatszahl des Juni. Für den Juli ist die Monatszahl $1 + 2 = 3$, da der Juni $30 = 28 + 2$ Tage hat. Für den August ist $3 + 3 = 6$ die Monatszahl, da der Juli $31 = 28 + 3$ Tage hat. Für den September ist $6 + 3 - 7 = 2$ die Monatszahl, da der August $31 = 28 + 3$ Tage hat. Für den October ist es $2 + 2 = 4$, da im September die Zahl der Tage $30 = 28 + 2$ ist. Für den November ist es $4 + 3 - 7 = 0$, weil im October $31 = 28 + 3$ Tage sind. Für den December ist die Monatszahl $0 + 2 = 2$, da die Zahl der Tage des November $30 = 28 + 2$ ist. Der 1. Februar fällt im gemeinen Jahre immer auf denselben Wochentag wie der 1. März, also ist für Februar wie für März 0 die Monatszahl. Im Schaltjahre aber ist der Wochentag des 1. Februar um 29, oder da dies $= 28 + 1$ ist, um 1 Tag gegen den des 1. März zurück, also ist von 7, was wir, um subtrahiren zu können, statt 0 setzen, 1 abzuziehen, was 6 als Monatszahl des Februar für Schaltjahre gibt. Der Wochentag des 1. Januar ist um $31 = 28 + 3$, also um 3 Tage gegen den des 1. Februar zurück. Wir erhalten, wenn 3 von 7 (statt 0) abgezogen wird, 4 als Monatszahl des Januar für gemeine Jahre, und wenn 3 von 6 abgezogen wird, 3 als Monatszahl des Januar für die Schaltjahre. Die oben angegebenen Monatszahlen sind also richtig.

Jedes beliebige Datum fällt so viel Tage nach dem ersten Tag desselben Monats als die um 1 verminderte Zahl des Datums angibt (z. B. der 18. October fällt 17 Tage nach dem ersten). Man muss demnach, um den Wochentag eines bestimmten Datums zu erhalten, zur Zahl des Wochentags, auf den der erste des Monats fällt, d. h. zur Summe der Normalzahl und der Monatszahl, die um 1 verminderte Zahl des Datums addiren, und so vielmal 7 als

angeht von der Summe weglassen, d. h. die Summe mit 7 dividiren und den Rest als die Zahl für den gesuchten Wochentag behalten.

b) Für den Julianischen Kalender.

§. 3. Man dividirt die zwei letzten Ziffern der Jahrzahl mit 4, addirt den Quotienten mit Vernachlässigung des Restes zum Dividenden, addirt noch 2, subtrahirt die Zahl der in der Jahrzahl enthaltenen Hunderte, also die zwei ersten Ziffern, oder die erste Ziffer, oder nichts, je nachdem die Jahrzahl vierziffrig, oder dreiziffrig, oder noch kleiner ist (vor welcher Subtraction, wenn der Minuend zu klein, so viel mal 7 als nöthig ist addirt wird), dividirt mit 7 und behält den Rest als Normalzahl des Jahres, d. h. als Zahl des Wochentags für den ersten März. Hieraus findet man den Wochentag eines beliebigen Datums wie beim Gregorianischen Kalender, indem man die Monatszahl und die um 1 verringerte Zahl des Datums zur Normalzahl addirt und mit 7 dividirt. Der Rest gibt den verlangten Wochentag.

Es sei z. B. der Wochentag des 10. November 1483 zu finden:

4 in 83 geht 20mal; $83+20+2-14=91$. Dies lässt bei Division mit 7 den Rest 0. Hierzu 0 (Monatszahl des November) und 9 addirt gibt 9, was mit 7 dividirt den Rest 2 lässt. Also fiel der 10. November 1483 auf einen Montag.

Der Wochentag des 25. December 800 sei zu bestimmen:

$0+0+2+7-8=1$ (Normalzahl für 800). Nun ist $1+2+24=27$, was mit 7 dividirt 6 zum Rest lässt. Also Freitag.

Der Wochentag des 5. April 33 sei zu bestimmen:

4 in 33 geht 8mal; $33+8+2-0=43$, was mit 7 dividirt den Rest 1 lässt; $1+3+4=8$, was wieder bei Division mit 7 den Rest 1 lässt. Also Sonntag.

Der Beweis für diese Regel ist folgender:

Nach dem Julianischen Kalender fällt bekanntlich der 1. März jeder mit 18 anfangenden vierziffrigen Jahrzahl 12 Tage später als nach dem Gregorianischen Kalender. Also hat man zur Zahl des Wochentags des 1. März einer nach dem Gregorianischen Kalender in Rechnung genommenen Jahrzahl der genannten Art noch 12 zu addiren, um den Wochentag des 1. März desselben

Jahres für den Julianischen Kalender zu finden. Statt 12 zu addiren, kann man auch, weil 12 = 28 + 2 — 18 ist, 2 addiren und 18 subtrahiren. Also hat man die zwei letzten Ziffern der Jahrzahl mit 4 zu dividiren, den Quotienten (mit Vernachlässigung des Restes) und noch 2 zum Dividenden zu addiren, 18, welches die Zahl der in der Jahrzahl enthaltenen Hunderte ist, zu subtrahiren, zuletzt mit 7 zu dividiren, worauf der Rest den Wochentag des 1. März, die Normalzahl, angibt.

In 100 Jahren gibt es nach dem Julianischen Kalender immer 25 Schaltjahre. Also rückt in 100 Jahren der Wochentag um 125 Tage, oder, weil 125 = 17.7 + 6 ist, um 6 Tage fort, wofür man auch sagen kann: der Wochentag geht um 1 Tag zurück. Es ist also für vierziffrige Jahrzahlen, die mit 19 anfangen, in unserer Berechnung alles ebenso wie bei den mit 18 anfangenden; nur muss man 1 mehr, also 19 statt 18, abziehen. Bei den mit 20 anfangenden ist 20 abzuziehen u. s. w. Ebenso muss man für die mit 17 anfangenden vierziffrigen Jahrzahlen 1 weniger als für die mit 18 anfangenden, d. h. 17, für die mit 16 anfangenden 16 u. s. w., überhaupt immer die Zahl der in der Jahrzahl enthaltenen Hunderte, nachdem man zu den zwei letzten Ziffern den bei der Division mit 4 herauskommenden Quotienten und noch 2 addirt hat, abziehen, wobei, wenn der Minuend zu klein sein sollte, vorher noch so viel mal 7 als nöthig ist addirt wird. Dividirt man zuletzt noch mit 7, so muss der Rest den verlangten Wochentag des 1. März oder die Normalzahl des Jahres geben.

Dass dann aus der Normalzahl der Wochentag für jedes andere Datum des Jahres ebenso wie beim Gregorianischen Kalender sich ergibt, wird ebenso wie dort bewiesen.

§. 4. Es lassen sich auch vermittelst der zur Berechnung der Wochentage für beide Kalender gegebenen Regeln sehr rasch die Sonntage oder andere bestimmte Wochentage, die ein in irgend einem Jahr gegebener Monat enthält, finden. Man braucht nur die für den ersten des Monats gefundene Zahl des Wochentags von 30 abzuziehen, um ein Sonntagsdatum zu erhalten.

Ist z. B. der erste des Monats ein Mittwoch (4), so ist der 26. des Monats (30 — 4) ein Sonntag. Der 29. des Monats fällt nämlich auf denselben Wochentag wie der erste. Die Zahl des Wochentags für den 30. ist daher 1 mehr als für den ersten. Rechnet man also vom 30. so viel Tage zurück als die Zahl des Wochentags für den ersten beträgt, so erhält man 1 als Zahl des Wochentags. Das heisst, man erhält immer ein Sonntags-

datum in einem beliebigen Monat, wenn man von 30 die Zahl des Wochentags, auf welchen der erste des Monats fällt, abzieht.

Ebenso leicht wie für den Sonntag lassen sich Regeln für andere Wochentage aufstellen. Doch beschränken wir uns jetzt auf den Sonntag. Es ist nämlich für die nun abzuhandelnde Osterberechnung von Wichtigkeit, schnell die Sonntage des März und April eines gegebenen Jahres überblicken zu können. Man braucht zu diesem Zweck nur die Zahl für den Wochentag des 1. März, also die Normalzahl des Jahres, von 30 abzuziehen, um ein Sonntagsdatum im März, oder von 20 abzuziehen, um ein solches im April zu erhalten, weil der 20. April mit dem 30. März immer auf denselben Wochentag (gerade 3 Wochen später) fällt. Ist z. B. die Normalzahl 5, so erkennt man augenblicklich den 25. März, den 15., 8. und 1. April als Sonntage.

II. Berechnung des Osterfestes für eine gegebene Jahrzahl.

a) Für den Gregorianischen Kalender.

§. 5. Fängt die gegebene Jahrzahl mit 18 an, so addire man 14 (welche Zahl wir mit a bezeichnen) zu den zwei letzten Ziffern der Jahrzahl, dividire mit 19, multiplicire den Rest mit 20, statt welches Restes man hier (aber nicht im sogleich Folgenden) auch die Zahl nehmen darf, die bei seiner Division mit 3 übrig bleibt, addire noch so viel als dem erstgenannten Rest an 23 (welche Zahl wir mit b bezeichnen) fehlt, dividire mit 30 und addire den neuen Rest zu 21. Man erhält hierdurch zunächst den Tag im März oder nach Abzug von 31 den im April, auf welchen der Ostervollmond fällt.

Kürzer nach dem Wortlaut, aber nicht in der Ausführung, ist für die Berechnung des Ostervollmonds die folgende Regel, aus welcher die angegebene abgeleitet ist:

Man dividirt die Jahrzahl mit 19, multiplicirt den Rest mit 19, addirt 23 ($=b$), dividirt mit 30 und addirt den neuen Rest zu 21.

Hat man den Ostervollmond, so berechnet man (nach §. 1), die Normalzahl des Jahres, zieht diese von 30 oder von 20 ab, wodurch man im ersteren Fall ein Sonntagsdatum im März, im anderen ein solches im April bekömmt (§. 4). Nun übersieht man sehr leicht die hier in Betracht kommenden Sonntage im März oder im April, von denen der auf den Ostervollmond zunächst folgende das Osterfest sein muss.

Es sei das Osterfest für 1869 zu berechnen:

69 + 14 = 83, was mit 19 dividirt 7 übrig lässt; wird 7 mit 3 dividirt, so bleibt der Rest 1. Dies mit 20 multiplicirt und 16 addirt, weil so viel der 7 an 23 fehlt, gibt 36, was mit 30 dividirt 6 übrig lässt; 21 + 6 = 27. Also ist der 27. März der Ostervollmond.

4 in 69 geht 17mal; 69 + 17 = 86, was mit 7 dividirt 2 zum Rest lässt als Normalzahl des Jahres 1869. Zieht man 2 von 30 ab, so erhält man den 28. März als Sonntagsdatum und zugleich als das Osterfest, weil es der nächste auf den Ostervollmond folgende Sonntag ist.

Es sei ferner für 1818 das Osterfest zu berechnen:

18 + 14 = 32, was mit 19 dividirt den Rest 13 lässt. Dividirt man dies mit 3, so bleibt 1 übrig. Wird zu 20.1 = 20 noch 10 addirt, weil der 13 an 23 noch 10 fehlt, so erhält man 30, was mit 30 dividirt 0 zum Rest lässt. Also ist der 21. März der Ostervollmond.

4 in 18 geht 4mal; 18 + 4 = 22, was mit 7 dividirt den Rest 1 lässt als Normalzahl von 1818. Da 30 − 1 = 29, so ist der 29. März und eine Woche früher der 22. März Sonntag, und weil er der nächste Sonntag nach dem Ostervollmond ist, das Osterfest*).

Um das Osterfest des Jahres 1886 zu berechen, haben wir:

86 + 14 = 100, was mit 19 dividirt 5 zum Rest lässt; dies mit 3 dividirt lässt 2 übrig. Dann wird zu 20.2 = 40 noch 18 addirt, weil so viel der 5 an 23 fehlt. Dividirt man 40 + 18 = 58 mit 30, so bleibt 28, und da 21 + 28 − 31 = 18 ist, so ist der 18. April der Ostervollmond.

4 geht 21mal in 86. Da 86 + 21 = 107 mit 7 dividirt den Rest 2 als Normalzahl gibt, und 20 − 2 = 18 ist, so ist der 18. April Sonntag, und eine Woche später der 25. April das Osterfest, welches nur dies eine mal in unserem Jahrhundert so spät fällt.

Die Berechnung des Osterfestes für andere Jahrhunderte geschieht ebenso; nur erhalten a und b meist andere Zahlen-

---

*) Der Fall, dass Ostern so früh wie möglich, nämlich den 22. März, fällt, fand vor dem Jahre 1818 zuletzt 1761 statt, und wird dann erst 467 Jahre nach 1818, im Jahre 2285, wieder eintreten.

werthe als 14 und 23. Die Zahl a, welche der Rest ist, der bleibt, wenn man an die 2 ersten Ziffern der Jahrzahl 2 Nullen hängt und mit 19 dividirt (z. B. 1800 durch 19 dividirt lässt $a=14$ zum Rest), dient bloss zur Erleichterung der Division mit 19 in die Jahrzahl, welche Division natürlich denselben Rest gibt als wenn a zu den zwei letzten Ziffern der Jahrzahl addirt, und die Summe dann mit 19 dividirt wird. Schnell wird a berechnet, indem man die Zahl der Jahrhunderte (oder den nach Subtraction von 19 bleibenden Rest) mit 5 multiplicirt (weil 5 bei Division mit 19 in 100 übrig bleibt) und das Produkt mit 19 dividirt. Z. B. für die mit 17 anfangenden Jahrzahlen ist $a=9$, weil $5.17=85$ mit 19 dividirt den Rest 9 lässt. Also ist für die Jahrzahlen,

die	mit	15	anfangen,	$a=18$
„	„	16	„	$a=4$
„	„	17	„	$a=9$
„	„	18	„	$a=14$
„	„	19	„	$a=0$
„	„	20	„	$a=5$
„	„	21	„	$a=10$
„	„	22	„	$a=15$
„	„	23	„	$a=1$
„	„	24	„	$a=6$
„	„	25	„	$a=11$
„	„	26	„	$a=16$
„	„	27	„	$a=2$
„	„	28	„	$a=7$
„	„	29	„	$a=12$
„	„	30	„	$a=17$
„	„	31	„	$a=3$
„	„	32	„	$a=8$
„	„	33	„	$a=13$
„	„	34	„	$a=18$
„	„	35	„	$a=4$.

Die Zahl b bekommt man folgendermassen: Man zieht von der Zahl der Jahrhunderte 15 ab, zieht von dem Reste, den wir r nennen, die beiden Quotienten mit Vernachlässigung der zu ihnen gehörigen Reste ab, die man bekömmt, wenn man erstens den um 3 vermehrten Rest r mit 4 und zweitens den Rest r selbst mit 3 dividirt; zuletzt addirt man die so erhaltene Zahl zu 22.

Für die mit 15 beginnenden Jahrzahlen ist $b = 22$, weil zu 22 hier nichts zu addiren ist. Es ist nämlich $r = 0$ und die Quotienten $\frac{r+3}{4}$ und $\frac{r}{3}$, von denen bloss die darin enthaltenen Ganzen gelten, ebenfalls 0. Für die mit 16 beginnenden Jahrzahlen haben wir: $r = 16 - 15 = 1$. Nun gibt 4 in $1 + 3 = 4$ dividirt 1 und 3 in 1 dividirt 0 zum Quotienten (da der Rest vernachlässigt wird). Da nun $1 + 0 = 1$ von $r = 1$ abgezogen 0 gibt, so ist jetzt ebenfalls $b = 22$. Für 17 . . haben wir $r = 17 - 15 = 2$. Da 4 in $2 + 3 = 5$ dividirt 1mal und 3 in 2 dividirt 0mal geht, $1 + 0 = 1$ aber von $r = 2$ abgezogen 1 gibt, so ist $22 + 1 = 23$ der Werth von b. Für 18 . . haben wir, wie schon gesagt wurde, $b = 23$, was auch nach der jetzigen Regel sich findet. Denn $r = 18 - 15 = 3$. Nun geht 4 in $3 + 3 = 6$ dividirt 1mal und 3 in 3 ebenfalls 1mal. Da nun $1 + 1 = 2$ von $r = 3$ abgezogen 1 gibt, so ist auch hier $b = 22 + 1 = 23$. Für 19 . . haben wir $r = 19 - 15 = 4$. Nun geht 4 in $4 + 3 = 7$ dividirt 1mal und 3 in 4 dividirt ebenfalls 1mal. Da nun $1 + 1 = 2$ von 4 abgezogen 2 gibt, so ist $b = 22 + 2 = 24$. Nach der auf diese Weise ausgeführten Rechnung ist:

Für 15. .	bis 16. . incl.	$b = 22$
„ 17. .	„ 18. . „	$b = 23$
„ 19. .	„ 21. . „	$b = 24$
„ 22. .		$b = 25$
„ 23. .		$b = 26$
„ 24. .		$b = 25$
„ 25. .		$b = 26$
„ 26. .	bis 28. . incl.	$b = 27$
„ 29. .	„ 30. . „	$b = 28$
„ 31. .	„ 33. . „	$b = 29$
„ 34. .		$b = 30$
„ 35. .		$b = 31$.

Noch ist für unsere Regel zu bemerken, dass, wenn bei der Division mit 30 der Rest 29 bleibt, und man folglich, da $21 + 29 - 31 = 19$, den 19. April als Tag des Ostervollmonds bekommen würde, man dafür den 18. April zu nehmen hat.

Es sei das Osterfest des Jahres 1784 zu berechnen. Hier ist $a = 9$ und $b = 23$. Wir haben: $84 + 9 = 93$, was mit 19 dividirt 17 übrig lässt. Dividirt man dies mit 3, so bleibt 2. Zu $20.2 = 40$ noch 6 addirt, weil der 17 noch 6 an 23 fehlt, gibt 46, was mit 30 dividirt 16 übrig lässt. Nun ist $21 + 16 - 31 = 6$, also

der 6. April der Ostervollmond. 4 in 84 dividirt gibt 21; 84 + 21 + 2 = 107, was mit 7 dividirt den Rest 2 als Normalzahl gibt. Dies von 20 abgezogen gibt 18. Es waren demnach der 18. und 11. April Sonntage, und der letztgenannte als der nächste nach dem Ostervollmond das Osterfest.

Nun wollen wir das Osterfest des Jahres 2423 berechnen. Hier ist $a = 6$ und $b = 25$. Also: 23 + 6 = 29, was mit 19 dividirt den Rest 10 lässt. Dividirt man dies mit 3, so bleibt 1. Zu 20.1 = 20 noch 15 addirt, weil der 10 an $25 = b$ noch 15 fehlt, gibt 35, was mit 30 dividirt 5 übrig lässt. Es ist 21 + 5 = 26, also der 26. März der Ostervollmond. 4 in 23 geht 5mal; 23 + 5 + 4 = 32, was mit 7 dividirt den Rest 4 als Normalzahl gibt. Dies von 20 abgezogen gibt den 16. April als Sonntagsdatum. Es ist 2 Wochen früher der 2. April der auf den Ostervollmond folgende Sonntag, d. h. Ostern.

§. 6. Um diese Regel zu beweisen, müssen wir von der mittleren Länge des synodischen Monats:

29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden,

oder:

29,53059028 Tage

ausgehen. 12 solcher Monate geben:

354,36708336 Tage,

so dass am Julianischen Jahre, oder an 365,25 Tagen noch

10,88291664 Tage

fehlen. Wir müssen jetzt die Länge des Julianischen Jahres, nicht die des mittleren tropischen Sonnenjahres, desshalb nehmen, weil innerhalb eines jeden Jahrhunderts auch der Gregorianische Kalender nach Julianischen Jahren rechnet, und die Ausgleichung immer erst im letzten Jahre des Jahrhunderts bewirkt wird. Nach 19 solchen Jahren sind verflossen:

6939,75 Tage,

und nach 235 synodischen Monaten

6939,688716 Tage,

wäre der Unterschied bloss:

0,061284 Tage,

oder:

2*

1,470816 Stunden

beträgt. Diese 19jährige Mondperiode (die Metonsche genannt von dem Entdecker Meton im 5. Jahrhundert vor Chr. Geb.) bildet die Grundlage für die Osterberechnung. Hat man nun den Ostervollmond irgend eines Jahres, so hat man nach dem Obigen 11 (eigentlich 10,882916....) Tage zurück, oder wenn man hierdurch auf einen Tag vor dem 21. März kommen würde, 19 (eigentlich 18,647673 .... nämlich 29,530590.... — 10,882916....) Tage vorwärts zu zählen, um den Ostervollmond des folgenden Jahres zu erhalten. Denn, hat man 12 synodische Monate vom letzten Ostervollmond an vorwärts gezählt, so fehlen noch 11 Tage bis das Jahr voll ist, also fällt der nächste Ostervollmond 11 Tage früher. Wenn man aber hierbei auf ein Datum vor dem 21. März kommen würde, welcher als der für die Osterberechnung festgestellte Frühlingsanfang das frühste Datum des Ostervollmonds ist, so muss man einen dreizehnten Monat hinzunehmen, also, nachdem 11 rückwärts gezählt ist, 30 vorwärts zählen, oder, wenn man nicht erst rückwärts zählen will, gleich 19 vorwärts zählen.

Man denke sich nun die 30 Tage vom 21. März bis 19. April incl. in einen Kreis (siehe die hierzu gehörende Figur) geschrieben und die Zahlen von 1 bis 30 der Reihe nach hinzugesetzt. Zählt man nun von irgend einem dieser 30 Data, auf welches der erste Ostervollmond der Mondperiode fällt, ohne dass in diesem Datum, wie gezeigt werden wird, im Laufe des nämlichen Jahrhunderts (ausgenommen ist nur das letzte auf 2 Nullen sich endigende Jahr) eine Aenderung eintreten kann, zählt man z. B. vom 13. April an, auf welches Datum in diesem Jahrhundert der erste Ostervollmond der Periode jedesmal fällt, 19 vorwärts oder 11 rückwärts, ohne jenes Datum mitzuzählen, so erhält man den zweiten Ostervollmond der Periode, hier den 2. April, zählt man von hier aus wieder 19 vorwärts oder 11 rückwärts, so erhält man den dritten Ostervollmond, hier den 22. März u. s. w. Beschränken wir jenes Vorwärtszählen von 19, oder Rückwärtszählen von 11, welches immer beides dasselbe Resultat gibt, durch die Bestimmung, dass man nicht über die Gränzen 1 und 30, d. h. den 21. März und 19. April hinweg zählen darf, welche Gränzen der Ostervollmond nicht überschreiten kann, so muss man immer auf ein einmaliges Vorwärtszählen von 19 ein Rückwärtszählen von 11, meist aber ein zweimaliges Rückwärtszählen von 11 folgen lassen. Damit dies ganz deutlich werde, wollen wir, beim 13. April anfangend, die Ostervollmonde der Reihe nach hinsetzen und dabei bemerken, ob vorwärts oder rückwärts gezählt wird, um den *nächstfolgenden* Ostervollmond zu erhalten:

1.	Ostervollmond	13. April	rückwärts
2.	„	2. April	rückwärts
3.	„	22. März	vorwärts
4.	„	10. April	rückwärts
5.	„	30. März	vorwärts
6.	„	18. April	rückwärts
7.	„	7. April	rückwärts
8.	„	27. März	vorwärts
9.	„	15. April	rückwärts
10.	„	4. April	rückwärts
11.	„	24. März	vorwärts
12.	„	12. April	rückwärts
13.	„	1. April	rückwärts
14.	„	21. März	vorwärts
15.	„	9. April	rückwärts
16.	„	29. März	vorwärts
17.	„	17. April	rückwärts
18.	„	6. April	rückwärts
19.	„	26. März	vorwärts.

Es wird 7mal vorwärts und 12mal rückwärts gezählt. Bei jedem Vorwärtszählen nimmt man 19 statt 18,647673, also 0,352326 zu viel; jetzt also 7mal 0,352326 oder 2,466284 *) Tage zu viel; bei jedem Rückwärtszählen aber nimmt man 11 statt 10,882916, also 0,117083 zu viel; jetzt also 12mal 0,117083 oder 1,405000 Tage zu viel. Daher hat man 2,466284 — 1,405000 = 1,061284, d. h. etwas über 1 Tag zu viel vorwärts gezählt. Wenn man demnach diesen Tag weglässt, d. h. die Ostervollmonde der neuen Periode wieder ebenso nimmt wie in der abgelaufenen (hier statt des 14. April, den man, vom 26. März vorwärts zählend, als Ostervollmond der neuen Periode erhalten würde, den 13. April nimmt), so beträgt der Fehler bloss 0,061284 Tage für eine Mondperiode (welche nämliche Grösse wir bereits oben als den Unterschied zwischen 19 Julianischen Jahren und 235 synodischen Monaten fanden), folglich in einem Jahrhundert, welches $5\frac{5}{19}$ Mondperioden enthält, 0,322549 Tage, also noch keinen Drittel-Tag.

---

*) Dass hier 4 statt 2 in der letzten Decimalstelle steht, kommt daher, weil bei der Multiplication auch die weggelassenen Decimalen berücksichtigt sind. Ebenso auch im Folgenden.

Dass man bei ungestörtem Fortzählen in die neue Periode für den ersten Ostervollmond derselben, und darum auch für alle übrigen Ostervollmonde, Data erhalten würde, die um je einen Tag zu spät sind (den 14. April statt des 13. April u. s. w.), zeigt sich auch auf folgende Weise: Man kann jeden Ostervollmond, statt abwechselnd vor- und rückwärts zu zählen, auch immer so aus dem vorhergehenden berechnen, dass man stets 19 Tage addirt und so oft dadurch ein die Gränze des 19. April oder die Zahl 30 überschreitendes Datum herauskommt, 30 Tage subtrahirt. Man hätte demnach, um aus dem 1. Ostervollmond der Periode das Datum des 1. Ostervollmonds der folgenden Periode zu berechnen, 19 mal 19 d. h. 361 zu addiren und 30 so oft es angeht, also 12mal, abzuziehen. Da nun $12.30 = 360$ und $361 - 360 = 1$ ist, so würde auf diese Weise der erste Ostervollmond der folgenden Periode um 1 Tag zu spät gefunden werden. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man wie oben 7mal 19 Tage vorwärts und 12mal 11 Tage rückwärts zählt; denn $7.19 - 12.11 = 133 - 132 = 1$. Es ist demnach dies Resultat, wie die vorige Betrachtung zeigt, die auf die Gleichung $19.19 - 12.30 = 1$ führt, von dem Datum des ersten Ostervollmonds der Mondperiode ganz unabhängig, die Zahlen 7 und 12, die sich aus den Gleichungen:

$$19x - 11y = 1 \text{ und } x + y = 19,$$

als $x = 7$ und $y = 12$ mit Nothwendigkeit ergeben, gelten für alle Mondperioden, und das über die Berechnung der Ostervollmonde vorher Bewiesene hat desshalb allgemeine Gültigkeit.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass man die Zahl bei einem beliebigen Ostervollmonde der Periode, wenn sie ganz in dasselbe Jahrhundert fällt, während welcher Zeit, mit Ausnahme des letzten auf 2 Nullen sich endigenden Jahres, die Ostervollmonde aller Perioden dieselben bleiben, dadurch finden kann, dass man zur Zahl, die beim ersten Ostervollmond steht, so viel mal 19 addirt als die um 1 verminderte Zahl, welche angibt, der wievielte Ostervollmond es ist, beträgt, und so viel mal 30 als es angeht subtrahirt. Der Rest ist die Zahl, die beim gesuchten Datum steht. Z. B. findet man den 8. Ostervollmond, indem man 1 von 8 abzieht, was 7 gibt, dann $7.19 = 133$ zu 24, der Zahl des 13. April, addirt, was 157 gibt, und $5.30 = 150$ subtrahirt, wobei der Rest 7, die Zahl des 27. März, bleibt, auf welches Datum wirklich der 8. Ostervollmond fällt.

Um dies für unseren Zweck gebrauchen zu können, muss noch vorher gezeigt werden, wie man aus einer gegebenen Jahr-

zahl berechnet, der wievielte Ostervollmond der Periode der zu jener Jahrzahl gehörige ist. Man könnte nämlich eigentlich die Mondperiode mit jedem beliebigen Jahre beginnen. Doch ist es üblich geworden, das erste Jahr unserer Zeitrechnung, das Jahr 1 nach Chr. Geb., als das zweite der Mondperiode zu betrachten. Also ist das Jahr 2 das dritte, das Jahr 3 das vierte u. s. w. So ist das Jahr 89 eigentlich das neunzigste, aber da $90 = 4.19 + 14$ ist, so ist es das vierzehnte der Mondperiode, welche 14 der Rest ist, den man erhält, wenn man die um 1 vermehrte Zahl 89, also 90, mit 19 dividirt. Wenn daher eine beliebige Jahrzahl um 1 vermehrt und dann mit 19 dividirt wird, so gibt der Rest an, das wievielte Jahr der Mondperiode man hat. Man nennt diese Zahl die **güldene Zahl**.

Nach dem Vorigen findet man die Zahl, die beim Ostervollmond eines bestimmten Jahres steht, indem man von der güldenen Zahl 1 abzieht, den Rest mit 19 multiplicirt, das Produkt zur Zahl, die beim ersten Ostervollmond der Periode steht, hier zu 24, addirt, und so oft es geht 30 subtrahirt. Um also den Ostervollmond eines bestimmten Jahres zu finden, dividirt man die Jahrzahl mit 19, multiplicirt den um 1 vermehrten (ob man die Jahrzahl selbst oder den Rest um 1 vermehrt, ist einerlei) und auch wieder um 1 verminderten Rest, d. h. den Rest selbst, mit 19 (denn der um 1 vermehrte Rest, die güldene Zahl, gibt an, das wievielte Jahr der Mondperiode man hat), addirt das Produkt zu der Zahl (24), die dem ersten Ostervollmond der Periode zugehört, und dividirt mit 30, wobei der Rest die zum gesuchten Ostervollmond gehörige Zahl ist. Diese Zahl wird, um das Datum des Ostervollmonds zu finden, um 1 vermindert und zu 21 addirt, weil beim 21. März die Zahl 1 steht, alle folgenden Ostervollmondsdata so wie die dabei stehenden Zahlen immer um 1 zunehmen, und man folglich das Datum jedes Ostervollmonds aus der dabei stehenden Zahl dadurch finden muss, dass man von dieser 1 abzieht und dann 21 dazu addirt, wobei, wenn über 31 herauskömmt, noch 31 subtrahirt wird, um das dem April zugehörende richtige Datum zu erhalten.

Für 1864 z. B. bleibt bei der Division mit 19 der Rest 2. Dies 19mal genommen gibt 38; hierzu 24 addirt gibt 62, mit 30 dividirt, gibt 2 als Rest. Hiervon 1 abgezogen bleibt 1, was zu 21 addirt den 22. März als den Ostervollmond des Jahres 1864 gibt.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man 23 statt 24 nimmt, und dann so viel Tage als der bei der Division mit 30 erhaltene

Rest angibt, der nun um 1 kleiner ist, also nicht mehr um 1 vermindert zu werden braucht, zum 21. März hinzu zählt.

Also erhält man das Datum des Ostervollmonds, wenn man in die Jahrzahl mit 19 dividirt, den Rest 19mal nimmt, 23 addirt, mit 30 dividirt und so viel Tage als der Rest angibt zum 21. März hinzufügt.

Hieraus wird die Richtigkeit unserer Regel wenigstens für die mit 18 anfangenden Jahrzahlen klar. Statt nun aber in die Jahrzahl mit 19 zu dividiren, zählen wir nach dem für das Kopfrechnen erleichterten Verfahren 14 ($= a$), was bei der Division mit 19 in 1800 übrig bleibt, zu den zwei letzten Ziffern, und dividiren die Summe mit 19; statt den Rest mit 19 zu multipliciren und 23 ($= b$) zu addiren, multipliciren wir den Rest mit 20 und addiren so viel hinzu als dem Rest noch an 23 fehlt (d. h. wir addiren 23 und subtrahiren den Rest, da wir ihn einmal zu viel, 20 mal statt 19 mal, genommen haben), worauf die Division mit 30 den nunmehrigen Rest als die Zahl gibt, die man zu 21 addiren muss, um den Tag im März, oder nach Subtraction von 31 den im April zu erhalten, auf welchen der Ostervollmond fällt. Das Verfahren wird für das Kopfrechnen dadurch noch bedeutend erleichtert, dass man statt des bei der Division mit 19 bleibenden Restes die Zahl, welche derselbe mit 3 dividirt übrig lässt, 20mal nimmt. Denn das weggelassene Vielfache von 3 gibt mit 20 multiplicirt und dann mit 30 dividirt immer eine ganze Zahl, auf die, weil bei der Division mit 30 nur der Rest gilt, nichts ankommt.

In diesem Jahrhundert begann zuerst mit 1805 eine neue Mondperiode, und der Ostervollmond fiel damals auf den 13. April. Man findet daher von 1800 bis 1899 incl. den Ostervollmond, indem man genau, wie angegeben wurde, verfährt.

Für andere Jahrhunderte geschieht die Berechnung des Ostervollmonds ebenso wie für dieses, nur mit dem Unterschied, dass die Zahlenwerthe von a und b andere sind. Der Werth von a wird, wie schon gesagt wurde, gefunden, indem man die zwei ersten Ziffern der Jahrzahl oder den bei ihrer Division mit 19 bleibenden Rest mit 5 multiplicirt und das Produkt mit 19 dividirt. Denn 5 bleibt bei der Division mit 19 in 100 übrig; also hat man, um den Rest a zu erfahren, der bei Division der Jahrhunderte mit 19 übrig bleibt, so viel mal 5 zu nehmen als 100 in der Jahrzahl enthalten ist und mit 19 zu dividiren, wobei, wenn die Zahl der Jahrhunderte 19 oder über 19 ist, diese Zahl vor

der Multiplication mit 5 abgezogen werden darf. Addirt man dann den Rest a zu den zwei letzten Ziffern, so muss bei der Division mit 19 derselbe Rest bleiben wie bei der Division der Jahrzahl mit 19.

Die Zahl b wird, sobald die zweite Ziffer der Jahrzahlen um 1 wächst, entweder auch um 1 vermehrt oder sie bleibt unverändert, oder sie wird um 1 verringert. Es ist nämlich klar, dass die Vermehrung oder Verminderung der Zahl b um 1 gleichbedeutend ist mit dem Fortrücken oder Zurückgehen sämmtlicher Data der Ostervollmonde um 1 Tag. Wenn nun eine mit zwei Nullen endigende Jahrzahl wie 1700, 1800, 1900 keinem Schaltjahr zugehört, so wird durch das Ausfallen des 29. Februar, der sonst den Jahrzahlen, in denen 4 aufgeht, eigenthümlich ist, die Datumszahl des Ostervollmonds dieses Jahres, und darum auch aller anderen mit denselben zwei Ziffern beginnenden Jahre, um 1 vermehrt, also b um 1 grösser. Dagegen wird b alle dreihundert Jahre dadurch um 1 kleiner, dass, wie wir oben sahen, 19 Julianische Jahre um 0,061284 Tage grösser als 235 synodische Monate sind, was in ungefähr 310 Jahren einen ganzen Tag gibt, um welchen das Datum des richtigen Ostervollmonds hinter dem nach der Regel berechneten Datum zurück geblieben ist. Wir haben nämlich anzusetzen:

$$0{,}061284 \text{ Tage} : 1 \text{ Tag} = 19 \text{ Jahre} : x \text{ Jahren},$$

was durch Division mit 0,061284 in 19 gibt: $x = 310{,}03$. Man muss daher nach je dreihundert Jahren (eigentlich nach je 310 Jahren), nämlich dann, wenn in den beiden ersten Ziffern der auf 2 Nullen endigenden Jahrzahl die 3 aufgeht, das Datum der Ostervollmonde um 1 Tag zurückstellen, d. h. 1 von dem b, welches vorher gültig war, abziehen. Da man 300 statt 310 nimmt, so würde später wieder eine Correction nöthig sein, vielleicht, wie von Lilius vorgeschlagen worden ist, darin bestehend, dass nach 7maligem Zurückstellen des Ostervollmonds um 1 Tag, also nach 2100 Jahren, man 400 statt 300 Jahre damit wartet, so dass in 2500 Jahren der Ostervollmond um 8 Tage zurück gestellt wird. Wartete man nach 9maligem Zurückstellen, also nach 2700 Jahren 400 Jahre, so dass in 3100 Jahren das Zurückstellen 10mal geschähe, so würde dies wohl der Wahrheit nach näher kommen. Doch wollen wir unsere Berechnung nicht so weit ausdehnen, sondern nur bis zum Jahre 3599.

Zum ersten mal ist das Zurückstellen des Ostervollmonds um 1 Tag im Jahr 1800 geschehen. Da b hierdurch um 1 kleiner,

aber wegen des ausfallenden Schalttags in diesem Jahre auch um 1 grösser werden musste, so ist es unverändert geblieben, und es hat also b für die mit 17 anfangenden Jahrzahlen denselben Werth wie für die mit 18 anfangenden, nämlich 23. Im Jahre 1700 wurde es wegen Ausfallens des Schalttags um 1 vermehrt, ist also für die mit 16 anfangenden Jahrzahlen 22. Ebenso für die mit 15 anfangenden, weil im Jahre 1600 weder der Schalttag ausfiel, noch auch das Zurückstellen der Ostervollmonde um 1 Tag statt fand.

Gehen wir von dem Werthe 22 aus, den b für die mit 15 anfangenden Jahrzahlen hat, so würde b alle hundert Jahre durch Ausfallen eines Schalttags um 1 wachsen, wenn bei jeder mit 2 Nullen endigenden Jahrzahl der Schalttag ausfiele. Zunächst also würde zu 22 die Zahl r zu addiren sein, welche übrig bleibt, wenn 15 von den zwei ersten Ziffern der in Rede stehenden Jahrzahl abgezogen wird. Da nun aber die Jahre 1600, 2000, 2400 u. s. w. Schaltjahre sind, so dividirt man das um 3 vermehrte r mit 4, und subtrahirt, um zu erfahren, um wieviel b wächst, von r den erhaltenen Quotienten (mit Vernachlässigung des Restes) als die Zahl, die angibt, wie viel solche mit 2 Nullen endigende Jahre, in deren zwei ersten Ziffern die 4 aufgeht, von 1582 bis zu dem in Rede stehenden Jahre eintreten. Man muss vor der Division mit 4 desshalb erst 3 zu r addiren, weil man, da 4 in 12 aufgeht, eigentlich von 1200 an die Zahl der mit 2 Nullen endigenden Jahre, in deren zwei ersten Ziffern 4 aufgeht, zu berechen hat, und zwar so, dass man 12 von den zwei ersten Ziffern der Jahrzahl abzieht und mit 4 dividirt. Da man aber 15 statt 12 von den zwei ersten Ziffern der Jahrzahl abzieht, so wird der Rest um 3 zu klein, wesshalb erst 3 zu r, ehe man mit 4 dividirt, addirt werden muss. Z. B. für 1600 ist $r = 16 - 15 = 1$; auch ist $\frac{r+3}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$. Da nun $r - 1 = 1 - 1 = 0$ ist, so wird b nicht vermehrt. Derselbe Quotient 1 für die Division mit 4 in $r + 3$ wird bei Vernachlässigung des Restes auch für 1700, 1800, 1900 erhalten, indem r die Werthe 2, 3, 4 hat. Bei 2000 aber ist $r = 5$, und wir haben $\frac{5+3}{4} = 2$, welcher Quotient auch für 2100, 2200, 2300 gilt. Für 2400, 2500, 2600, 2700 ist 3 der Quotient u. s. w., für je 4 folgende Jahre 1 mehr. Man hat also, nachdem r zu b addirt ist, $\frac{r+3}{4}$, mit Vernachlässigung des Restes abzuziehen. Nun ist aber auch noch die Zahl abzuziehen, welche angibt, wieviel seit 1582 Jahrhunderte, in deren zwei ersten

Ziffern die 3 aufgeht, eingetreten sind; also hat man noch $\frac{r}{3}$ mit Vernachlässigung des Restes zu subtrahiren. Für 16 . . und 17 . . ist $r < 3$, also $\frac{r}{3} < 1$, aber für 18 . ., wo zuerst das Datum des Ostervollmonds um 1 Tag zurückgestellt wird, ist $r = 18 - 15 = 3$ und $\frac{r}{3} = 1$, für 21 . . ist $r = 21 - 15 = 6$ und $\frac{r}{3} = 2$ u. s. w. Es ist demnach:

$$b = 22 + r - \frac{r+3}{4} - \frac{r}{3},$$

welche Formel aber nicht im streng arithmetischen Sinn, sondern so zu verstehen ist, dass die bei den Divisionen mit 4 und 3 bleibenden Reste geradezu wegfallen.

Für die am Schlusse unserer Regel hinzugefügte Bemerkung, dass man statt des 19. April, wenn dieser Tag als Ostervollmond gefunden wird, den 18. April zu nehmen habe, können wir desshalb keinen Beweis geben, weil diese Bestimmung auf reiner Willkühr der Kalendermacher, nämlich darauf beruht, dass man statt des 26. April den 25. als spätestes Datum des Osterfestes angenommen hat. Ist nämlich der 18. April als Ostervollmond ein Sonntag, so ist der 25. das Osterfest, und es würde, wenn man den 19. April als möglichen Tag des Ostervollmonds statuirte, wie wir oben zum Beweise unserer Regel schon thun mussten, dann, wenn dieser Tag als Ostervollmond ein Sonntag ist, das Osterfest am 26. April zu feiern sein. Dass man dies nicht zulässt, ist, wie wir kurz nachweisen wollen, nicht nur nach astronomischer, sondern auch nach cyklischer Berechnung ganz inconsequent.

Die alte Regel, welche für die Osterberechnung noch immer gültig ist, lautet, dass das Fest immer am ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond im Frühling, das heisst nach dem vom 21. März an zuerst eintretenden Vollmond gefeiert werden soll. Hinzugefügt wird die ausdrückliche Bestimmung, die eigentlich in jener Regel schon enthalten ist, dass, wenn der erste Frühlingsvollmond auf einen Sonntag fällt, das Osterfest am nächstfolgenden Sonntag gefeiert werden muss. Also folgt hieraus ganz entschieden, dass, wenn der erste Frühlingsvollmond auf den 19. April fällt, und dieser ein Sonntag ist, Ostern am 26. April gefeiert werden muss. Dass dieser Fall nach astronomischer Rechnung eintreten kann, ist klar. Ist näm-

lich am 20. März Abends Vollmond, so sind von da an gerechnet am 18. April Abends erst 29 Tage verflossen. Also kann, da der mittlere synodische Monat noch über einen halben Tag länger dauert, leicht der erste Frühlingsvollmond auf den 19. April, und wenn dieser ein Sonntag ist, Ostern auf den 26. April fallen. Dasselbe gilt von der cyklischen Berechnung, nach deren für den Gregorianischen Kalender allgemein anerkannten Principien unsere Regel gebildet ist. Wenn nämlich bei der Division mit 30 der Rest 29 bleibt, so gibt derselbe zum 21. März hinzugefügt $(21 + 29 - 31 = 19)$ den 19. April als Ostervollmond, und wenn dieser ein Sonntag ist, den 26. April als das Osterfest. Da bei der früheren Kalendereinrichtung, der Julianischen, die Ostervollmonde durch alle Jahrhunderte hindurch in gleicher, durch die neunzehnjährige Periode geregelter Ordnung wiederkehrten, so gab es statt 30 bloss 19 Data, auf welche die Ostervollmonde fallen konnten, und unter diesen befand sich der 19. April nicht. Es konnte folglich das Osterfest nie auf den 26. April fallen, und es setzte sich als natürliche Folge hiervon die Meinung fest, dass der 25. April das späteste Datum sei, auf welches das Fest fallen könne und dürfe. Wahrscheinlich wagte Lilius, der eigentliche Urheber des Gregorianischen Kalenders, nicht, jener an sich unschädlichen Meinung entgegen zu treten, und accommodirte derselben auch seine Epaktenrechnung, bei welcher, wie die folgende Tabelle zeigt, jedem Datum, auf das der Ostervollmond fallen kann, eine bestimmte Epakte, dem 18. April aber 2 Epakten (XXIV und XXV), von denen die eine (XXIV) eigentlich dem 19. April gehört, zuertheilt sind:

Epakte	Ostervollmond.	Epakte	Ostervollmond.
*(Null od. XXX)	13. April	XV	29. März
I	12. April	XVI	28. März
II	11. April	XVII	27. März
III	10. April	XVIII	26. März
IV	9. April	XIX	25. März
V	8. April	XX	24. März
VI	7. April	XXI	23. März
VII	6. April	XXII	22. März
VIII	5. April	XXIII	21. März
IX	4. April	XXIV	18. April
X	3. April	XXV	18. April
XI	2. April	XXVI	17. April
XII	1. April	XXVII	16. April
XIII	31. März	XXVIII	15. April
XIV	30. März	XXIX	14. April.

Man findet die jedesmalige Epakte, indem man den nach unserer Rechnung bei der Division mit 30 erhaltenen Rest von 23, oder, wenn derselbe zu gross ist, von 53 abzieht. Für den Rest 29, durch dessen Addition zum 21. März man den 19. April als Ostervollmond bekömmt, erhält man durch Subtraction der Zahl 29 von 53 die Epakte XXIV, die demnach offenbar dem 19. April zugehört und bloss durch augenscheinliche Verletzung der in der Bestimmung der Epakten beobachteten Ordnung dem 18. April zuertheilt werden kann.

Es fragt sich nun, und wir möchten die Männer der Wissenschaft um Beantwortung dieser Frage bitten, ob man in unserer aufgeklärten Zeit, noch ferner dem alten Vorurtheil huldigend, die Bestimmung, dass der 25. April der äusserste Termin für das Osterfest sei, beibehalten, oder ob man dem 26. April dies ihm offenbar zukommende Recht einräumen soll. In diesem Jahrhundert, wie auch im vorigen, kann und konnte kein derartiger Fall eintreten, weil da unter den 19 den Ostervollmonden zugehörenden Daten der 19. April, oder unter den von 1700 bis 1899 in Anwendung kommenden 19 Epakten die Epakte XXIV nicht vorkömmt. Im Jahre 1609, in welchem Ostern am 26. April hätte gefeiert werden müssen, wurde es eine Woche früher, am 19. April, gefeiert, da die Epaktenrechnung nach L i l i u s' Einrichtung den 18. April statt des 19. als Ostervollmond aufstellt. Nun tritt erst im Jahr 1981 dieser Fall wieder ein. Hier ist $a=0$ und $b=24$. Es gibt $0+81=81$ mit 19 dividirt den Rest 5, welcher bei Division mit 3 den Rest 2 lässt. Dies mit 20 multiplicirt und 19 (weil so viel der 5 an 24 fehlt) addirt, gibt 59, welches mit 30 dividirt 29 zum Rest lässt. Also ist der Ostervollmond am 19. April $(21+29-31=19)$. Ferner: 4 in 81 geht 20mal; $81+20+5=106$, welches mit 7 dividirt den Rest 1 als Normalzahl von 1981 lässt. Diese 1 vom 20. April abgezogen gibt den 19. April als Sonntagsdatum, so dass der darauf folgende Sonntag, der 26. April, Ostern sein muss. Bis dorthin wird es sich ja wohl entschieden haben, ob die alte langjährige Gewohnheit oder die wissenschaftliche Consequenz Recht behalten soll, wenn nicht etwa unterdessen eine Bestimmung, durch welche das Osterfest vom Monde unabhängig auf ein weniger wandelbares Datum, vielleicht auf den ersten Sonntag im April, festgestellt wird, getroffen worden ist.

§. 7. Die schöne G a u s s i s c h e Regel zur Berechnung des Osterfestes, die aber freilich wegen ziemlich grosser Zahlen, mit

denen man es zu thun bekömmt, nicht ganz bequem ist, lautet bekanntlich:

Man dividirt die Jahrzahl nach einander mit 19, 4 und 7 und nennt die Reste den ersten, zweiten und dritten. Man multiplicirt den ersten Rest mit 19 und addirt eine gewisse Zahl b (die denselben Werth hat wie b bei unserer Regel, für die mit 18 anfangenden Jahrzahlen also 23), dividirt mit 30 und erhält den vierten Rest. Nun addirt man den 2fachen zweiten, den 4fachen dritten und den 6fachen vierten Rest und ausserdem noch eine Zahl c, die von 1582 an 2, von 1700 an 3, von 1800 an 4, von 1900 an 5, von 2100 an 6 ist u. s. w., dividirt mit 7 und erhält so den fünften Rest. Die Summe des vierten und fünften Restes*) addirt man zu 22 und erhält so das Datum im März, oder nach Abzug von 31 das im April, auf welches Ostern fällt.

Es wird von Interesse sein, wenn für diese Regel ein aus der unsrigen abgeleiteter Beweis gegeben wird:

Zunächst ist aus dem früher Bewiesenen klar, dass der vierte Rest diejenige Zahl ist, die man zu 21 addiren muss, um das Datum im März oder nach Abzug von 31 das im April zu erhalten, auf welches der Ostervollmond fällt. Nennen wir den zweiten Rest t, den dritten u und den vierten v, so ist noch zu erweisen, dass der fünfte Rest w, den man erhält, wenn man $2t+4u+6v+c$ mit 7 dividirt, zu $22+v$ addirt das Osterfest gibt. Da $21+v$ das Datum des Ostervollmonds ist, so ist die Zahl z, die wir zu $22+v$ addiren müssen, um das nächste Sonntagsdatum nach dem Ostervollmond, d. h. das Osterfest, zu erhalten, kleiner als 7, und es ist zu beweisen, dass z mit dem Reste, der bei der Division mit 7 in $2t+4u+6v+c$ bleibt, d. h. mit w, identisch ist.

Bezeichnen wir die Zahl der zwei letzten Ziffern der Jahrzahl durch i, so gilt die Gleichung $i=4k+t$; denn t ist der

*) Da der vierte Rest durch eine Division mit 30 und der fünfte durch eine mit 7 entsteht, so kann der Fall eintreten, dass der vierte 29 und der fünfte 6 ist. Da nun:

$$22+29+6-31=26$$

ist, so ist im genannten Fall, z. B. 1981, der 26. April Ostern. Also beweist auch die Gaussische Regel, dass das Fest auf dies Datum fallen kann.

Rest, der bei der Division sowohl der zwei letzten Ziffern (bei welcher Division k der Quotient ist) als auch der ganzen Jahrzahl durch 4 übrig bleibt. Weil n, die Normalzahl des Jahres, der Rest ist, der bleibt, wenn, nachdem man k zu $i = 4k + t$ und dann noch h addirt hat, welches $h = 4$ oder $= 2$ oder $= 0$ oder $= 5$ ist, je nachdem bei Division mit 4 in die Zahl der Jahrhunderte 0 oder 1 oder 2 oder 3 übrig bleibt (§. 2.), die Summe mit 7 dividirt wird, so ist:

$$5k + t + h \equiv n \text{ (mod. 7.)}.$$

Die Bestimmung mod. 7. wollen wir, da im ganzen Beweise nur dieser Modulus vorkömmt, immer weglassen. Jene Congruenz mit 6 multiplicirt gibt:

$$\begin{array}{l} 30k + 6t + 6h \equiv 6n \\ 14k \qquad\qquad \equiv 0 \quad \text{subtrahirt, gibt:} \\ \hline 16k + 6t + 6h \equiv 6n. \end{array}$$

Weil (wegen $i = 4k + t$) $4k = i - t$ und $16k = 4i - 4t$, folglich $16k + 6t = 4i + 2t$ ist, so gilt:

$$4i + 2t + 6h \equiv 6n.$$

Da wir die Zahl, die zu $22 + v$ addirt werden muss, um das Osterfest zu erhalten, z genannt haben, so ist:

$$22 + v + z \equiv 30 - n,$$

weil, wie in §. 4. gezeigt wurde, $30 - n$ ein Sonntagsdatum ist, und das Datum des Osterfestes $(22 + v + z)$ diesem als Sonntagsdatum, wenn es in Tagen des März ausgedrückt wird (z. B. 36. März statt 5. April), für mod. 7. congruent sein muss. Aus letzterer Congruenz folgt:

$$\begin{array}{l} z \equiv 8 - v - n \quad \text{Hierzu} \\ 0 \equiv -7 + 7v + 7n \quad \text{addirt, gibt:} \\ \hline z \equiv 1 + 6v + 6n. \quad \text{Auch war:} \\ 6n \equiv 4i + 2t + 6h. \quad \text{Addirt und } 6n \text{ gehoben:} \\ \hline z \equiv 4i + 2t + 6v + 6h + 1. \end{array}$$

Heisst der Rest, der bei Division der Jahrhunderte (1500, 1600, 1700 u. s. w.) durch 7 bleibt, l, so ist, weil u bei der Division der Jahrzahl mit 7 als Rest bleibt,

$l+i \equiv u$, also $4l+4i \equiv 4u$, und wenn
$0 \equiv 7l$ addirt
und $4l$ gehoben wird: $4i \equiv 4u+3l$.

Auch hatten wir: $z \equiv 4i+2t+6v+6h+1$
Addirt und $4i$ gehoben: $z \equiv 2t+4u+6v+3l+6h+1$.

Wir setzen noch $3l+6h+1 \equiv c$, nämlich c gleich dem Rest, der bei Division mit 7 in $3l+6h+1$ übrig bleibt. Da das darin enthaltene Vielfache von 7 in der letzten Congruenz für z wegfallen darf, so haben wir:

$$z \equiv 2t+4u+6v+c.$$

Daher ist z, welches, wie wir sahen, kleiner als 7 sein muss, der Rest, der bei der Division von $2t+4u+6v+c$ mit 7 übrig bleibt, also $z=w$, was zu beweisen war.

Da l der Rest ist, der bei Division der Jahrhunderte (1500 u. s. w.) mit 7 bleibt, und 100 bei der Division mit 7 den Rest 2 lässt, so wächst l alle 100 Jahre um 2 und $3l$ um 6. Dagegen wächst h in dieser Zeit um 5 und $6h$ um 30 ($=28+2$) oder um 2, wenn in die 100 Jahre 24 Schalttage fallen, da 124 mit 7 dividirt den Rest 5 lässt (vergl. §. 2.). Dagegen wächst h um 6 und $6h$ um 36 ($=35+1$) oder um 1, wenn 25 Schalttage hinein fallen, da 125 mit 7 dividirt den Rest 6 lässt. Da nun c der Rest ist, der durch Division mit 7 in $3l+6h+1$ erhalten wird, so wächst c in 100 Jahren gewöhnlich, d. h. wenn 24 Schalttage hinein fallen, um $6+2=8$ oder um 1. Wenn aber durch das Wachsen der Zahl der Jahrhunderte um 1 eine Zahl, worin die 4 aufgeht, entsteht, z. B. 16 .. aus 15 .., so dass der Schalttag in dem auf zwei Nullen endenden letzten Jahre des Jahrhunderts nicht wegfällt, also 25 Schalttage in die 100 Jahre fallen, so wächst c um $6+1=7$, d. h. um 0, oder es bleibt unverändert.

Für 15 .. haben wir $l=2$, da 1500 mit 7 dividirt den Rest 2 lässt, und $h=5$ (§. 2.); also ist $3l+6h+1=37$, was mit 7 dividirt den Rest 2 lässt. Also ist für 15.. $c=2$ auch

für 16.. ist $c=2$; für 17.. $c=3$
„ 18.. „ $c=4$; „ 19.. $c=5$
„ 20.. „ $c=5$; „ 21.. $c=6$
„ 22.. „ $c=0$; „ 23.. $c=1$
„ 24.. „ $c=1$; „ 25.. $c=2$
„ 26.. „ $c=3$; „ 27.. $c=4$
„ 28.. „ $c=4$; „ 29.. $c=5$

für 30. . ist $c = 6$; für 31. . $c = 0$
„ 32. . „ $c = 0$; „ 33. . $c = 1$
„ 34. . „ $c = 2$; „ 35 . . $c = 3$.

Ausser der Reihe berechnet man c durch die Formel:

$$c \equiv 2 + r - \frac{r+3}{4} \text{ (mod. 7.).}$$

Nennt man nämlich wie in §. 5. r den Rest, den man bekömmt, indem man 15 von den zwei ersten Ziffern der Jahrzahl abzieht, so muss man mit 4 in das um 3 vermehrte r dividiren, den Quotienten mit Vernachlässigung des Restes von $2+r$ abziehen und was herauskömmt mit 7 dividiren. Der Rest ist dann c.

Es gibt nämlich, wie in §. 6. bewiesen wurde, der Quotient $\frac{r+3}{4}$ an, wie viel auf zwei Nullen endigende Jahrzahlen, in deren beiden ersten Ziffern 4 aufgeht, von 1582 an bis zum in Rede stehenden Jahre eintreten. Da nun für diese Jahrzahlen c nicht um 1 vergrössert wird, während dies sonst immer der Fall ist, so muss man zu 2, dem Werth von c für 15 . ., erst r addiren; denn um so viel würde c wachsen, wenn es alle hundert Jahre um 1 wüchse; dann aber muss man $\frac{r+3}{4}$ abziehn, weil hierdurch angegeben wird, wie viel mal das Wachsen um 1 unterbleibt. Zuletzt muss man, da c mit der erhaltenen Zahl congruent ist und kleiner als 7 genommen wird, mit 7 dividiren und den Rest als Werth für c behalten.

b) Für den Julianischen Kalender.

§. 8. Man berechnet den Ostervollmond wie beim Gregorianischen Kalender, nur mit dem Unterschied, dass der Zahlenwerth von b durchgehends 15 ist. Sollte der bei der Division mit 19 bleibende Rest grösser als 15 sein, so muss man jetzt den Unterschied zwischen 15 und jenem Rest nicht addiren, sondern subtrahiren, weil man eigentlich jenen ganzen Rest zu subtrahiren und 15 zu addiren hat. Sollte der Minuend kleiner als der Subtrahend sein, so addirt man vor der Subtraction 30. Nachdem der Ostervollmond gefunden ist, berechnet man die Normalzahl des Jahres so, wie für den Julianischen Kalender gezeigt wurde. Man findet dann durch Abzug derselben vom 30. März oder 20. April die Sonntagsdata, die hier in Betracht kommen können, und erhält das auf den Ostervollmond folgende als das Osterfest.

Es sei z. B. für 1222 das Osterfest zu berechnen. Es ist $a = 3$. Denn $5.12 = 60 = 3.19 + 3$. Nun gibt $3 + 22 = 25$ mit 19 dividirt den Rest 6, was mit 3 dividirt 0 übrig lässt. Wir

haben $20.0 = 0$, und weil der 6 an 15 noch 9 fehlt, haben wir $0+9 = 9$ mit 30 zu dividiren, wobei der Rest 9 ist. Nun ist $21+9 = 30$, d. h. der 30. März ist der Ostervollmond. Ferner: 4 in 22 geht 5mal; $22+5+2-12 = 17$, was mit 7 dividirt den Rest 3 lässt. Da $30-3 = 27$, so ist der 27. März ein Sonntagsdatum, und eine Woche später $(27+7-31 = 3)$ der 3. April das Osterfest.

Nun sei für das Jahr 1537 das Osterfest zu berechnen. Es ist $a = 18$, da $15.5 = 75 = 3.19+18$ ist; $18+37$ oder 55 gibt mit 19 dividirt den Rest 17, was mit 3 dividirt 2 übrig lässt. Von $20.2 = 40$ wird 2 subtrahirt, weil an 17 der 15 noch 2 fehlt, was 38 gibt. Dies mit 30 dividirt lässt 8 als Rest. Also ist der 29. März $(21+8 = 29)$ der Ostervollmond. Ferner: 4 in 37 geht 9mal; $37+9+2-15 = 33$, was mit 7 dividirt den Rest 5 als Normalzahl gibt. Da $30-5 = 25$, so ist der 25. März ein Sonntagsdatum und der folgende Sonntag $(25+7-31 = 1)$, der 1. April, das Osterfest.

Der Beweis für diese Regel ist ganz wie für den Gregorianischen Kalender. Nur ist der Zahlenwerth $b = 15$ nachzuweisen. Da beim neuen Kalender für die mit 15 anfangenden Jahrzahlen $b = 22$ ist, so wäre für den Julianischen, wenn bei diesem bloss der Fehler hinsichtlich der Länge des mittleren tropischen Sonnenjahres in Betracht käme, $b = 12$, weil bei der Kalenderverbesserung jener Fehler 10 Tage betrug. Dadurch aber, dass man 235 synodische Monate genau einem Zeitraum von 19 Julianischen Jahren gleich annahm, liess man in je 310 Jahren jeden Ostervollmond um 1 Tag zu weit vorrücken. Dies war seit Dionysius Exiguus, der die Ostervollmonde richtig bestimmte und eine vom Jahre 532 anfangende, 95 Jahre umfassende Ostertafel aufstellte, welche man später, bloss mit Berücksichtigung des Metonschen 19jährigen Cyklus, fortsetzte, ungefähr 1000 Jahre lang geschehen. Daher waren die Ostervollmonde um die Zeit der Kalenderverbesserung etwas über 3 Tage zu spät angesetzt, und wir müssen folglich, um sie auf diese freilich unrichtige Weise, aber doch dem Julianischen Kalender gemäss, zu erhalten, statt der 12 die Zahl 15 für b nehmen. Da erst durch Dionysius Exiguus, den Urheber unserer Aera, die Principien, auf welche die angegebene Osterberechnung sich stützt, zu allgemeiner Geltung kamen, so kann man für die früheren Jahrhunderte unsere Regel nicht mit Sicherheit gebrauchen. Für die Zeit aber, in welcher der Julianische Kalender hinsichtlich des Osterfestes vollständig geordnet war, geschieht die Berechnung des letzteren nach derselben leicht und sicher.

§. 9. Bei der Erklärung des neuen Testaments ist es an mehreren Stellen von Wichtigkeit, das jüdische Osterfest, von welchem immer der 15. Nisan der Hauptfesttag war, berechnen zu können. Gewöhnlich zwei Tage nach dem wahren Neumond, an dem Tage, wo die Mondsichel Abends im Westen wieder sichtbar wurde, war der erste des neuen Monats, also auch der erste Nisan. Der Vollmond, 15 Tage nach dem wahren Neumond, fiel daher in der Regel auf den 14. Nisan. Um diesen Tag mit Hülfe unserer Regel berechnen zu können, haben wir den Werth von b für das erste christliche Jahrhundert zu ermitteln. Für das sechzehnte Jahrhundert war, dem Gregorianischen Kalender gemäss, $b = 22$. Käme nun bloss der damalige Unterschied von 10 Tagen zwischen dem Julianischen und Gregorianischen Kalender in Betracht, so hätten wir für den Julianischen $b = 12$. Da aber in den 1550 Jahren vom Jahre 32 bis 1582, dem Jahre der Kalenderverbesserung, 5mal 310 Jahre verflossen sind, also die Ostervollmonde in dieser Zeit 5mal um einen Tag hätten zurückgestellt werden müssen, so haben wir statt $b = 12$ zu nehmen $b = 17$. Wenn wir nun nicht den Ostervollmond, den 14. Nisan, sondern den ersten Festtag, den 15. Nisan, berechnen wollen, so nehmen wir statt 17 um 1 mehr, also die Zahl 18. Die Regel zu dieser Berechnung lautet demnach:

Man dividire die Jahrzahl mit 19, multiplicire den Rest mit 20, statt welches Restes man hier (aber nicht im sogleich Folgenden) auch die Zahl nehmen darf, die bei seiner Division mit 3 übrig bleibt, addire noch so viel als dem erstgenannten Rest an 18 fehlt, dividire mit 30 und addire den neuen Rest zu 21. Man erhält dadurch den Tag im März oder nach Abzug von 31 den im April, auf welchen der 15. Nisan fiel.

Es soll z. B. der 15. Nisan für das Jahr 33 gefunden werden: 19 in 33 dividirt lässt 14 zum Rest, was mit 3 dividirt 2 übrig lässt. Zu $20.2 = 40$ wird 4 addirt, weil der 14 an 18 noch 4 fehlt, was 44 gibt; dies mit 30 dividirt lässt 14 übrig. Also haben wir: $21 + 14 - 31 = 4$, d. h. der 4. April war im Jahr 33 der 15. Nisan.

Dies Resultat stimmt ganz mit dem bei Wieseler, Chronologische Synopse, Seite 446, angeführten, durch astronomische Berechnung gewonnenen überein. Auch die anderen dort aufgeführten astronomisch berechneten 8 Osterfeste vom Jahr 28 bis zu 36 nach Chr. Geb. stimmen grösstentheils mit der nach unserer Regel berechneten überein, was auch von den in Wieseler's Chronologie des apostolischen Zeitalters, Seite 115, angeführten astronomisch berechneten 4 Osterfesten gilt. Wo diese Uebereinstimmung nicht statt findet, z. B. im Jahre 32, für

welches die astronomische Rechnung den 14., die cyklische den 15. April ergibt (gerade hier weicht der wahre Vollmond stark vom mittleren ab), beträgt die Differenz höchstens 1 Tag. Bei den für das Osterfest nach unserer Regel gefundenen Daten im April kann man das Resultat als ziemlich sicher ansehen. Unsicher ist aber dasselbe für die in den März bald nach dem 20. März fallenden Data, bei denen je früher sie fallen um so wahrscheinlicher anzunehmen ist, dass das Osterfest 30 Tage später gefeiert wurde. Wenn nämlich zu Ende des Monats Adar bei Besichtigung der Gerstenfelder es sich zeigte, dass um die Mitte des nächstfolgenden Monats die Gerste noch nicht reif sein konnte, so wurde nach dem Adar, noch vor dem Nisan, ein ganzer Monat, der Veadar, eingeschaltet (12 Mondenmonate betragen 354 Tage; die an 365 fehlenden 11 Tage geben in weniger als 3 Jahren wieder einen Monat). Am 16. Nisan begann nämlich mit dem Opfern der aus reifer Gerste gebundenen Erstlingsgarbe die Aernte, die dann bis Pfingsten vollendet sein musste. Abgesehen von dieser Unsicherheit, welche bei der astronomischen Rechnung eben so gut statt findet wie bei der cyklischen, ist die letztere sehr zuverlässig; ja es scheint sogar wegen der Unsicherheit des Wiedererblickens der Mondsichel, dass die cyklische, auf die Metonsche Periode gegründete Berechnung vor der astronomischen den Vorzug verdient. Denn, da Meton bereits im 5. Jahrhundert vor Chr. Geb. gelebt hatte, und die Juden der Beobachtung des Mondlaufs grossen Fleiss und grosses Interesse zuwandten, so scheint es unwahrscheinlich, dass sie die 19jährige Periode nicht gekannt haben sollten, wenn auch diese Kenntniss von den damaligen Schriftstellern nicht erwähnt wird. Wahrscheinlich haben sie ihre Neumonde cyklisch berechnet, aber die Berechnung durch astronomische Beobachtungen, hauptsächlich durch genaues Achtunggeben auf die Wiedererscheinung der Mondsichel, controlirt.

Jedenfalls kann unsere sehr rasch zu bewerkstelligende Berechnung des Osterfestes für ein gegebenes Jahr der neutestamentlichen Exegese von Nutzen sein.

Die beiden sowohl für den Gregorianischen als für den Julianischen Kalender aufgestellten und bewiesenen Regeln zur Berechnung des Wochentags für ein beliebig gegebenes Datum und zur Berechnung des Osterfestes irgend eines Jahres finden nicht bloss im gewöhnlichen Leben, sondern auch beim Studium geschichtlicher und anderer Urkunden mehrfach Anwendung. Dabei sind sie so leicht zu gebrauchen, dass auch mittelmässige Rechner schnell und bequem, selbst wenn sie im Kopfe rechnen, damit zu Stande kommen können.

III.

Ueber zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Ueber den drei Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC, bei dessen Betrachtung wir im Folgenden ganz dasselbe Coordinatensystem zu Grunde legen werden wie in der Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. XVIII., indem wir zugleich hier auf die in dieser Abhandlung und deren Anhange entwickelten Formeln ein für alle Mal verweisen, beschreiben wir gleichseitige Dreiecke ABC', BCA', CAB', entweder sämmtlich nach dem äusseren oder nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin, und wollen nun zunächst die Coordinaten der Spitzen C', A', B' dieser gleichseitigen Dreiecke in Bezug auf das in Rede stehende Coordinatensystem bestimmen, indem wir uns erinnern, dass bei diesem rechtwinkligen Coordinatensysteme der xy der Punkt A der Anfang, AB der positive Theil der Axe der x ist, und der positive Theil der Axe der y von AB an nach der Seite von C oder nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin genommen worden ist. Bekanntlich ist $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite a ist, von welcher Formel wir sogleich Gebrauch machen werden.

Die Coordinaten der Spitze C' des gleichseitigen Dreiecks ABC' sind offenbar:

$$R\sin C, \quad \mp R\sin C.\sqrt{3};$$

wo wir wegen der gebrauchten Bezeichnungen auf die oben genannte Abhandlung verweisen und bemerken, dass wir in allen Formeln und Gleichungen stets die oberen und unteren Vorzeichen den beiden Fällen entsprechen lassen werden, wenn die drei

gleichseitigen Dreiecke sämmtlich nach dem äusseren oder sämmtlich nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin beschrieben worden sind.

Nehmen wir jetzt B als den Anfang und BC als den positiven Theil der ersten Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, in welchem der positive Theil der zweiten Axe von BC an nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin liegt; so sind in diesem Coordinatensysteme die Coordinaten der Spitze A' des gleichseitigen Dreiecks BCA':

$$R\sin A, \quad \mp R\sin A.\sqrt{3};$$

da nun die primitiven Coordinaten von B offenbar $2R\sin C, 0$ sind, und der auf gehörige Weise genommene Winkel, welchen die Richtung BC mit der Richtung AB einschliesst, augenscheinlich 180^0-B zu setzen ist, so sind nach den allgemeinen Formeln der Theorie der Verwandlung der Coordinaten die primitiven Coordinaten von A':

$$2R\sin C+R\sin A\cos(180^0-B)\pm R\sin A.\sqrt{3}.\sin(180^0-B),$$
$$R\sin A\sin(180^0-B)\mp R\sin A.\sqrt{3}.\cos(180^0-B);$$

also:

$$2R\sin C-R\sin A\cos B\pm R\sin A\sin B.\sqrt{3},$$
$$R\sin A\sin B\pm R\sin A\cos B.\sqrt{3};$$

oder:

$$2R\sin C-R\sin A(\cos B\mp\sin B.\sqrt{3}),$$
$$R\sin A(\sin B\pm\cos B.\sqrt{3}).$$

Nehmen wir ferner A als den Anfang und AC als den positiven Theil der ersten Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, in welchem aber der positive Theil der zweiten Axe, um den bei den hier zur Anwendung kommenden allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung in der Ebene gemachten Voraussetzungen, wie es erforderlich ist, zu entsprechen, von AC an nach dem äusseren Raume des Dreiecks ABC hin genommen werden muss; so sind die Coordinaten der Spitze B' des gleichseitigen Dreiecks CAB' in diesem Systeme offenbar:

$$R\sin B, \quad \pm R\sin B.\sqrt{3};$$

und folglich nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten, weil in diesem Falle der von der Richtung AC mit der Richtung AB eingeschlossene, auf gehörige Weise genommene Winkel augenscheinlich A gesetzt werden muss, die primitiven Coordinaten von B':

$$R\sin B\cos A \mp R\sin B.\sqrt{3}.\sin A,$$
$$R\sin B\sin A \pm R\sin B.\sqrt{3}.\cos A;$$

oder:

$$R\sin B(\cos A \mp \sin A.\sqrt{3}),$$
$$R\sin B(\sin A \pm \cos A.\sqrt{3}).$$

Zu besserer Erläuterung der Art und Weise, wie die positiven Theile der Axen der im Vorhergehenden angewandten Coordinatensysteme angenommen worden sind, fügen wir dem Obigen die Figur Taf. I. Fig. 1. bei.

Im Allgemeinen ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden Folgendes:

Wenn man, wie schon erinnert, die oberen und unteren Zeichen stets den beiden Fällen entsprechen lässt, wenn die drei gleichseitigen Dreiecke über den betreffenden Seiten des Dreiecks ABC sämmtlich nach dessen äusserem oder sämmtlich nach dessen innerem Raume hin beschrieben worden sind; so sind in Bezug auf das angenommene primitive System:

Die Coordinaten von A':

$$2R\sin C - R\sin A(\cos B \mp \sin B.\sqrt{3}),$$
$$R\sin A(\sin B \pm \cos B.\sqrt{3}).$$

Die Coordinaten von B':

$$R\sin B(\cos A \mp \sin A.\sqrt{3}),$$
$$R\sin B(\sin A \pm \cos A.\sqrt{3}).$$

Die Coordinaten von C':

$$R\sin C, \quad \mp R\sin C.\sqrt{3}.$$

Bekanntlich ist:

$$\sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{tang} 60^0 = \sqrt{3};$$

also hat man im Allgemeinen die folgenden Formeln:

$$\cos\alpha \mp \sin\alpha.\sqrt{3} = 2\cos(\alpha \pm 60^0),$$
$$\sin\alpha \pm \cos\alpha.\sqrt{3} = 2\sin(\alpha \pm 60^0);$$

und kann folglich die obigen Coordinaten auch auf folgende Art ausdrücken:

Coordinaten von A':

$$2R\{\sin C - \sin A\cos(B \pm 60^0)\},$$
$$2R\sin A\sin(B \pm 60^0).$$

Coordinaten von B':

$$2R\sin B\cos(A\pm 60^0),$$
$$2R\sin B\sin(A\pm 60^0).$$

Coordinaten von C':

$$R\sin C,\quad \mp R\sin C\tan 60^0.$$

Man kann auch die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC mittelst der bekannten Formeln:

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$$

einführen, wodurch man erhält:

Coordinaten von A':

$$c-a\cos(B\pm 60^0),\quad a\sin(B\pm 60^0).$$

Coordinaten von B':

$$b\cos(A\pm 60^0),\quad b\sin(A\pm 60^0).$$

Coordinaten von C':

$$\tfrac{1}{2}c,\quad \mp\tfrac{1}{2}c\tan 60^0.$$

Wenn man nur die Quadratwurzel $\sqrt{3}$ positiv oder negativ — also nicht bloss positiv wie bisher — nimmt, jenachdem die gleichseitigen Dreiecke sämmtlich nach dem äusseren oder sämmtlich nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin beschrieben worden sind; so kann man diese beiden Fälle auch in den folgenden ganz allgemein gültigen Formeln zusammenfassen:

Coordinaten von A':

$$2R\sin C-R\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3}),$$
$$R\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3}).$$

Coordinaten von B':

$$R\sin B(\cos A-\sin A.\sqrt{3}),$$
$$R\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3}).$$

Coordinaten von C':

$$R\sin C,\quad -R\sin C.\sqrt{3}.$$

Von diesen ganz allgemeinen Formeln werden wir im Folgenden vorzugsweise Gebrauch machen.

§. 2.

Wir wollen jetzt die Entfernung CC' bestimmen. Weil die Coordinaten von C und C' respective:

$$2R\cos A\sin B,\quad 2R\sin A\sin B$$

und

$$R\sin C,\quad -R\sin C.\sqrt{3}$$

sind; so ist:

$$CC'^2 = R^2(2\cos A\sin B - \sin C)^2 + R^2(2\sin A\sin B + \sin C.\sqrt{3})^2,$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$CC'^2 = 4R^2\left\{\begin{array}{c}\sin B^2 + \sin C^2 - \cos A\sin B\sin C\\ +\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

$$= 4R^2\left\{\begin{array}{l}\quad\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 - 1\\ +\cos A(\cos A - \sin B\sin C)\\ +\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

$$= 4R^2\left\{\begin{array}{l}\quad\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 - 1\\ -\cos A\cos B\cos C\\ +\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\end{array}\right\}.$$

Nach einer bekannten Relation ist aber:

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = 2(1 + \cos A\cos B\cos C),$$

also ist:

$$CC'^2 = 4R^2\left\{\begin{array}{l}1 + \cos A\cos B\cos C\\ \quad + \sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\end{array}\right\},$$

ein aus A, B, C und R völlig symmetrisch gebildeter Ausdruck. Daher ist offenbar überhaupt:

$$AA' = BB' = CC'$$

$$= 2R\sqrt{1 + \cos A\cos B\cos C + \sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}};$$

die Spitzen A', B', C' der gleichseitigen Dreiecke sind von den Spitzen A, B, C des gegebenen Dreiecks, über dessen Seiten jene beschrieben worden sind, gleich weit entfernt, und die gemeinschaftliche Entfernung wird durch die vorstehende merkwürdige Formel bestimmt.

§. 3.

Wir suchen nun die Gleichungen der Linien

$$AA',\quad BB',\quad CC'.$$

Die Gleichung von AA' ist nach §. 1.:

$$y=\frac{\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})}{2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})}x,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})x\\ -\{2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})\}y\end{array}\right\}=0.$$

Die Gleichung von BB' ist nach §. 1.:

$$y=\frac{\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3})}{\sin B(\cos A-\sin A.\sqrt{3})-2\sin C}(x-2R\sin C),$$

oder:

$$\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3})x-\{\sin B(\cos A-\sin A.\sqrt{3})-2\sin C\}y$$
$$=2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}).$$

Die Gleichung von CC' ist nach §. 1.:

$$y-2R\sin A\sin B=\frac{2\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3}}{2\cos A\sin B-\sin C}(x-2R\cos A\sin B),$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$(2\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3})x-(2\cos A\sin B-\sin C)y$$
$$=2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}).$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Linien BB' und CC' durch X, Y; so hat man zu deren Bestimmung nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen:

$$(2\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3})X-(2\cos A\sin B-\sin C)Y$$
$$=2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}),$$

$$\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3})X-\{\sin B(\cos A-\sin A.\sqrt{3})-2\sin C\}Y$$
$$=2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}).$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man eine Gleichung, in welcher der Coefficient von X ist:

$$\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3}-\cos A\sin B.\sqrt{3}$$
$$=\sin A\sin B+\sin(A+B).\sqrt{3}-\cos A\sin B.\sqrt{3}$$
$$=\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3});$$

der Coefficient von Y in derselben Gleichung ist:

$$-\cos A\sin B+\sin C-\sin A\sin B.\sqrt{3}-2\sin C$$
$$=-\cos A\sin B+\sin(A+B)-\sin A\sin B.\sqrt{3}-2\sin C$$
$$=\quad\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})-2\sin C.$$

lso ist die durch Subtraction der beiden obigen Gleichungen ervorgehende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})X \\ -\{2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})\}Y\end{array}\right\}=0.$$

ergleicht man dies mit dem Obigen, so sieht man, dass X, Y e Gleichung von AA' befriedigen, dass also der Durchschnitts-ınkt von BB', CC' in AA' liegt, oder dass die drei Geraden A', BB', CC' sich in einem Punkte schneiden, welches uns uf den folgenden Satz führt:

Satz.

Die drei Linien AA', BB', CC' schneiden sich in inem Punkte, mögen die drei gleichseitigen Dreiecke ABC', BCA', CAB' über den Seiten AB, BC, CA es Dreiecks ABC sämmtlich nach dem äusseren oder ämmtlich nach dem inneren Raume dieses Dreiecks in beschrieben sein.

§. 4.

Zwischen den Coordinaten X, Y des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Geraden AA', BB', CC' haben wir daher die drei folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})X \\ -\{2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})\}Y\end{array}\right\}=0,$$

$$\begin{array}{l}(2\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3})X-(2\cos A\sin B-\sin C)Y \\ \qquad =2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}),\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3})X-\{\sin B(\cos A-\sin A.\sqrt{3})-2\sin C\}Y \\ \qquad =2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3}).\end{array}$$

Zur Bestimmung von X, Y benutzen wir die beiden ersten ieser drei Gleichungen.

Durch Elimination von Y aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{l}(2\sin A\sin B+\sin C.\sqrt{3})[2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})] \\ -\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})(2\cos A\sin B-\sin C)\end{array}\right\}X$$
$$=2R\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3})\{2\sin C-\sin A(\cos B-\sin B.\sqrt{3})\}.$$

$$\sin C + 2\sin B\cos(A\mp 60^0) = \frac{c + 2b\cos(A\mp 60^0)}{2R};$$

also ist offenbar:

$$X = \frac{2Rbc\sin(A\pm 60^0)\{c + 2b\cos(A\mp 60^0)\}}{3abc + R(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}},$$

$$Y = \frac{4Rabc\sin(A\pm 60^0)\sin(B\pm 60^0)}{3abc + R(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}.$$

Bezeichnet Δ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, so bekanntlich:

$$R = \frac{abc}{4\Delta};$$

also, wenn man diesen Ausdruck in die obigen Formeln einfü

$$X = \frac{2bc\sin(A\pm 60^0)\{c + 2b\cos(A\mp 60^0)\}}{12\Delta + (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}},$$

$$Y = \frac{4abc\sin(A\pm 60^0)\sin(B\pm 60^0)}{12\Delta + (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}.$$

§. 5.

Das Quadrat der Entfernung des Punktes (XY) von Punkte A ist:

$$X^2 + Y^2.$$

Entwickelt man nun die Grösse

$$\sin A^2(\sin B + \cos B.\sqrt{3})^2 + \{\sin C + \sin B(\cos A + \sin A.\sqrt{3})\}$$

so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$\begin{aligned}
&3\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\sin B\sin C\\
&+ 2\sin A\sin B(\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sqrt{3}\\
&+ 2\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\\
= \;&2 + \sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\sin B\sin C\\
&- 2\cos A^2 + 4\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\\
= \;&2 + \sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 - 2\cos A(\cos A - \sin B\sin C)\\
&+ 4\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\\
= \;&2 + \sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\{\cos(B + C) + \sin B\sin\\
&+ 4\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\\
= \;&2 + \sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 + 2\cos A\cos B\cos C\\
&+ 4\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3},
\end{aligned}$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

ist:

$$4(1 + \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \sin C . \sqrt{3}).$$

Bezeichnen wir die bekanntlich gleichen Entfernungen AA', BB', CC' durch E, so ist nach §. 2.:

$$E = 2R\sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \sin C . \sqrt{3}};$$

und wenn wir nun die Entfernungen des Punktes (XY) von den Punkten A, B, C durch E_A, E_B, E_C bezeichnen, so ist nach Vorstehendem und nach §. 4. offenbar, wenn wir zugleich die Zeichen gehörig vertauschen:

$$E_A^2 = E^2 \frac{\sin B^2 \sin C^2 (\sin A + \cos A . \sqrt{3})^2}{\{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2},$$

$$E_B^2 = E^2 \frac{\sin C^2 \sin A^2 (\sin B + \cos B . \sqrt{3})^2}{\{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2},$$

$$E_C^2 = E^2 \frac{\sin A^2 \sin B^2 (\sin C + \cos C . \sqrt{3})^2}{\{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2}.$$

Wir wollen jetzt:

$$E_A' = E \frac{\sin B \sin C (\sin A + \cos A . \sqrt{3})}{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}},$$

$$E_B' = E \frac{\sin C \sin A (\sin B + \cos B . \sqrt{3})}{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}},$$

$$E_C' = E \frac{\sin A \sin B (\sin C + \cos C . \sqrt{3})}{3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}}$$

setzen. Nach bekannten Relationen ist:

$$\begin{aligned} & \sin B \sin C (\sin A + \cos A . \sqrt{3}) \\ & + \sin C \sin A (\sin B + \cos B . \sqrt{3}) \\ & + \sin A \sin B (\sin C + \cos C . \sqrt{3}) \\ = \; & 3 \sin A \sin B \sin C \\ & + (\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C)\sqrt{3} \\ = \; & 3 \sin A \sin B \sin C \\ & + (\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2) . \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ = \; & 3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}, \end{aligned}$$

was nach dem Obigen unmittelbar zu der bemerkenswerthen Relation:

$$E_A' + E_B' + E_C' = E$$

führt.

Natürlich kann man die obigen Formeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$E_A^2 = 4E^2 \frac{\sin B^2 \sin C^2 \sin(A \pm 60^0)^2}{\{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2},$$

$$E_B^2 = 4E^2 \frac{\sin C^2 \sin A^2 \sin(B \pm 60^0)^2}{\{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2},$$

$$E_C^2 = 4E^2 \frac{\sin A^2 \sin B^2 \sin(C \pm 60^0)^2}{\{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}\}^2};$$

und:

$$E_A' = 2E \frac{\sin B \sin C \sin(A \pm 60)}{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}},$$

$$E_B' = 2E \frac{\sin C \sin A \sin(B \pm 60^0)}{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}},$$

$$E_C' = 2E \frac{\sin A \sin B \sin(C \pm 60^0)}{3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}}.$$

Weil nach dem Obigen:

$$4(1 + \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \sin C.\sqrt{3})$$

$$= \sin A^2(\sin B + \cos B.\sqrt{3})^2 + \{\sin C + \sin B(\cos A + \sin A.\sqrt{3})\}^2$$

ist, so ist

$$1 + \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \sin C.\sqrt{3}$$

stets, man mag $\sqrt{3}$ positiv oder negativ nehmen, eine positive Grösse. Nimmt man nun zuerst $\sqrt{3}$ positiv, so ist

$$1 + \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \sin C.\sqrt{3},$$

und folglich, wenn man mit dem positiven $\sqrt{3}$ multiplicirt, auch

$$(1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3} + 3\sin A \sin B \sin C$$

oder

$$3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}$$

positiv. Nimmt man $\sqrt{3}$ negativ, so ist nach dem Obigen

$$1 + \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C.\sqrt{3},$$

wo nun $\sqrt{3}$ positiv zu nehmen ist, eine positive Grösse; also ist, wenn man mit dem positiv genommenen $\sqrt{3}$ multiplicirt, auch

$$(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}-3\sin A\sin B\sin C$$

ositiv, folglich

$$3\sin A\sin B\sin C-(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}$$

egativ. Hiernach ist also der Nenner

$$3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}$$

tets positiv oder negativ, jenachdem man $\sqrt{3}$ positiv oder negav nimmt.

Betrachten wir nun die Grössen E_A und E_A' näher, welche Betrachtung sich dann in gleicher Weise natürlich auch auf E_B und E_B' und auf E_C und E_C' ohne Weiteres anwenden lässt.

Wenn die gleichseitigen Dreiecke sämmtlich nach dem äusseren Raume des Dreiecks ABC hin beschrieben sind, muss man n den obigen Formeln die oberen Zeichen und $\sqrt{3}$ positiv nehmen, wo also der Nenner positiv ist. Weil

$$0<A<180^0$$

ist, so ist

$$60^0<A+60^0<240^0,$$

also $\sin(A+60^0)$ positiv oder negativ, jenachdem $A+60^0$ zwischen 60^0 und 180^0 oder zwischen 180^0 und 240^0, jenachdem also A zwischen 0 und 120^0 oder zwischen 120^0 und 180^0 liegt. Weil nun der Nenner positiv ist und auch $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ nur positiv sein können, so muss man offenbar

$$E_A=\pm E_A'$$

setzen, und das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem A zwischen 0 und 120^0 oder zwischen 120^0 und 180^0 liegt. Nimmt man aber E_A nicht, wie bisher, bloss positiv, sondern positiv oder negativ, jenachdem A zwischen 0 und 120^0 oder zwischen 120^0 und 180^0 liegt, so kann man allgemein

$$E_A=E_A'$$

setzen. Das Gleiche gilt natürlich auch von E_B und E_B' und von E_C und E_C'. Wenn man also

$$E_A,\quad E_B,\quad E_C$$

positiv oder negativ nimmt, jenachdem die entsprechenden Winkel

$$A,\quad B,\quad C$$

jeder natürlich für sich, zwischen 0 und 120° oder zwischen 120° und 180° liegen, so ist allgemein:

$$E_A = E_A', \quad E_B = E_B', \quad E_C = E_C';$$

und nach dem Obigen folglich:

$$E_A + E_B + E_C = E$$

zu setzen.

Wenn die gleichseitigen Dreiecke sämmtlich nach dem inneren Raume des Dreiecks ABC hin beschrieben sind, muss man in den obigen Formeln die unteren Zeichen und $\sqrt{3}$ negativ nehmen, wo also der Nenner negativ ist. Weil

$$0 < A < 180^0$$

ist, so ist:

$$-60^0 < A - 60^0 < 120^0,$$

also $\sin(A-60^0)$ negativ oder positiv, jenachdem $A-60^0$ zwischen -60^0 und 0 oder zwischen 0 und 120^0, jenachdem also A zwischen 0 und 60^0 oder zwischen 60^0 und 180^0 liegt. Weil nun der Nenner negativ ist, und $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ nur positiv sein können, so muss man offenbar

$$E_A = \pm E_A'$$

setzen, und das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem A zwischen 0 und 60^0 oder zwischen 60^0 und 180^0 liegt. Nimmt man aber E_A nicht, wie bisher, bloss positiv, sondern positiv oder negativ, jenachdem A zwischen 0 und 60^0 oder zwischen 60^0 und 180^0 liegt, so kann man allgemein

$$E_A = E_A'$$

setzen. Das Gleiche gilt natürlich auch von E_B und E_B' und von E_C und E_C'. Wenn man also

$$E_A, \quad E_B, \quad E_C$$

positiv oder negativ nimmt, jenachdem die entsprechenden Winkel

$$A, \quad B, \quad C$$

natürlich jeder für sich, zwischen 0 und 60^0 oder zwischen 60^0 und 180^0 liegen, so ist allgemein

$$E_A = E_A', \quad E_B = E_B', \quad E_C = E_C';$$

und nach dem Obigen folglich:

$$E_A + E_B + E_C = E.$$

Wenn

$$0 < A < 120^0,$$
$$0 < B < 120^0,$$
$$0 < C < 120^0$$

t, so ist:

$$0 < A + B + C < 360^0,$$

orin kein Widerspruch liegt.

Wenn

$$120^0 < A < 180^0,$$
$$120^0 < B < 180^0$$

st, so ist

$$240^0 < A + B < 360^0,$$

as nicht möglich ist; daher können nie zwei der Winkel A, B, C zwischen 120^0 und 180^0 liegen.

Wenn

$$0 < A < 60^0,$$
$$0 < B < 60^0,$$
$$0 < C < 60^0$$

ist, so ist

$$0 < A + B + C < 180^0,$$

in kein Widerspruch liegt.

Wenn

$$60^0 < A < 180^0,$$
$$60^0 < B < 180^0,$$
$$60^0 < C < 180^0$$

st, so ist

$$180^0 < A + B + C < 540^0,$$

as nicht möglich ist; also können nie alle drei Winkel A, B, C zwischen 60^0 und 180^0 liegen.

Den Nenner

$$3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}$$

ann man noch auf eine andere bemerkenswerthe Art ausdrücken.

Es ist nämlich:

$$4\sin A\sin B\sin C = 2\cos(A-B)\sin C - 2\cos(A+B)\sin C$$
$$= \sin(A-B+C)+\sin(-A+B+C)$$
$$-\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)$$
$$=\sin(-A+B+C)+\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C),$$

$$4\cos A\cos B\cos C = 2\cos(A-B)\cos C + 2\cos(A+B)\cos C$$
$$= \cos(A-B+C)+\cos(-A+B+C)$$
$$+\cos(A+B+C)+\cos(A+B-C)$$
$$=-1+\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C).$$

Also ist:

$$\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}+(1+\cos A\cos B\cos C)$$
$$= \tfrac{1}{4}\{\sin(-A+B+C)+\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)\}\sqrt{3}$$
$$+1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\{\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)\}$$
$$= \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\sin(-A+B+C)\operatorname{tang}60^0+\cos(-A+B+C)\\ +\sin(A-B+C)\operatorname{tang}60^0+\cos(A-B+C)\\ +\sin(A+B-C)\operatorname{tang}60^0+\cos(A+B-C)\end{array}\right\}$$
$$= \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\cos(-A+B+C-60^0)\\ +\cos(A-B+C-60^0)\\ +\cos(A+B-C-60^0)\end{array}\right\}$$
$$= \tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\{\cos(2A+60^0)+\cos(2B+60^0)+\cos(2C+60^0)\},$$

weil

$$-A+B+C-60^0=180^0-(2A+60^0),$$
$$A-B+C-60^0=180^0-(2B+60^0),$$
$$A+B-C-60^0=180^0-(2C+60^0)$$

ist.

Ferner ist:

$$\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}-(1+\cos A\cos B\cos C)$$
$$= \tfrac{1}{4}\{\sin(-A+B+C)+\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)\}\sqrt{3}$$
$$-1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\{\cos(-A+B+C)+\cos(A-B+C)+\cos(A+B-C)\}$$
$$=-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\sin(-A+B+C)\operatorname{tang}60^0-\cos(-A+B+C)\\ +\sin(A-B+C)\operatorname{tang}60^0-\cos(A-B+C)\\ +\sin(A+B-C)\operatorname{tang}60^0-\cos(A+B-C)\end{array}\right\}$$

$$=-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\cos(-A+B+C+60^0)\\+\cos(A-B+C+60^0)\\+\cos(A+B-C+60^0)\end{array}\right\}$$

$$=-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\{\cos(2A-60^0)+\cos(2B-60^0)+\cos(2C-60^0)\},$$

weil

$$\begin{aligned}-A+B+C+60^0&=180^0-(2A-60^0),\\A-B+C+60^0&=180^0-(2B-60^0),\\A+B-C+60^0&=180^0-(2C-60^0)\end{aligned}$$

ist.

Folglich ist:

$$\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}\pm(1+\cos A\cos B\cos C)$$
$$=\pm\tfrac{3}{4}\mp\tfrac{1}{2}\{\cos(2A\pm60^0)+\cos(2B\pm60^0)+\cos(2C\pm60^0)\},$$

also:

$$3\sin A\sin B\sin C\pm(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}$$
$$=\pm\{\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}[\cos(2A\pm60^0)+\cos(2B\pm60^0)+\cos(2C\pm60^0)]\}\sqrt{3},$$

und wenn man $\sqrt{3}$ nach den obigen Regeln positiv und negativ nimmt, allgemein:

$$3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}$$
$$=\{\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}[\cos(2A\pm60^0)+\cos(2B\pm60^0)+\cos(2C\pm60^0)]\}\sqrt{3}.$$

Es ist aber:

$$\cos(2A\pm60^0)+\cos(2B\pm60^0)+\cos(2C\pm60^0)$$
$$=2\cos(A+B\pm60^0)\cos(A-B)+1-2\sin(C\pm30^0)^2,$$

also, weil

$$(A+B\pm60^0)+(C\pm30^0)=\left\{\begin{array}{l}270^0\\90^0\end{array}\right.,$$

folglich

$$A+B\pm60^0=\left\{\begin{array}{l}270^0-(C+30^0)\\90^0-(C-30^0)\end{array}\right.,$$

und daher

$$\cos(A+B\pm60^0)=\mp\sin(C\pm30^0)$$

ist:

$$\begin{aligned}&\cos(2A\pm60^0)+\cos(2B\pm60^0)+\cos(2C\pm60^0)\\&=1\mp2\sin(C\pm30^0)\cos(A-B)-2\sin(C\pm30^0)\\&=1\mp2\{\cos(A-B)\pm\sin(C\pm30^0)\}\sin(C\pm30^0)\\&=1\mp2\{\cos(A-B)+\cos(C\mp60^0)\}\sin(C\pm30^0),\end{aligned}$$

weil

$$C \pm 30^0 = (C \mp 60^0) \pm 90^0,$$

und folglich

$$\sin(C \pm 30^0) = \pm \cos(C \mp 60^0)$$

ist. Also ist:

$$\cos(2A \pm 60^0) + \cos(2B \pm 60^0) + \cos(2C \pm 60^0)$$
$$= 1 \mp 4\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C \mp 60^0)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C \mp 60^0)\sin(C \pm 30^0)$$
$$= 1 \mp 4\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C \mp 60^0)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C \mp 60^0)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C \mp 60^0),$$

weil

$$(C \pm 30^0) + \tfrac{1}{2}(A+B-C \mp 60^0) = \tfrac{1}{2}(A+B+C) = 90^0,$$

und folglich

$$\sin(C \pm 30^0) = \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C \mp 60^0)$$

ist. Also ist der obige Nenner auch:

$$\{\tfrac{1}{4} \pm 2\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C \mp 60^0)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C \mp 60^0)$$
$$\times \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C \mp 60^0)\}\sqrt{3},$$

die Quadratwurzel $\sqrt{3}$ immer nach den obigen Regeln gehörig positiv und negativ genommen. Wollte man die Quadratwurzel nur positiv nehmen, so müsste man den Nenner schreiben:

$$\pm\{\tfrac{1}{4} \pm 2\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C \mp 60^0)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C \mp 60^0)$$
$$\times \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C \mp 60^0)\}\sqrt{3}.$$

Weil

$$\{\cos(2A-60^0)+\cos(2B-60^0)+\cos(2C-60^0)\}$$
$$-\{\cos(2A+60^0)+\cos(2B+60^0)+\cos(2C+60^0)\}$$
$$= 2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\sin 60^0$$
$$= (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\sqrt{3}$$

und nach einer bekannten leicht zu beweisenden Relation:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

ist, so ist:

$$\{\cos(2A-60^0)+\cos(2B-60^0)+\cos(2C-60^0)\}$$
$$-\{\cos(2A+60^0)+\cos(2B+60^0)+\cos(2C+60^0)\}$$
$$= 4\sqrt{3}.\sin A \sin B \sin C,$$

$$= -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos(-A+B+C+60^0) \\ +\cos(A-B+C+60^0) \\ +\cos(A+B-C+60^0) \end{array}\right\}$$

$$= -\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\{\cos(2A-60^0) + \cos(2B-60^0) + \cos(2C-60^0)\},$$

weil

$$\begin{aligned} -A+B+C+60^0 &= 180^0 - (2A-60^0), \\ A-B+C+60^0 &= 180^0 - (2B-60^0), \\ A+B-C+60^0 &= 180^0 - (2C-60^0) \end{aligned}$$

ist.

Folglich ist:

$$\sin A \sin B \sin C.\sqrt{3} \pm (1 + \cos A \cos B \cos C)$$
$$= \pm\tfrac{3}{4} \mp \tfrac{1}{2}\{\cos(2A\pm 60^0) + \cos(2B\pm 60^0) + \cos(2C\pm 60^0)\},$$

also:

$$3\sin A \sin B \sin C \pm (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}$$
$$= \pm\{\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}[\cos(2A\pm 60^0) + \cos(2B\pm 60^0) + \cos(2C\pm 60^0)]\}\sqrt{3},$$

und wenn man $\sqrt{3}$ nach den obigen Regeln positiv und negativ nimmt, allgemein:

$$3\sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C)\sqrt{3}$$
$$= \{\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}[\cos(2A\pm 60^0) + \cos(2B\pm 60^0) + \cos(2C\pm 60^0)]\}\sqrt{3}.$$

Es ist aber:

$$\cos(2A\pm 60^0) + \cos(2B\pm 60^0) + \cos(2C\pm 60^0)$$
$$= 2\cos(A+B\pm 60^0)\cos(A-B) + 1 - 2\sin(C\pm 30^0)^2,$$

also, weil

$$(A+B\pm 60^0) + (C\pm 30^0) = \left\{\begin{array}{c} 270^0 \\ 90^0 \end{array}\right.,$$

folglich

$$A+B\pm 60^0 = \left\{\begin{array}{l} 270^0 - (C+30^0) \\ 90^0 - (C-30^0) \end{array}\right.,$$

und daher

$$\cos(A+B\pm 60^0) = \mp\sin(C\pm 30^0)$$

ist:

$$\cos(2A\pm 60^0) + \cos(2B\pm 60^0) + \cos(2C\pm 60^0)$$
$$= 1 \mp 2\sin(C\pm 30^0)\cos(A-B) - 2\sin(C\pm 30^0)$$
$$= 1 \mp 2\{\cos(A-B) \pm \sin(C\pm 30^0)\}\sin(C\pm 30^0)$$
$$= 1 \mp 2\{\cos(A-B) + \cos(C\mp 60^0)\}\sin(C\pm 30^0),$$

wo nun natürlich $\sqrt{3}$ positiv ist, eine negative Grösse, was wir oben schon auf andere Art erkannt haben.

Dass

$$3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}$$

mit positiv genommener Quadratwurzel $\sqrt{3}$ positiv ist, versteht sich von selbst, weil offenbar

$$\sin A\sin B\sin C \quad \text{und} \quad 1+\cos A\cos B\cos C$$

jederzeit positive Grössen sind.

Da die Kenntniss des Vorzeichens des Nenners in unseren obigen Ausdrücken von E_A', E_B', E_C' hier von ganz besonderer Wichtigkeit ist, schien es uns zweckmässig, die vorstehende, an sich instructive Darstellung der früheren noch beizufügen.

§. 6.

Wir wollen nun, indem wir den Punkt (XY) durch O bezeichnen, den 180° nicht übersteigenden Winkel AOB des gleich bezeichneten Dreiecks zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende nehmen wir den Punkt B als den Anfang und BA als den positiven Theil der ersten Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, in welchem der positive Theil der zweiten Axe von BA an nach C hin liegt, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten von O oder (XY) durch X', Y'. Dann haben wir nach §. 4. die folgenden Formeln:

$$X=R\frac{\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3})\{\sin C+\sin B(\cos A+\sin A.\sqrt{3})\}}{3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}},$$

$$Y=R\frac{\sin A\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3})(\sin B+\cos B.\sqrt{3})}{3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}};$$

und:

$$X'=R\frac{\sin A\sin C(\sin B+\cos B.\sqrt{3})\{\sin C+\sin A(\cos B+\sin B.\sqrt{3})\}}{3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}},$$

$$Y'=R\frac{\sin A\sin B\sin C(\sin A+\cos A.\sqrt{3})(\sin B+\cos B.\sqrt{3})}{3\sin A\sin B\sin C+(1+\cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}};$$

also:

$$\frac{X}{Y}=\frac{\sin C+\sin B(\cos A+\sin A.\sqrt{3})}{\sin A(\sin B+\cos B.\sqrt{3})},\quad \frac{X'}{Y'}=\frac{\sin C+\sin A(\cos B+\sin B.\sqrt{3})}{\sin B(\sin A+\cos A.\sqrt{3})}.$$

Entwickelt man nun

$$\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'},$$

so ergiebt sich als Zähler:

$$\sin B(\sin A + \cos A.\sqrt{3})\{\sin C + \sin B(\cos A + \sin A.\sqrt{3})\}$$
$$+ \sin A(\sin B + \cos B.\sqrt{3})\{\sin C + \sin A(\cos B + \sin B.\sqrt{3})\}$$
$$= 2\sin A\sin B\sin C + \cos A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$+ \sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$+ \sin B^2(\sin A + \cos A.\sqrt{3})(\cos A + \sin A.\sqrt{3})$$
$$+ \sin A^2(\sin B + \cos B.\sqrt{3})(\cos B + \sin B.\sqrt{3})$$
$$= 2\sin A\sin B\sin C + \sin C^2.\sqrt{3}$$
$$+ 4\sin A\cos A\sin B^2 + \sin B^2.\sqrt{3}$$
$$+ 4\sin B\cos B\sin A^2 + \sin A^2.\sqrt{3}$$
$$= 6\sin A\sin B\sin C + (\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)\sqrt{3}$$
$$= 6\sin A\sin B\sin C + 2(1 + \cos A\cos B\cos C)\sqrt{3},$$

nach einer bekannten Relation. Also ist:

$$\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'} = \frac{2\{3\sin A\sin B\sin C + (1 + \cos A\cos B\cos C)\sqrt{3}\}}{\sin A\sin B(\sin A + \cos A.\sqrt{3})(\sin B + \cos B.\sqrt{3})}.$$

Entwickelt man ferner

$$1 - \frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'},$$

so ergiebt sich als Zähler:

$$\sin A\sin B(\sin A + \cos A.\sqrt{3})(\sin B + \cos B.\sqrt{3})$$
$$-\{\sin C + \sin A(\cos B + \sin B.\sqrt{3})\}\{\sin C + \sin B(\cos A + \sin A.\sqrt{3})\}$$
$$= \sin A^2\sin B^2 + 3\sin A\cos A\sin B\cos B + \sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$-\sin C^2 - \sin A\sin C(\cos B + \sin B.\sqrt{3})$$
$$-\sin B\sin C(\cos A + \sin A.\sqrt{3})$$
$$-\sin A\sin B(\cos A + \sin A.\sqrt{3})(\cos B + \sin B.\sqrt{3})$$
$$= -2\sin A^2\sin B^2 + 2\sin A\cos A\sin B\cos B - 2\sin C^2$$
$$-2\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$= -2\sin A\sin B\cos C - 2\sin C^2 - 2\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$= -2 + 2\cos C(\cos C - \sin A\sin B) - 2\sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}$$
$$= -2(1 + \cos A\cos B\cos C + \sin A\sin B\sin C.\sqrt{3}),$$

wo nun ...
oben schon ...

Dah...

mit positiv...
sich von ...

jederzeit po...

Da die ...
obigen Ausdr...
Wichtigkeit ...
sich instru...

Wir ...
zeichnen...
bezeichn...

Zu ...
BA als ...
Coordinat...
ten Axe...
Systeme...
haben wi...

$X = R$ ...

$Y = R$ ...

und:

$X' = R$ ...

$Y' = R \frac{\sin}{}$ ...

also:

$\frac{X}{Y'} = \frac{\sin C + \ldots}{\sin A \ldots}$

glich:

$$\angle AOB = 120^0.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 3. der Punkt O in dem
ume A_1AM liegt, so ist:

$$X = -AD,\ Y = +DO;\ X' = +BD,\ Y' = +DO;$$

so:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1+\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}} = -\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}} = \frac{\frac{BD}{DO}-\frac{AD}{DO}}{1+\frac{BD}{DO}\cdot\frac{AD}{DO}}$$

$$= \operatorname{tang}(BOD - AOD) = \operatorname{tang} AOB = -\sqrt{3},$$

lglich:

$$\angle AOB = 120^0,$$

as ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein
ann; daher kann der Punkt O in dem Raume A_1AM nicht liegen.

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 4. der Punkt O in dem
Raume B_1BN liegt, so ist:

$$X = +AD,\ Y = +DO;\ X' = -BD,\ Y' = +DO;$$

lso:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}} = \frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}} = \operatorname{tang}(AOD-BOD) = \operatorname{tang} AOB = -\sqrt{3},$$

lglich:

$$\angle AOB = 120^0,$$

as ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein
ann; daher kann der Punkt O in dem Raume B_1BN nicht liegen.

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 5. der Punkt O in dem
aume $M'ABN'$ liegt, so ist:

$$X = +AD,\ Y = -DO;\ X' = +BD,\ Y' = -DO;$$

so:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\frac{X'}{Y'}} = -\frac{\frac{AD}{DO}+\frac{BD}{DO}}{1-\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}} = -\operatorname{tang}(AOD+BOD)$$

$$= -\operatorname{tang} AOB = -\sqrt{3},$$

folglich:

$$\tang AOB=\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB=60^\circ.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 6. der Punkt O in dem Raume A_1AM' liegt, so ist:

$$X=-AD,\ \ Y=-DO;\ \ X'=+BD,\ \ Y'=-DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=-\frac{\frac{BD}{DO}-\frac{AD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}$$

$$=-\tang(BOD-AOD)=-\tang AOB=-\sqrt{3},$$

folglich:

$$\tang AOB=\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB=60^\circ.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 7. der Punkt O in dem Raume B_1BN' liegt, so ist:

$$X=+AD,\ \ Y=-DO;\ \ X'=-BD,\ \ Y'=-DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=-\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=-\tang(AOD-BOD)$$

$$=-\tang AOB=-\sqrt{3},$$

folglich:

$$\tang AOB=\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB=60^\circ.$$

Als allgemeines Resultat ergiebt sich aus dieser Betrachtung das folgende:

Der Punkt O kann nur oberhalb AB, also auf einer Seite von AB mit dem Dreiecke ABC, in dem Raume $MABN$, oder unterhalb AB, also auf entgegengesetzter Seite von AB mit dem

Dreiecke ABC, liegen; im ersten Falle ist $\angle AOB = 120^0$, im zweiten Falle ist $\angle AOB = 60^0$.

Wir wollen ferner den zweiten der beiden obigen in Rede stehenden Fälle, in welchem $\sqrt{3}$ negativ zu nehmen, und nach dem Obigen also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=\sqrt{3}$$

zu setzen ist, betrachten.

Wenn wieder mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 2. der Punkt O in dem Raume $MABN$ liegt, so ist:

$$X=+AD,\quad Y=+DO;\quad X'=+BD,\quad Y'=+DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=\frac{\frac{AD}{DO}+\frac{BD}{DO}}{1-\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=\operatorname{tang}(AOD+BOD)$$

$$=\operatorname{tang} AOB=\sqrt{3},$$

folglich:

$$\angle AOB=60^0.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 3. der Punkt O in dem Raume A_1AM liegt, so ist:

$$X=-AD,\quad Y=+DO;\quad X'=+BD,\quad Y'=+DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=-\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=\frac{\frac{BD}{DO}-\frac{AD}{DO}}{1+\frac{BD}{DO}\cdot\frac{AD}{DO}}$$

$$=\operatorname{tang}(BOD-AOD)=\operatorname{tang} AOB=\sqrt{3},$$

folglich:

$$\angle AOB=60^0.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 4. der Punkt O in dem Raume B_1BN liegt, so ist:

$$X=+AD,\quad Y=+DO;\quad X'=-BD,\quad Y'=+DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=\operatorname{tang}(AOD-BOD)$$

$$=\operatorname{tang} AOB=\sqrt{3},$$

folglich:

$$\angle AOB=60^{\circ}.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 5. der Punkt O in dem Raume $M'ABN'$ liegt, so ist:

$$X=+AD,\ Y=-DO;\ \ X'=+BD,\ Y'=-DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=-\frac{\frac{AD}{DO}+\frac{BD}{DO}}{1-\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=-\operatorname{tang}(AOD+BOD)$$

$$=-\operatorname{tang} AOB=\sqrt{3},$$

folglich:

$$\operatorname{tang} AOB=-\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB=120^{\circ}.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 6. der Punkt O in dem Raume A_1AM' liegt, so ist:

$$X=-AD,\ Y=-DO;\ \ X'=+BD,\ Y'=-DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\cdot\frac{X'}{Y'}}=\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\cdot\frac{BD}{DO}}=-\frac{\frac{BD}{DO}-\frac{AD}{DO}}{1+\frac{BD}{DO}\cdot\frac{AD}{DO}}$$

$$=-\operatorname{tang}(BOD-AOD)=-\operatorname{tang} AOB=\sqrt{3},$$

folglich:

$$\operatorname{tang} AOB=-\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB=120^{\circ},$$

was ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein kann; daher kann der Punkt O in dem Raume A_1AM' nicht liegen.

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 7. der Punkt O in dem Raume B_1BN' liegt, so ist:

$$X = +AD,\quad Y = -DO;\quad X' = -BD,\quad Y' = -DO;$$

also:

$$\frac{\frac{X}{Y}+\frac{X'}{Y'}}{1-\frac{X}{Y}\frac{X'}{Y'}} = -\frac{\frac{AD}{DO}-\frac{BD}{DO}}{1+\frac{AD}{DO}\frac{BD}{DO}} = -\operatorname{tang}(AOD-BOD)$$

$$= -\operatorname{tang} AOB = \sqrt{3},$$

folglich:

$$\operatorname{tang} AOB = -\sqrt{3},$$

also:

$$\angle AOB = 120^0,$$

was ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein kann; daher kann der Punkt O in dem Raume B_1BN' nicht liegen.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich das folgende allgemeine Resultat:

Der Punkt O kann nur oberhalb AB, also auf einer Seite von AB mit dem Dreiecke ABC, oder unterhalb AB, also auf entgegengesetzter Seite von AB mit dem Dreiecke ABC, in diesem Falle aber nur in dem Raume $M'ABN'$ liegen; im ersten Falle ist $\angle AOB = 60^0$, im zweiten Falle ist $\angle AOB = 120^0$.

Eine ganz ähnliche Betrachtung wie so eben über den Winkel AOB mit Rücksicht auf die Lage des Punktes O lässt sich natürlich auch über die Winkel BOC und COA mit Rücksicht auf die Lage des Punktes O anstellen, und man wird sogleich übersehen, dass sich hieraus eine leichte Construction zur Bestimmung des Raums ableiten lässt, in welchem der Punkt O überhaupt nur liegen kann.

§. 7.

Von dem Bisherigen lässt sich eine Anwendung machen bei der Lösung der folgenden schon öfters — aber nach meiner Meinung nicht vollständig genügend — behandelten

Aufgabe.

In der Ebene eines Dreiecks den Punkt zu bestim-

men, für welchen die Summe seiner Entfernungen von den drei Ecken des Dreiecks ein Minimum ist.

Auflösung.

Wir wollen das gegebene Dreieck durch $AA'A''$ und den gesuchten Punkt durch O bezeichnen; seine Entfernungen von den Ecken A, A', A'' seien beziehungsweise s, s', s'': so soll also der Punkt O so bestimmt werden, dass die Summe

$$u = s + s' + s''$$

ein Minimum wird.

Um der Entwickelung möglichste Symmetrie zu verleihen, nehmen wir in der Ebene des Dreiecks ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy an, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten von A, A', A'' beziehungsweise durch a, b; a', b'; a'', b''; die Coordinaten von O durch x, y. Dann ist:

$$s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$
$$s' = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2},$$
$$s'' = \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2};$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x-a}{s}, \quad \frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{x-a'}{s'}, \quad \frac{\partial s''}{\partial x} = \frac{x-a''}{s''};$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{y-b}{s}, \quad \frac{\partial s'}{\partial y} = \frac{y-b'}{s'}, \quad \frac{\partial s''}{\partial y} = \frac{y-b''}{s''}.$$

Die gemeinschaftlichen Bedingungen des Maximums und Minimums liefern bekanntlich die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s'}{\partial x} + \frac{\partial s''}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s'}{\partial y} + \frac{\partial s''}{\partial y} = 0;$$

also nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen:

$$\frac{x-a}{s} + \frac{x-a'}{s'} + \frac{x-a''}{s''} = 0,$$

$$\frac{y-b}{s} + \frac{y-b'}{s'} + \frac{y-b''}{s''} = 0;$$

aus denen folglich die Coordinaten x, y zu bestimmen sind.

Zu dem Ende betrachten wir die als von den Punkten A, A', A'' ausgehend gedachten Linien AO, $A'O$, $A''O$ oder s, s', s'' als die positiven Theile der ersten Axen dreier neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme, und bezeichnen die von diesen Geraden mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin, nämlich überhaupt in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin, von 0 bis 360° zählen, respective durch φ, φ', φ''; wo bekanntlich die positiven Theile der secundären zweiten Coordinatenaxen in allen secundären Systemen so angenommen werden müssen, dass man sich, um von den positiven Theilen der ersten secundären Axen durch die entsprechenden Coordinatenwinkel hindurch zu den positiven Theilen der zweiten secundären Axen zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen; dann sind die Coordinaten des Punktes O in den drei secundären Systemen in völliger Allgemeinheit:

$$s\cos\varphi,\ s\sin\varphi;\quad s'\cos\varphi',\ s'\sin\varphi';\quad s''\cos\varphi'',\ s''\sin\varphi'';$$

und für die primitiven Coordinaten x, y des Punktes O erhält man also nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= a + s\cos\varphi, & y &= b + s\sin\varphi; \\ x &= a' + s'\cos\varphi', & y &= b' + s'\sin\varphi'; \\ x &= a'' + s''\cos\varphi'', & y &= b'' + s''\sin\varphi''; \end{aligned}$$

aus denen sich:

$$\frac{x-a}{s} = \cos\varphi,\quad \frac{x-a'}{s'} = \cos\varphi',\quad \frac{x-a''}{s''} = \cos\varphi'';$$
$$\frac{y-b}{s} = \sin\varphi,\quad \frac{y-b'}{s'} = \sin\varphi',\quad \frac{y-b''}{s''} = \sin\varphi''$$

ergiebt. Nach dem Obigen sind folglich die allgemeinen Bedingungsgleichungen des Maximums und Minimums die folgenden:

$$\cos\varphi + \cos\varphi' + \cos\varphi'' = 0,$$
$$\sin\varphi + \sin\varphi' + \sin\varphi'' = 0;$$

und φ, φ', φ'' müssen also so bestimmt werden, dass diesen beiden Gleichungen **zugleich** genügt wird.

addirt:

$$2\cos\varphi(\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi'')+2\sin\varphi(\sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi'')=0,$$

$$2\cos\varphi'(\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi'')+2\sin\varphi'(\sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi'')=0,$$

$$2\cos\varphi''(\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi'')+2\sin\varphi''(\sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi'')=0;$$

also, wenn man nun diese drei Gleichungen zu einander addirt und durch 2 dividirt:

$$(\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi'')^2+(\sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi'')^2=0,$$

folglich nach bekannter Schlussweise:

$$(\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi'')^2=0,\quad (\sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi'')^2=0;$$

also:

$$\cos\varphi+\cos\varphi'+\cos\varphi''=0,\quad \sin\varphi+\sin\varphi'+\sin\varphi''=0;$$

wie erforderlich.

Wir wollen nun die an der gemeinschaftlichen Spitze O der drei Dreiecke

$$AOA',\ A'OA'',\ A''OA$$

liegenden Winkel:

$$\angle AOA',\ \angle A'OA'',\ \angle A''OA$$

dieser drei Dreiecke respective durch:

$$\omega'',\ \omega,\ \omega'$$

bezeichnen, und nun etwa den Winkel ω'' etwas näher betrachten.

Zu dem Ende nehmen wir der Einfachheit wegen A als den Anfang und AA' als den positiven Theil der Axe der x, den positiven Theil der Axe der y aber auf derselben Seite von AA' an, auf welcher der Punkt A'' liegt. Liegt nun der Punkt O auf der positiven Seite von AA', so ist offenbar:

$$0<\varphi<180^\circ,\quad 0<\varphi'<180^\circ,\quad \varphi'>\varphi$$

und:

$$\omega''=\varphi'-\varphi;$$

also:

$$\cos\omega''=\cos(\varphi'-\varphi)=\cos(\varphi-\varphi').$$

Liegt der Punkt O auf der negativen Seite von AA', so ist offenbar:

$$180^0 < \varphi < 360^0, \quad 180^0 < \varphi' < 360^0, \quad 360^0 - \varphi' > 360^0 - \varphi$$

und:

$$\omega'' = (360^0 - \varphi') - (360^0 - \varphi) = \varphi - \varphi';$$

also:

$$\cos\omega'' = \cos(\varphi - \varphi').$$

Daher ist immer:

$$\cos\omega'' = \cos(\varphi - \varphi'),$$

und ganz eben so ergiebt sich überhaupt:

$$\cos\omega = \cos(\varphi' - \varphi''), \quad \cos\omega' = \cos(\varphi'' - \varphi), \quad \cos\omega'' = \cos(\varphi - \varphi');$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\omega = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\omega' = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\omega'' = -\tfrac{1}{2};$$

und folglich, weil ω, ω', ω'' als Winkel ebener Dreiecke zwischen 0 und 180^0 liegen:

$$\omega = 120^0, \quad \omega' = 120^0, \quad \omega'' = 120^0.$$

Man muss also den Punkt O so bestimmen, dass die Winkel:

$$\angle AOA', \quad \angle A'OA'', \quad \angle A''OA$$

der Dreiecke

$$AOA', \quad A'OA'', \quad A''OA$$

sämmtlich 120^0 betragen, woraus sich zugleich ganz unmittelbar ergiebt, dass der Punkt O, wenn es überhaupt einen den vorstehenden Bedingungen entsprechenden Punkt giebt, nur innerhalb des Dreiecks $AA'A''$ liegen kann.

Untersuchen müssen wir nun noch, ob, die Existenz des Punktes O vorausgesetzt, die Bedingungen des Minimums vollständig erfüllt sind.

Zu dem Ende haben wir nach dem Obigen offenbar:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{s - (x-a)\dfrac{\partial s}{\partial x}}{s^2} = \frac{1}{s}\left\{1 - \left(\frac{x-a}{s}\right)^2\right\} = \frac{\sin\varphi^2}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x^2} = \frac{s' - (x-a')\dfrac{\partial s'}{\partial x}}{s'^2} = \frac{1}{s'}\left\{1 - \left(\frac{x-a'}{s'}\right)^2\right\} = \frac{\sin\varphi'^2}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial x^2} = \frac{s'' - (x-a'')\dfrac{\partial s''}{\partial x}}{s''^2} = \frac{1}{s''}\left\{1 - \left(\frac{x-a''}{s''}\right)^2\right\} = \frac{\sin\varphi''^2}{s''}$$

und:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{s-(y-b)\frac{\partial s}{\partial y}}{s^2} = \frac{1}{s}\{1-\left(\frac{y-b}{s}\right)^2\} = \frac{\cos\varphi^2}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial y^2} = \frac{s'-(y-b')\frac{\partial s'}{\partial y}}{s'^2} = \frac{1}{s'}\{1-\left(\frac{y-b'}{s'}\right)^2\} = \frac{\cos\varphi'^2}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial y^2} = \frac{s''-(y-b'')\frac{\partial s''}{\partial y}}{s''^2} = \frac{1}{s''}\{1-\left(\frac{y-b''}{s''}\right)^2\} = \frac{\cos\varphi''^2}{s''};$$

also:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s''}{\partial x^2} = \frac{\sin\varphi^2}{s} + \frac{\sin\varphi'^2}{s'} + \frac{\sin\varphi''^2}{s''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s''}{\partial y^2} = \frac{\cos\varphi^2}{s} + \frac{\cos\varphi'^2}{s'} + \frac{\cos\varphi''^2}{s''}.$$

Sollte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin\varphi^2}{s} + \frac{\sin\varphi'^2}{s'} + \frac{\sin\varphi''^2}{s''} = 0$$

sein, so müsste, die Existenz des Punktes O vorausgesetzt,

$$\sin\varphi = 0, \quad \sin\varphi' = 0, \quad \sin\varphi'' = 0$$

sein, was offenbar mit der Existenz des Punktes O nicht zu vereinigen ist, wie man sogleich übersieht, wenn man der Einfachheit wegen die Seiten des Dreiecks $AA'A''$ als Axen der x annimmt. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos\varphi^2}{s} + \frac{\cos\varphi'^2}{s'} + \frac{\cos\varphi''^2}{s''} = 0$$

ist eben so wenig mit der Existenz des Punktes O zu vereigen, weil hieraus auf ähnliche Art wie vorher

$$\cos\varphi = 0, \quad \cos\varphi' = 0, \quad \cos\varphi'' = 0$$

folgen würde. Wir sehen also, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

nicht verschwinden und positiv sind, wie es die Bedingungen des Minimums erfordern.

Ferner erhält man aus dem Obigen leicht:

Weil nach einem bekannten geometrischen Satze die Winkel A, B, C des Dreiecks sämmtlich kleiner als die 120° betragenden Winkel BOC, COA, AOB sind, also jeder der Winkel A, B, C zwischen 0 und 120° liegt; so ist nach §. 5., mit Rücksicht [illegible]:

$$OA + OB + OC = AA' = BB' = CC',$$

und die sämmtlich gleichen Linien AA', BB', CC' bestimmen also den Werth der kleinsten Summe der Entfernungen des Punktes O von den Punkten A, B, C; was sich auch geometrisch leicht auf folgende Art beweisen lässt.

Nach dem Ptolemäischen Lehrsatze ist nämlich:

$$OA'.BC = OB.CA' + OC.BA',$$

also, weil

$$BC = CA' = BA'$$

ist:

$$OA' = OB + OC,$$

und folglich:

$$OA + OA' = OA + OB + OC,$$

also:

$$AA' = OA + OB + OC,$$

wie bewiesen werden sollte.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass ich diese letzteren geometrischen Bemerkungen einer schönen Abhandlung des Herrn Professors L. Lindelöf in Helsingfors verdanke, welche unter dem Titel: „Sur les Maxima et Minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile a plusieurs centres fixes. Par L. Lindelöf. Helsingfors. Imprimérie de la Société de Littérature Finnoise. 1866. 4°." als ein besonderer Abdruck aus den „Mémoires de la Société des Sciences de Finlande" erschienen und in jeder Beziehung sehr zu beachten ist.

In die im Obigen von mir entwickelten analytischen Formeln lassen sich natürlich statt der Winkel A, B, C und des Halb-

---

suchungen wissen wir, dass diese Winkel, deren Summe unter der gemachten Voraussetzung offenbar 360° beträgt, nur 120° oder 60° sein können; wäre nun auch nur einer 60°, so würde die Summe kleiner als 360° sein, was gegen das Vorhergehende streitet; es kann also keiner 60° sein, und jeder muss daher 120° betragen, wie behauptet wurde.

messers R des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises auch die Seiten dieses Dreiecks einführen, was ich aber glaube lediglich dem Leser überlassen zu dürfen.

Anhang.

Ueber eine Aufgabe aus der Lehre von dem Grössten und Kleinsten.

Weil die folgende, wenn auch nicht schwierige, aber für manche Untersuchungen wichtige Aufgabe nicht immer mit der erforderlichen Allgemeinheit aufgelöst wird, so will ich für dieselbe im Folgenden die Auflösung geben:

Aufgabe.

Man soll die Grössen x, y, z so bestimmen, dass, indem a eine constante Grösse bezeichnet,

$$x+y+z=a$$

und die Function

$$u=\cos x+\cos y+\cos z$$

ein Maximum oder Minimum ist.

Auflösung.

Aus der Gleichung

$$x+y+z=a$$

folgt:

$$z=a-x-y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

Also ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x-\sin z\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin x+\sin z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin y-\sin z\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos x+\cos z\frac{\partial z}{\partial x}=-\cos x-\cos z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\cos y+\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos y-\cos z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = -\cos z.$$

Für das Maximum oder Minimum muss bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sein; die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

müssen gleiche Vorzeichen haben, und die Grösse

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

welche wir durch Ω bezeichnen, also

$$\Omega = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

setzen wollen, muss negativ sein; ein Maximum oder Minimum von u findet Statt, jenachdem die zweiten Differentialquotienten von u beide negativ oder beide positiv sind, natürlich vorausgesetzt, dass die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums, dass diese beiden Differentialquotienten gleiche Vorzeichen haben, erfüllt ist.

Zuvörderst haben wir also die folgenden Gleichungen:

$$-\sin x + \sin z = 0, \quad -\sin y + \sin z = 0;$$

also:

$$\sin x = \sin y = \sin z.$$

Bezeichnen nun $\varkappa$, $\varkappa'$; λ, λ' ganze Zahlen, so führen die Gleichungen:

$$\sin y = \sin x, \quad \sin z = \sin x$$

bekanntlich im Allgemeinen zu den Gleichungen:

$$y = \begin{cases} 2\varkappa\pi + x \\ (2\varkappa' + 1)\pi - x \end{cases} \qquad z = \begin{cases} 2\lambda\pi + x \\ (2\lambda' + 1)\pi - x, \end{cases}$$

mit denen die Gleichung

$$x + y + z = a$$

zu verbinden ist.

Ueberhaupt sind nun die folgenden Verbindungen der vorstehenden Werthe von y und z möglich:

I.

$$y = 2\varkappa\pi + x,$$
$$z = 2\lambda\pi + x;$$

$$3x + 2(\varkappa + \lambda)\pi = a,$$
$$x = \frac{a - 2(\varkappa+\lambda)\pi}{3};$$

$$\cos y = \cos x, \quad \cos z = \cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\cos x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\cos x,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos x;$$

$$\Omega = \cos x^2 - 4\cos x^2 = -3\cos x^2,$$
$$\Omega \text{ nicht } > 0.$$

II.

$$y = 2\varkappa\pi + x,$$
$$z = (2\lambda' + 1)\pi - x;$$

$$x + \{2(\varkappa + \lambda') + 1\}\pi = a,$$
$$x = a - \{2(\varkappa + \lambda') + 1\}\pi;$$

$$\cos y = \cos x, \quad \cos z = -\cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos x;$$

$$\Omega = \cos x^2,$$
$$\Omega \text{ nicht } < 0.$$

III.

$$y = (2\varkappa' + 1)\pi - x,$$
$$z = 2\lambda\pi + x;$$

$$x + \{2(\varkappa' + \lambda) + 1\}\pi = a,$$
$$x = a - \{2(\varkappa' + \lambda) + 1\}\pi;$$

$$\cos y = -\cos x, \quad \cos z = \cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2\cos x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\cos x;$$

$$\Omega=\cos x^2,$$
$$\Omega \text{ nicht } <0.$$

IV.

$$y=(2\varkappa'+1)\pi-x,$$
$$z=(2\lambda'+1)\pi-x;$$

$$2(\varkappa'+\lambda'+1)\pi-x=a,$$
$$x=2(\varkappa'+\lambda'+1)\pi-a;$$

$$\cos y=-\cos x,\quad \cos z=-\cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos x;$$

$$\Omega=\cos x^2,$$
$$\Omega \text{ nicht } <0.$$

Es entspricht also nur der Fall I. den Bedingungen des Maximums oder Minimums, und wir haben daher im Allgemeinen die folgende Auflösung:

$$x=\frac{a-2(\varkappa+\lambda)\pi}{3},\quad y=2\varkappa\pi+x,\quad z=2\lambda\pi+x;$$

u ist $\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ wenn $\cos x$ $\left.\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Wir wollen nun den besonderen Fall betrachten, wenn $a=\pi$ ist, und u ein Maximum sein soll.

Für diesen Fall ist nach I.:

$$x=-\{2(\varkappa+\lambda)-1\}.\tfrac{1}{3}\pi,$$
$$y=2\varkappa\pi+x=\{2(2\varkappa-\lambda)+1\}.\tfrac{1}{3}\pi,$$
$$z=2\lambda\pi+x=\{2(2\lambda-\varkappa)+1\}.\tfrac{1}{3}\pi;$$

wo, wie man sogleich übersieht:

$$x+y+z=\pi$$

ist, wie es sein soll.

Für das Maximum muss $\cos x$ positiv sein, daher kann man, wie leicht erhellet, für $2(\varkappa+\lambda)-1$ nur die folgenden ungeraden Zahlen:

$$\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 7,\ \pm 11,\ \pm 13,\ \pm 17,\ \pm 19,\ \pm 23,\ \pm 25, \ldots;$$

. h. überhaupt nur

$$\pm (6\mu + 1), \quad \pm (6\mu - 1);$$

lso, insofern μ positiv und negativ sein kann, nur $\pm(6\mu + 1)$ etzen; so dass also nach dem Obigen nur

$$x = \mp \frac{(6\mu + 1)\pi}{3}$$

gesetzt werden kann. Weiss man nun, dass x positiv und klei-er als $\frac{5\pi}{3}$ ist, so kann man offenbar bloss $\mu = 0$ setzen und das ntere Zeichen nehmen, woraus sich

$$\pi = \tfrac{1}{3}\pi$$

rgiebt.

Weil nun ferner:

$$y = 2\varkappa\pi + x = 2\varkappa\pi + \tfrac{1}{3}\pi = \frac{(6\varkappa + 1)\pi}{3},$$

$$z = 2\lambda\pi + x = 2\lambda\pi + \tfrac{1}{3}\pi = \frac{(6\lambda + 1)\pi}{3}$$

t; so kann man, wenn man weiss, dass auch y und z positiv d kleiner als $\frac{5\pi}{3}$ sind, nur $\varkappa = 0$ und $\lambda = 0$, also

$$y = \tfrac{1}{3}\pi, \quad z = \tfrac{1}{3}\pi$$

etzen.

Unter den gemachten Voraussetzungen, die u. A. immer für ie Winkel des ebenen Dreiecks gültig sind, giebt es also für en Fall des Maximums nur die **eine** Auflösung:

$$x = \tfrac{1}{3}\pi = 60^0,$$
$$y = \tfrac{1}{3}\pi = 60^0,$$
$$z = \tfrac{1}{3}\pi = 60^0.$$

Der Werth des Maximums von u ist:

$$\cos 60^0 + \cos 60^0 + \cos 60^0 = \tfrac{3}{2},$$

nd diesen Werth kann also

$$u = \cos x + \cos y + \cos z$$

nter den gemachten Voraussetzungen niemals übersteigen.

Weil der Werth von

$$u = \cos x + \cos y + \cos z$$

ungeändert bleibt, die Winkel oder Bogen x, y, z mögen positiv oder negativ sein, so ist für positive und negative Winkel oder Bogen der grösste Werth von

$$u = \cos x + \cos y + \cos z$$

immer $\frac{3}{2}$, wenn nur die absoluten Werthe von x, y, z sämmtlich kleiner als $\frac{5\pi}{3}$ sind.

Weil Aufgaben von der Art der vorstehenden oft ziemlich leichtfertig behandelt werden, so habe ich die obige Auflösung hier mitgetheilt; in ähnlichen Fällen wird man sich auf ähnliche Art zu verhalten haben.

IV.

Zur Theorie der nicht interferirenden polarisirten Lichtstrahlen.

Von

Herrn Doctor *Külp*,

Assistenten der Physik an der technischen Schule in Darmstadt.

Zwei homogene Aetherwellen M und M' seien rechtwinklig zu einander polarisirt. Wie auch die dem Aether durch diese beiden Lichtstrahlen mitgetheilten schwingenden Bewegungen sein mögen, so kann man sie doch wohl in drei Systeme auf einander senkrechter Aetherschwingungen zerlegen. Für die Richtungen dieser Seitenschwingungen wollen wir die gemeinschaftliche Rich-

tung der beiden Lichtstrahlen und zwei auf dieser senkrechte grade Richtungen annehmen, welche in den beiden Polarisationsebenen gelegen und zu den Oberflächen der Wellen parallel sind. Für den homogenen Strahl M seien J_1, J_2, J_3 die Intensitäten der Seitenschwingungen; δ, ψ, φ ihre Phasen im Vereinigungspunkte; w, v, u ihre Vibrations-Geschwindigkeiten, die jedoch veränderlich sind. Sonach bestehen für diesen homogenen Strahl M folgende drei Gleichungen:

$$\text{I.} \ldots\ldots\ldots \quad w = J_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

$$\text{II.} \ldots\ldots\ldots \quad v = J_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\psi}{\lambda}\right),$$

$$\text{III.} \ldots\ldots\ldots \quad u = J_3 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right);$$

wo λ die Wellenlänge des homogenen Lichtstrahls darstellt. Bezeichnen ferner für den zweiten homogenen Strahl M': J_4, J_5, J_6 die Intensitäten der Seitenschwingungen; δ', ψ', φ' ihre Phasen im Vereinigungspunkte; w', v', u' ihre veränderlichen Seitengeschwindigkeiten, so hat man auf gleiche Weise für den zweiten homogenen Strahl M':

$$\text{IV.} \ldots\ldots\ldots \quad w' = J_4 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta'}{\lambda}\right),$$

$$\text{V.} \ldots\ldots\ldots \quad v' = J_5 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\psi'}{\lambda}\right),$$

$$\text{VI.} \ldots\ldots\ldots \quad u' = J_6 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi'}{\lambda}\right).$$

Von diesen sechs Seitengeschwindigkeiten also haben w und w' die gemeinsame Richtung der beiden Lichtstrahlen, v und v' liegen in der Polarisationsebene des homogenen Strahles M, und u und u' in der Polarisationsebene von M'. Die Seitengeschwindigkeiten X, Y, Z der aus der Vereinigung der beiden Lichtstrahlen entspringenden schwingenden Aetherbewegung sind:

$$X = w + w', \quad Y = v + v' \quad \text{und} \quad Z = u + u'.$$

Für ihre Intensitäten werden folgende drei weitere Gleichungen bestehen:

$$\text{VII.} \ldots \quad A^2 = J_1^2 + J_4^2 + 2J_1J_4 \cos 2\pi\left(\frac{\delta - \delta'}{\lambda}\right)$$

aus I. und IV.;

$$\text{VIII.} \ldots \quad B^2 = J_2^2 + J_5^2 + 2J_2J_5 \cos 2\pi\left(\frac{\psi - \psi'}{\lambda}\right)$$

aus II. und V.;

$$\text{IX.} \quad C^2 = J_3{}^2 + J_6{}^2 + 2 J_3 J_6 \cos 2\pi \left(\frac{\varphi - \varphi'}{\lambda}\right)$$

aus III. und VI.

Endlich ist die Intensität R^2 des Gesammtlichtes:

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

oder:

$$\begin{aligned}\text{X.} \quad R^2 = \; & J_1{}^2 + J_2{}^2 + J_3{}^2 + J_4{}^2 + J_5{}^2 + J_6{}^2 \\ & + 2 J_1 J_4 \cos 2\pi \left(\frac{\delta - \delta'}{\lambda}\right) + 2 J_2 J_5 \cos 2\pi \left(\frac{\psi - \psi'}{\lambda}\right) \\ & + 2 J_3 J_6 \cos 2\pi \left(\frac{\varphi - \varphi'}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Da die unter einem rechten Winkel gegen einander polarisirten Lichtstrahlen M und M' immer dieselbe Helligkeit geben, was der Versuch zeigt, so muss R^2 für alle Werthe der Differenzen $(\delta - \delta')$, $(\psi - \psi')$ und $(\varphi - \varphi')$ constant sein, wozu erforderlich ist, dass zu gleicher Zeit

$$J_1 J_4 = 0, \quad J_2 J_5 = 0 \quad \text{und} \quad J_3 J_6 = 0$$

ist. Es ist also in der Gleichung $J_1 J_4 = 0$ J_1 oder $J_4 = 0$, d. h. wenn die Seitengeschwindigkeit w für den homogenen Strahl M Null ist, so muss auch $w' = 0$ für den homogenen Strahl M' sein. Auf jedem polarisirten Lichtstrahle erfolgen also die Schwingungen parallel zu der Oberfläche der Wellen. Soll nun $J_2 J_5 = 0$ sein, so ist J_2 oder $J_5 = 0$, wenn also $J_2 = 0$, so muss nothwendiger Weise $v' = 0$ sein. Analog mit dem Produkte $J_3 J_6 = 0$.

Die Schwingungen gehen demnach parallel oder senkrecht gegen die Polarisationsebene vor sich. Nun folgt aus der Theorie der doppelten Brechung, dass für einen Lichtstrahl, bei dem die Schwingungen des Aethers auf dem Hauptschnitt normal sind, in allen Richtungen die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit unveränderlich ist. Der gewöhnliche Strahl ist aber nach der Ebene des Hauptschnittes polarisirt, folglich gehen die Schwingungen des Aethers bei einem polarisirten Lichtstrahle auf der Wellenoberfläche normal auf der Polarisationsebene vor sich. Ebenso folgt, dass die Schwingungen in der Ebene des Hauptschnittes eine variable Fortpflanzungs-Geschwindigkeit haben, was den ungewöhnlich gebrochenen Strahl charakterisirt. — Fresnel besprach diesen Gegenstand etwas zu kurz, als dass er sich eignete, in ein Lehrbuch aufgenommen zu werden, deshalb wird wohl diese erweiterte Auffassung am Platze sein.

V.

Beweis des Satzes:

enn n eine ganze Zahl ist, so ist $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\,360^0$ nur dann rational, enn die Zahl n bei geradem Werthe nicht grösser als 6 und bei ungeradem Werthe nicht grösser als 3 ist*).

Von

Herrn Professor Dr. *Hessel*

an der Universität in Marburg.

---

§. 1. Erklärungen.

I. Sind ca, cb, cd drei nicht in einerlei Ebene liegende, nach Länge, Richtung und Anfangspunkt gegebene Strahlen, so bezeichnen wir durch

$$\text{Strahl } [ca;\; cb;\; cd]$$

---

*) Ich habe den in vorliegender Abhandlung bewiesenen Satz bereits in meiner, im Jahre 1831 erschienenen Krystallometrie aufgestellt und benutzt, habe ihn aber weder damals, noch auch später beweisen können, obgleich ich in jedem Jahre mindestens einmal den Versuch machte, zu einem genügenden Beweise zu gelangen. Es ist dabei merkwürdig, dass wohl schwerlich ein Mathematiker existirt, welcher die Richtigkeit dieses Satzes im Ernste bezweifelt, dass aber keiner von denen, die ich zu Rathe zog, einen mir genügenden Beweis liefern konnte.

Erst in der neuesten Zeit habe ich bei Gelegenheit einer grössern Arbeit über die holometrischen Systeme von Punkten, Strahlen und einmaligen Raumgebilden den in dieser Abhandlung gegebenen einfachen Beweis gefunden.

einen Strahl *cs*, welcher nach Länge, Richtung und Lage die von *c* ausgehende Diagonale in dem Parallelepiped ist, dessen von *c* ausgehende Kantenlinien die Strahlen *ca*, *cb*, *cd* sind.

Wir bezeichnen auch durch

Punkt $[ca;\ cb;\ cd]$

den Endpunkt *s* des Strahles *cs*.

II. Ist dabei $ca = l.\alpha$, $cb = m.\beta$ und $cd = n.\delta$, so gehen obige Zeichen über in:

Strahl $[l.\alpha;\ m.\beta;\ n.\delta]$,

Punkt $[l.\alpha;\ m.\beta;\ n.\delta]$.

Sind dann α, β und δ Längenmaasseinheiten, welche in den betreffenden Richtungen *ca*, *cb*, *cd* benutzt werden, so sind l, m, n unbenannte Zahlen, welche dazu dienen, anzugeben, wie viele Einheiten $= \alpha$ in *ca*, wie viele Einheiten $= \beta$ in *cb* und wie viele Einheiten $= \delta$ in *cd* enthalten sind, so dass wir sie Maasszähler nennen.

III. Sind α, β, δ drei von dem Punkte *c* ausgehende nicht in einerlei Ebene liegende nach Länge und Richtung gegebene Strahlen und man nimmt die geraden Linien, in denen sie liegen, als Coordinatenaxen an und es ist dabei die Länge eines jeden der drei Strahlen α, β, δ zugleich die Länge der Maasseinheit, welche in der betreffenden Coordinatenaxe benutzt werden soll, so nennen wir die vorliegende Zusammenstellung der drei Strahlen α, β und δ die Ternion $\alpha\beta\delta$ der (einfachen) nach Länge, Richtung und Lage gegebenen Coordinatenstrahlen.

IV. Ist dann in dem Zeichen

$cs = \text{Strahl } [l.\alpha;\ m.\beta;\ n.\delta]$

jeder der drei Maasszähler l, m, n rational, so heisst der Strahl *cs* und der Punkt *s* ein für die Ternion $\alpha\beta\delta$ der nach Länge, Richtung und Lage gegebenen Coordinatenstrahlen α, β, δ logometrischer oder kürzer, ein für $\alpha\beta\delta$ logometrischer Strahl, bzw. Punkt.

Ist nicht jede der drei Zahlen l, m, n rational, so ist auch der Strahl *cs* und der Punkt *s* für $\alpha\beta\delta$ nicht logometrisch.

V. Ist in einem Zeichen wie

$\text{Strahl } [l.\alpha;\ m.\beta;\ n.\delta] = cs$

oder:

$$\text{Punkt } [l.\alpha;\quad m,\beta;\quad n.\delta] = s$$

jeder der drei Maasszähler l, m, n eine **ganze** Zahl, so nennen wir den Strahl cs einen **für** $\alpha\beta\delta$ **holometrischen Strahl** und den Punkt s einen **für** $\alpha\beta\delta$ **holometrischen Punkt.**

Ist nicht jede der drei Zahlen l, m, n eine ganze Zahl, so ist cs und s für $\alpha\beta\delta$ **nicht holometrisch.**

VI. Die Gesammtheit der möglichen, für einerlei Ternion $\alpha\beta\delta$ von nach Länge, Richtung und Lage gegebenen Coordinatenstrahlen α, β und δ holometrischen Punkte, bzw. Strahlen, bildet ein **räumliches** (nicht ebenes) **holometrisches System von Punkten,** bzw. **Strahlen, das System der für** $\alpha\beta\delta$ **holometrischen Punkte,** bzw. **Strahlen.**

VII. Die Gesammtheit der möglichen für einerlei Ternion $\alpha\beta\delta$ von Coordinatenstrahlen logometrischen Punkte, bzw. Strahlen, bildet ebenso ein **räumliches logometrisches System von Punkten,** bzw. **Strahlen,** nämlich das **System der für** $\alpha\beta\delta$ **logometrischen Punkte,** bzw. **Strahlen.**

VIII. Dem System der für $\alpha\beta\delta$ holometrischen Punkte entspricht das **System der für** $\alpha\beta\delta$ **holometrischen Raumgebilde;** dem System der für $\alpha\beta\delta$ logometrischen Punkte entspricht das **System der für** $\alpha\beta\delta$ **logometrischen Raumgebilde.**

Jedes dieser Systeme von Raumgebilden umfasst, ausser den ihm angehörigen Punkten, jede gerade Linie, deren beide Endpunkte dem betreffenden System angehören, jedes polygonal begrenzte ebene Flächenstück und jedes polyedrisch begrenzte Raumstück, dessen Eckpunkte dem betreffenden System angehören. Wir betrachten auch jede unbegrenzte gerade Linie, in welcher eine begrenzte, dem System angehörige gerade Linie liegt, und jede unbegrenzte Ebene, in welcher ein dem System angehöriges begrenztes ebenes Flächenstück liegt, als dem System angehörig.

IX. Ist für eines der erwähnten Systeme von Punkten, Strahlen und sonstigen Raumgebilden einer der drei einfachen Coordinatenstrahlen α, β, δ = Null, hat man es also mit einer Binion von einfachen Coordinatenstrahlen, z. B. mit der Binion $\alpha\beta$ zu thun, so ist das System ein ebenes holometrisches oder logometrisches System von Punkten etc.

X. Sind zwei der einfachen Coordinatenstrahlen von dem Werthe = Null, hat man es also bloss mit einem derselben, z. B.

stem der für $\alpha\beta$ holometrischen, bzw. logometrischen Raumgebilde angehörig.

Auch ist jede unbegrenzte gerade Linie, in welcher eine dem Systeme angehörige begrenzte gerade Linie liegt, gleichfalls dem betreffenden Systeme angehörig.

§. 2. Lehrsatz.

Ist von zweien entgegengesetzt gerichteten, an Länge einander gleichen Strahlen

$$cs_{+1} = [l.\alpha; \quad m.\beta]$$
$$cs_{-1} = [-l.\alpha; \quad -m.\beta]$$

der eine der dem System der für $\alpha\beta$ logometrischen Strahlen angehörig, so gehört diesem System auch der andere an. Gehört einer derselben dem System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen an, so ist auch der andere demselben System angehörig.

Es sind nämlich beide Zahlen $-l$ und $-m$ rationale, bzw. ganze Zahlen, wenn $+l$ und $+m$ rationale, bzw. ganze Zahlen sind.

Wir nennen zwei solche an Länge einander gleiche, an Richtung entgegengesetzte Strahlen ein Strahlenpaar.

§. 3. Lehrsatz.

In einem holometrischen Strahlensystem giebt es unter den Strahlenpaaren, aus denen es besteht, mindestens eines von kleinster Länge, die nicht Null ist; in einem logometrischen Strahlensystem aber giebt es kein ihm angehöriges Strahlenpaar von kleinster Länge.

Ist nämlich (in Taf. I. Fig. I.) $ca = ca_1 = \alpha$ und $cb = cb_1 = \beta$ und ca_1 dem Strahle ca und cb_1 dem Strahle cb entgegengesetzt gerichtet, und es ist

$$cs = [ca; \quad cb], \quad cs_1 = [ca_1; \quad cb_1]$$
$$c\sigma = [ca_1; \quad cb], \quad c\sigma_1 = [ca; \quad cb_1],$$

so kann in dem für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlensystem das kleinste Strahlenpaar nicht kleiner sein als der Durchmesser eines um den Mittelpunkt c in der Ebene des Parallelogramms $s\sigma s_1\sigma_1$ beschriebenen Kreises, der ganz innerhalb dieses Parallelogramms liegt

und Anfangspunkt (c), also nach Länge, Richtung und Lage gegebenen (einfachen) Coordinatenstrahlen.

4. Ist in dem Zeichen

$$[l.\alpha;\ \ m.\beta]$$

jeder der beiden Maasszähler l und m rational, so nennen wir den Strahl cs, bzw. den Punkt s, einen für die Binion $\alpha\beta$ der nach Länge, Richtung und Lage gegebenen Coordinatenstrahlen α und β logometrischen, oder kürzer, einen für $\alpha\beta$ logometrischen Strahl, bzw. Punkt.

Ist mindestens eine der beiden Zahlen l und m nicht rational, so ist der Strahl cs und ebenso der Punkt s für $\alpha\beta$ nicht logometrisch.

5. Ist in dem Zeichen

$$[l.\alpha;\ \ m.\beta]$$

jeder der beiden Maasszähler l und m eine ganze Zahl, so heisst der Strahl cs, bzw. der Punkt s, ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl, bzw. Punkt.

Im entgegengesetzten Falle ist der Strahl cs, und ebenso auch der Punkt s, für $\alpha\beta$ nicht holometrisch.

6. Die Gesammtheit der möglichen für einerlei Binion $\alpha\beta$ von nach Länge, Richtung und Lage gegebenen Coordinatenstrahlen α und β holometrischen Punkte bildet ein ebenes holometrisches System von Punkten, das System der für $\alpha\beta$ holometrischen Punkte.

Die Gesammtheit der möglichen für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen bildet ein holometrisches ebenes Strahlensystem, nämlich das System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen.

7. Die Gesammtheit der möglichen, für einerlei Binion $\alpha\beta$ von Coordinatenstrahlen logometrischen Punkte, bzw. Strahlen, bildet ebenso ein ebenes logometrisches System von Punkten, bzw. Strahlen, nämlich das System der für $\alpha\beta$ logometrischen Punkte, bzw. Strahlen.

8. Ist von einem System von für $\alpha\beta$ holometrischen Punkten, oder von für $\alpha\beta$ logometrischen Punkten die Rede, so betrachten wir jede begrenzte gerade Linie, deren Endpunkte dem System angehören, und jedes polygonal begrenzte ebene Flächenstück, dessen Eckpunkte dem System angehören, als dem Sy-

Beweis. Man kann die erste dieser beiden Behauptungen leicht beweisen mit Hülfe der bekannten Formeln, in welchen $\mathrm{Cos}\, n.c$ durch eine Reihe von Potenzen von $\mathrm{Cos}\, c$ und ebenso $\frac{\mathrm{Sin}\, n.c}{\mathrm{Sin}\, c}$ durch eine Reihe von Potenzen von $\mathrm{Cos}\, c$ ausgedrückt ist.

Ist nun umgekehrt $\mathrm{Cos}\, c$ **nicht rational**, sondern irrational und $= j$, so ist:

$$\mathrm{Cos}\, 2c = 2j^2 - 1 \quad \Big| \quad \frac{\mathrm{Cos}\, 2c}{\mathrm{Cos}\, c} = \frac{2j^2-1}{j} \quad \Big| \quad \frac{\mathrm{Sin} 2c}{\mathrm{Sin} c} = 2\,.\,\mathrm{Cos}\, c = 2j$$

$$\mathrm{Cos} 3c\; j(4j^2-3) \quad \Big| \quad \frac{\mathrm{Cos}\, 3c}{\mathrm{Cos}\, c} = 4j^2 - 3 \quad \Big| \quad \frac{\mathrm{Sin} 3c}{\mathrm{Sin} c} = 2\mathrm{Cos} c^2 + \mathrm{Cos} 2c = 4j^2 - 1.$$

Es ist aber dann $\mathrm{Cos}\, c^2 = j^2$ entweder rational oder irrational.

Ist nun erstens j^2 irrational, so ist jedenfalls:

$$\mathrm{Cos}\, 2c \text{ und } \frac{\mathrm{Sin} 2c}{\mathrm{Sin} c} \text{ und } \frac{\mathrm{Cos}\, 3c}{\mathrm{Cos}\, c} \text{ und } \frac{\mathrm{Sin} 3c}{\mathrm{Sin} c}$$

irrational.

Ist $\mathrm{Cos}\, c^2 = j^2$ rational, so ist jedenfalls:

$$\mathrm{Cos}\, 3c, \quad \frac{\mathrm{Cos}\, 2c}{\mathrm{Cos}\, c}, \quad \frac{\mathrm{Sin} 2c}{\mathrm{Sin}\, c}$$

irrational.

Es ist also keine der drei Grössen $\mathrm{Cos}\, nc$, $\frac{\mathrm{Cos}\, nc}{\mathrm{Cos} c}$, $\frac{\mathrm{Sin}\, nc}{\mathrm{Sin} c}$ **bei jedem** ganzen Werthe von n rational, wenn $\mathrm{Cos}\, c$ **nicht rational ist.**

§. 6. Lehrsatz.

Sind (in Taf. I. Fig. III.)

$$ce_0,\; ce_1,\; ce_2,\; ce_3,\; \ldots\; ce_n\; \ldots$$
$$cu_0,\; cu_1,\; cu_2,\; cu_3,\; \ldots\; cu_n\; \ldots$$

gleich lange, von dem Punkte c ausgehende Strahlen, die in einerlei Ebene so liegen, dass, bei jedem Werth der ganzen Zahl n, stets

$$\text{Winkel } e_0ce_n = n\,.\,e_0ce_1 = n\,.\,c$$

und:

$$\text{Winkel } e_ncu_n = 180^0$$

ist; ist dann ferner in der Richtung ce_0 der Strahl $c\alpha = \alpha = r.\mathrm{Cos}c$ und in der zu ce_0 senkrechten Richtung der Strahl $c\beta = \beta = r.\mathrm{Sin}c$, wenn $ce_0 = r$ ist, so gehört entweder jeder, oder nicht jeder der oben erwähnten Strahlen dem System der für $\alpha\beta$ logometrischen Strahlen an, je nachdem Cos$c$ rational oder nicht rational ist.

Beweis. Bezeichnet man nämlich den Strahl ce_n durch die Angabe

$$ce_n = \text{Strahl } [l_n.\alpha;\ \ m_n.\beta],$$

so ist:

$$l_n.\alpha = r.\mathrm{Cos}\,n.c,\ \text{ also: }\ l_n = \frac{r\mathrm{Cos}nc}{\alpha};$$

mithin:

$$l_n = \frac{r\,\mathrm{Cos}nc}{r\,\mathrm{Cos}\,c} = \frac{\mathrm{Cos}nc}{\mathrm{Cos}c},$$

und es ist:

$$m_n.\beta = r\,\mathrm{Sin}nc,\ \text{ also: }\ m_n = \frac{r\mathrm{Sin}nc}{\beta};$$

mithin:

$$m_n = \frac{r.\mathrm{Sin}\,nc}{r.\mathrm{Sin}\,c} = \frac{\mathrm{Sin}nc}{\mathrm{Sin}c}.$$

Es sind also die Zahlen l_n und m_n bei jedem (ganzen) Werth der Ordnungszahl n rational, wenn Cos$c$ rational ist, aber nicht bei jedem (ganzen) Werthe der Zahl n rational, wenn Cos$c$ nicht rational ist.

Ist also Cos$c$ rational, so ist jeder der Strahlen ce_0, ce_1, ce_2, ce_3 .... ce_n ein für $\alpha\beta$ logometrischer Strahl. Ist aber Cos$c$ nicht rational, so ist auch nicht jeder dieser Strahlen dem System der für $\alpha\beta$ logometrischen Strahlen angehörig.

§. 7. Lehrsatz.

Ist eine endliche Anzahl n von Strahlen gegeben, die einem logometrischen Strahlensystem angehören, so giebt es auch holometrische Strahlensysteme, denen sie angehören.

Beweis. Sind α und β zwei nach Richtung, Länge und

Lage gegebene Coordinatenstrahlen und es ist für jeden der n gegebenen Strahlen sein Zeichen, in einer Form wie

$$cs_v = [\frac{f_v}{F_v}.\alpha;\quad \frac{g_v}{G_v}.\beta],$$

bekannt, so kann man sämmtliche $2.n$ Brüche wie $\frac{f_v}{F_v}$, $\frac{g_v}{G_v}$ auf einerlei Hauptnenner bringen. Ist dann z. B. der kleinste Hauptnenner $= Q$, so kann das Zeichen eines jeden der Strahlen auf eine Form gebracht werden, wie:

$$cs_v = [\frac{l_v}{Q}.\alpha;\quad \frac{m_v}{Q}.\beta],$$

so dass ausser Q auch l_v und m_v ganze Zahlen sind. Nimmt man dann in der Richtung von α die Länge $\frac{1}{Q}.\alpha = \alpha_1$ und in der Richtung β die Länge $\frac{1}{Q}.\beta = \beta_1$ als Einheiten in den Coordinatenstrahlen an, so hat man:

$$cs_v = [l_v.\alpha_1;\quad m_v.\beta_1]$$

und es ist dann jeder der n gegebenen Strahlen ein für $\alpha_1\beta_1$ holometrischer Strahl.

Hätte man statt des kleinsten Hauptnenners Q einen anderen Hauptnenner Q gewählt, so würden auch $\alpha_1 = \frac{1}{Q}.\alpha$ und $\beta_1 = \frac{1}{Q}.\beta$ andere (kleinere) Werthe erhalten haben, und es würde das System der für $\alpha_1\beta_1$ holometrischen Strahlen ein anderes sein als vorher, aber es würden ihm doch alle n gegebenen Strahlen angehören.

Es ist hierbei der Winkel $\alpha_1\beta_1$ dem Winkel $\alpha\beta$ gleich.

§. 8. Lehrsatz.

Soll bei einem gegebenen Werthe der ganzen Zahl n der Cosinus des Centriwinkels eines regelmässigen $n$seitigen Polygons rational sein, so muss es auch solche holometrische Srahlensysteme geben, deren jedes die Eigenschaft hat, dass sämmtliche Eckradien des Polygons ihm angehören.

Beweis. Ist der Strahl $\alpha = r.\text{Cos}\,\frac{1}{n}.360^0 = r\,\text{Cos}\,c$ und $\beta = r.\text{Sin}\,c$, wenn $r =$ dem Eckradius ist, und sind α und β zu einander senkrechte von c ausgehende Strahlen, so ist jeder der

Eckradien ein für $\alpha\beta$ logometrischer Strahl. Man kann daher, da n eine endliche ganze Zahl ist, gemäss vorigem Paragraphen, auch holometrische Strahlensysteme bestimmen, denen sämmtliche Eckradien des Polygons angehören.

§. 9. Lehrsatz.

Ist n eine solche ungerade Zahl, bei welcher die n Eckradien eines regelmässig $n$seitigen Polygons einem und demselben holometrischen Strahlensystem angehören, so gehören auch die $2.n$ Eckradien des regelmässig $2.n$seitigen Polygons zu einerlei holometrischen Strahlensystem.

B e w e i s. Ist n ungerad und man verlängert jeden der n Eckradien des gegebenen $n$seitigen Polygons über den Mittelpunkt hinaus und man macht die Verlängerung dem verlängerten Radius gleich, so hat man n Strahlenpaare, deren jedes die Eigenschaft hat, dass jeder der beiden Strahlen, aus denen es besteht, für eine berücksichtigte Binion $\alpha\beta$ von Coordinatenstrahlen holometrisch ist, wenn einer derselben für $\alpha\beta$ holometrisch ist. (Vergleiche §. 2.)

§. 10. Lehrsatz.

Hat ein gegebenes regelmässig $n$seitiges Polygon die Eigenschaft, dass seine n Eckradien einem und demselben holometrischen Strahlensystem angehören, so gelten nachstehende zwei Sätze.

I. Betrachtet man jede Gruppe von n Strahlen, die vom Mittelpunkte des Strahlensystems ausgehen, an Länge einander gleich sind, und so liegen wie die Eckradien eines regelmässigen $n$seitigen Polygons, als Eckradien eines v o r h a n d e n g e d a c h t e n r e g e l m ä s s i g e n n s e i t i g e n P o l y g o n s, so giebt es unzählig viele, mit dem gegebenen Polygon concentrische, mit ihm in einerlei Ebene liegende regelmässig $n$seitige Polygone, welche an G r ö s s e v e r s c h i e d e n sind, aber sämmtlich die Eigenschaft haben, dass alle ihre Eckradien dem erwähnten holometrischen Strahlensystem angehören.

II. Es giebt dann aber unter diesen $n$seitigen Polygonen kein solches, dessen Eckradius kleiner wäre als einer der kleinsten Strahlen des in Rede stehenden holometrischen Strahlensystems.

Beweis zu I. Sind α und β zwei von dem Punkte c ausgehende, nicht in einerlei gerader Linie liegende, nach Richtung und Länge gegebene Strahlen, und es hat ein gegebenes regelmässig $n$seitiges Polygon die Eigenschaft, dass jeder seiner Eckradien ce_0, ce_1, ce_2, ce_3 .... dem System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen angehört, so ist, falls l und m irgend zwei bestimmte ganze Zahlen bedeuten, jeder der n Strahlen, die durch eines der folgenden Zeichen dargestellt sind:

$$[l.ce_0;\ m.ce_1],\quad [l.ce_1;\ m.ce_2],\quad [l.ce_2;\ m.ce_3]\ ....,$$

also jeder Strahl wie

$$[l.ce_\nu;\quad m.ce_{\nu+1}]$$

ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl. (Vergleiche §. 4.).

Es liegen aber die äusseren Endpunkte dieser n Strahlen dann, wenn die Winkel e_0ce_1, e_1ce_2, e_2ce_3 .... einander gleich sind, so wie die n Eckpunkte eines regelmässigen $n$seitigen Polygons, und es entspricht jedem bestimmten Paare von ganzen Zahlen l, m ein bestimmtes derartiges Polygon.

Sind dann λ und μ und $\varkappa$ beliebige bestimmte ganze Zahlen, so ist, falls für das eine Polygon der Eckradius den Werth:

$$[l.ce_0;\ m.ce_1] = [\lambda.ce_0;\ \mu.ce_1],$$

für das andere aber den Werth

$$[l.ce_0;\ m.ce_1] = [\varkappa.\lambda.ce_0;\ \varkappa.\mu.ce_1]$$

hat, der Eckradius von diesem $\varkappa$mal so lang als der von jenem.

Beweis zu II. Soll in einem regelmässig $n$seitigen Polygon jeder seiner Eckradien dem System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen angehören, so leuchtet unmittelbar ein, dass dann der Eckradius nicht kleiner sein kann, als einer der kleinsten unter den für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen. (Vergleiche §. 3.).

§. 11. Lehrsätze.

I. Ist die ganze Zahl n bei geradem Werthe grösser als 6 und bei ungeradem Werthe grösser als 3, so giebt es für eine Gruppe von n Strahlen, welche gleich lang sind und gegen einander so liegen wie die Eckradien eines regelmässigen $n$seitigen Polygons (für eine ebene, regelmässige Gruppe von n Strahlen), **kein holometrisches**, mithin auch kein **logometrisches** ebenes

trahlensystem, welchem diese n Strahlen angehören könnten.)der mit anderen Worten: Giebt es an einem gegebenen ebenen 'olygon, an welchem die Anzahl der Ecken $\overline{\overline{>}}\, n$ ist, eine Gruppe on n Eckpunkten desselben, die gegen einander so liegen, wie die Eckpunkte eines regelmässigen $n$seitigen Polygons, und es ist lie Zahl n bei geradem Werthe grösser als 6 und bei ungeradem Werthe grösser als 3, so gehört das gegebene Polygon keinem ler möglichen holometrischen, mithin auch keinem der möglichen logometrischen ebenen Systeme von Raumgebilden an.

II. Ist die ganze Zahl n bei geradem Werthe grösser als 6, oder bei ungeradem Werthe grösser als 3, so ist der Cosinus des Centriwinkels des regelmässigen $n$seitigen Polygons nicht ational.

Beweis. Man hat nur nöthig, den ersten dieser Sätze, und war nur hinsichtlich der Richtigkeit der auf die geraden Werthe on n bezüglichen Behauptung zu beweisen, da aus dieser, gemäss dem im §. 9. bewiesenen Satze, die Richtigkeit der auf die ngeraden Werthe sich beziehenden Behauptung unmittelbar folgt.

Wäre nun n eine gerade Zahl $= 2.\nu$ und es wären

$$ce_0,\ ce_1,\ ce_2,\ \ldots\ cu_0,\ cu_1,\ cu_2\ \ldots$$

(in Taf. I. Fig. IV.) die n Eckradien eines regelmässig $n$seitigen Polygons, so dass jeder der Winkel

$$e_0ce_1,\ e_1ce_2,\ e_2ce_3,\ \ldots\ u_0cu_1,\ u_1cu_2, u_2cu_3\ \ldots = c = \frac{1}{\nu}.180^0$$

und jeder der Winkel

$$e_1cu_0,\ e_2cu_1,\ e_3cu_2\ \ldots = 180^0 - c = (1-\frac{1}{\nu}).180^0 = \frac{\nu-1}{\nu}.180^0$$

wäre, so würde es jedenfalls n Strahlen geben, deren jeder (so wie ct_1 in Taf. I. Fig. IV. die Eigenschaft hätte, Mittelstrahl zwischen zweien, unter einem Winkel von $(180-c)$ Graden divergirenden Eckradien des gegebenen regelmässig $n$seitigen Polygons zu sein, nämlich die Strahlen:

$$ct_1 = [ce_1, cu_0];\ ct_2 = [ce_2, cu_1];\ ct_3 = [ce_3, cu_2];\ ct_4 = [ce_4, cu_3] \ldots$$

Diese n Strahlen ct_1, ct_2, ct_3 .... wären von gleicher Länge und würden, so wie die Eckradien eines regelmässig $n$seitigen Polygons, unter kleinsten Winkeln $= c = \frac{1}{n}.360^0$ divergiren.

Wäre nun aber n grösser als 6, so würde der Mittelstrahl ct_1 zwischen ce_1 und cu_0, d. h. der Strahl

$$ct_1 = [ce_1, \quad cu_0],$$

falls $ce_1 = cu_0 = r$ wäre, kleiner als r sein.

Zieht man nämlich die Sehne $e_1 g$ durch e_1 parallel mit $e_0 u_0$, so ist $e_1 g = 2r.\text{Cos}\, c$ und da $\text{Cos}\, c$ hier grösser als $\text{Cos}\, 60^0$, also grösser als $\frac{1}{2}$ ist (weil $c < 60^0$ ist), so ist $e_1 g > 2.r.\frac{1}{2}$, d. h. $> r$.

Ist daher $u_0 t_1$ parallel ce_1, also $e_1 t_1 = cu_0 = r$, so ist $e_1 t_1 < e_1 g$. Es liegt dann also der Punkt t_1 in der Sehne $e_1 g$ zwischen e_1 und g, mithin innerhalb des Kreises vom Radius r, so dass $ct_1 < r$ ist.

Da nun aber der Strahl ct_1 den Werth

$$ct_1 = 2.r.\text{Sin}\tfrac{1}{2}c = (2\text{Sin}\tfrac{1}{2}c).r$$

hat und $(2\text{Sin}\frac{1}{2}c)$ bei einerlei Grösse des Winkels c einen bestimmten Werth hat, so ist, falls wir diesen Werth $= \frac{1}{q}$, also:

$$ct_1 = \frac{1}{q}.r$$

setzen, $\frac{1}{q}$ bei Werthen von n, die grösser als 6 sind, stets kleiner als Eins.

Es lässt sich demnach, auf die angegebene Weise, aus dem gegebenen regelmässig $n$seitigen Polygon P, dessen Eckradius $= r$ ist, ein erstes abgeleitetes ihm ähnliches Polygon P_1 ableiten, dessen Eckradius $r_1 = \frac{1}{q}.r$ ist. Aus diesem lässt sich dann ebenso ein zweites abgeleitetes ihm ähnliches Polygon P_2 erhalten, dessen Eckradius $r_2 = \frac{1}{q}.r_1 = (\frac{1}{q})^2.r$ ist. Dieses zweite liefert dann ebenso ein drittes abgeleitetes ihm ähnliches Polygon P_3, dessen Eckradius die Länge $r_3 = \frac{1}{q}.r_2 = (\frac{1}{q})^3.r$ hat; u.s.w., und man gelangt dann ebenso von dem $(x-1)$ten abgeleiteten Polygon P_{x-1} zu dem $x$ten abgeleiteten Polygon P_x, dessen Eckradius $r_x = (\frac{1}{q})^x.r$ ist.

Dabei ist jedes solche abgeleitete Polygon in bestimmter Stellung zu dem gegebenen Polygon und hat, falls $n > 6$ ist,

auch stets einen kleineren Eckradius als das nächst vor ihm abgeleitete.

Wollte man nun annehmen, dass auch bei Werthen von n, die grösser als 6 sind, die n Eckradien des gegebenen $n$seitigen Polygons einem und demselben holometrischen Strahlensystem, z. B. dem System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen angehörten, so würden auch die nEckradien des ersten abgeleiteten Polygons P_1 diesem System angehören; denn, wenn die Strahlen ce_1 und cu_0, und ebenso ce_2 und cu_1, ce_3 und cu_2, ce_4 und cu_3 .... für $\alpha\beta$ holometrisch wären, so würde (gemäss §. 4.) jeder der Strahlen ct_1, ct_2, ct_3 .... ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl sein, indem z. B. ct_1 der Mittelstrahl zwischen den Seitenstrahlen ce_1 und cu_0 ist, u. s. w. Es würde dann aber auch ebenso jeder der Eckradien des zweiten abgeleiteten Polygons P_2 ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl sein, (weil jeder der Eckradien von P_1 ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl wäre). In ähnlicher Art würde aber auch jeder der Eckradien des $x$ten abgeleiteten Polygons P_x unter die für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen gehören, (weil jeder der Eckradien von P_{x-1} ein für $\alpha\beta$ holometrischer Strahl wäre).

Bezeichnet man nun aber die Länge eines jeden der kürzeten unter allen für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen (vergleiche §. 3.) mit ϱ, so hat ϱ in Vergleich mit dem Eckradius r des ursprünglich gegebenen Polygons P einen bestimmten Werth.

Bezeichnen wir diesen Werth durch

$$\varrho = \frac{1}{Q}.r,$$

so ist $\frac{1}{Q}$ nicht grösser als Eins.

Es giebt aber dann jedenfalls solche Werthe der ganzen Zahl x, bei denen

$$r_x < \varrho, \quad \text{d. h.} \quad (\frac{1}{q})^x.r < \frac{1}{Q}.r$$

ist; denn bei jedem solchen ganzen Werth von x, welcher der Bedingung genügt, dass $q^x > Q$, also $x > \frac{\log Q}{\log q}$ ist, würde auch $r_x < \varrho$ sein.

Sollten demnach auch bei solchen geraden Werthen von n, die grösser als 6 sind, die n Eckradien eines regelmässig $n$seitigen Polygons P, mithin auch die n Eckradien des $x$ten aus

ihm in der angegebenen Weise abgeleiteten Polygons P_x dem System der für $\alpha\beta$ holometrischen Strahlen angehören, so müsste dieses holometrische System Strahlen enthalten, deren Länge (r_x) kleiner wäre als die Länge (ϱ) des kleinsten ihm angehörigen Strahles. Da diess nicht möglich ist, so folgt, dass bei geraden Werthen von n, die grösser als 6 sind, es kein holometrisches Strahlensystem giebt, dem alle Eckradien eines regelmässig $n$seitigen Polygons angehören könnten.

Es giebt dann aber auch kein logometrisches System von Strahlen, dem diese n Eckradien angehören könnten. (Vergleiche §. 7.).

Ist daher die ganze Zahl n bei geradem Werthe grösser als 6, oder bei ungeradem Werthe grösser als 3, so gehört eine ebene regelmässige Gruppe von n Strahlen keinem holometrischen, mithin auch keinem logometrischen Strahlensystem an.

Es ist aber dann auch bei geraden Werthen von n, die grösser als 6, und bei ungeraden Werthen von n, die grösser als 3 sind, der Werth von $\text{Cos}\frac{1}{n}.360^0$ nicht rational. (Vergleiche §. 8.).

VI.

Ueber eine besondere Art der Conchoïden (Muschellinien).

Von

Herrn Doctor *Külp*,

Assistenten der Physik an der technischen Schule in Darmstadt.

Die Curve, welche ich hier kurz abhandeln werde, ist eine neue Art der „Conchoïden", sowohl sehr regelmässig in ihrem Verlauf, als auch von einfacher Construction.

Gleichung der Curve. Es sei in Taf. II. Fig. I. ABC ein Quadrant eines Kreises und A der Ursprung der Coordinaten; DG, $D'G'$, $D''G''$.... seien verschiedene Senkrechte, errichtet auf der X-Achse AX; denkt man sich nun die Strahlen AG, AG', AG''.... gezogen, so schneiden dieselben Stücke ab an der trigonometrischen Tangente CG_1, wie: CF, CF', CF'', u. s. f.

Seien nun die Abschnitte CF, CF', CF'',.... die Ordinaten, und die Abscissen die Abschnitte AD, AD', AD'',...., so entsteht die hier in Rede stehende Curve, welche eine Conchoïden-Art ist und „symmetrische Conchoïde" oder kurz „Muschellinie" genannt werden soll.

Es soll nun vorerst die Gleichung dieser Curve aufgesucht werden. Ist E (Taf. II. Fig. 1.) irgend ein Punkt dieser krummen Linie, und sind dessen rechtwinklige Coordinaten $AD=x$, $DE=FC=y$ und $AC=r$, so besteht die Relation:

$$DG=\sqrt{AG^2-AD^2}=\sqrt{r^2-x^2};$$

Da aber die beiden Dreiecke AFC und AGD ähnlich sind, so besteht die Proportion:

$$FC:AC = DG:AD$$

oder:

$$y:r = \sqrt{r^2 - x^2}:x,$$

was quadrirt:

$$x^2y^2 = r^2(r^2 - x^2)$$

oder schliesslich:

$$y^2 = \frac{r^2(r^2 - x^2)}{x^2},$$

die Gleichung der „Muschellinie", liefert.

Polargleichung der Curve. Die Transformation de vengleichung auf Polarcoordinaten liefert mit Hülfe der Transformationsformeln:

$$x = u\cos t \text{ und } y = u\sin t$$

die Gleichung:

$$u^4\sin^2 t\cos^2 t + u^2r^2\cos^2 t - r^4 = 0,$$

welche in keinerlei Weise als einfach anzusehen ist.

Es ist wohl hier der Ort, die Gleichungen der Tan Tt, Subtangente ST, Normale Nn, Subnormale Sl Krümmungs-Halbmessers ϱ anzugeben, als auch die dratur und Kubatur vorzunehmen.

Tangente.

$$Tt = y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = y\sqrt{\frac{4r^4y^2 + 3r^2y^4 + y^6 + r^6}{(r^2 + y^2)^3}}.$$

Subtangente.

$$ST = y.\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x(x^2 - r^2)}{r^2}.$$

Normale.

$$Nn = y\sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} = \frac{1}{r^2}\sqrt{4r^4y^2 + 3r^2y^4 + y^6 + r^6}.$$

S u b n o r m a l e.

$$SN = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{r^4}{x^3}.$$

K r ü m m u n g s h a l b m e s s e r.

$$\varrho = -\frac{\left[1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{[r^2(x^4 + r^4) - x^6]^{\frac{3}{2}}}{r^3 x^3 (2r^2 - 3x^2)}.$$

Q u a d r a t u r.

$$F = \int y \partial x,$$

$$F = r \int \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} . \partial x.$$

Aufgabe besteht nun darin, den Werth dieses Integrals zu
en; zu diesem Behufe setze man:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = z,$$

ach:

$$r^2 - x^2 = z^2, \quad x = \pm \sqrt{r^2 - z^2} \quad \text{und} \quad \partial x = \frac{-z \partial z}{\pm \sqrt{r^2 - z^2}}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist:

$$F = r \int \frac{-z^2}{[\pm \sqrt{r^2 - z^2}]^2} . \partial z$$

:

$$F = r \int \frac{-z^2 \partial z}{r^2 - z^2}.$$

Ausdruck $\frac{z^2}{r^2 - z^2}$ zerlege man in die Partialbrüche:

$$\frac{z^2}{r^2 - z^2} = \frac{Az}{r + z} + \frac{Bz}{r - z};$$

hnet man nun auf die bekannte Weise die Werthe für A
B, so wird $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$, sonach:

$$\frac{z^2}{r^2 - z^2} = \frac{-z}{2(r + z)} + \frac{z}{2(r - z)}.$$

elst dieser Werthe erhält man:

$$F = \tfrac{1}{2}r\int\frac{z\partial z}{r+z} - \tfrac{1}{2}r\int\frac{z\partial z}{r-z}.$$

Um nun diese beiden Integrale zu finden, setze man $r + z$ so wird $z = v - r$ und $\partial z = \partial v$; ferner sei $r - z = w$, so $z = r - w$ und $\partial z = -\partial w$. Mit Hülfe dieser Werthe hat ma

$$F = \tfrac{1}{2}r\Big[\int\partial v - \int\frac{r\partial v}{v}\Big] - \tfrac{1}{2}r\Big[\int\frac{-r\partial w}{w} + \int\partial w\Big],$$

ein Ausdruck, der nun leicht zu integriren ist; es ist nämlic

$$F = \tfrac{1}{2}r(v - r\log v) - \tfrac{1}{2}r(w - r\log w) + C$$

oder

$$F = \frac{r}{2}(v - w) + \frac{r^2}{2}\log\frac{w}{v} + C.$$

Substituirt man nun wieder rückwärts die Werthe für v und so geht der Ausdruck über in:

$$F = rz + \frac{r^2}{2}\log\frac{r-z}{r+z} + C$$

oder:

$$F = r\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\log\frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} + C.$$

Wird in diesem letzten Ausdrucke für F der Zähler und N ner des Bruches mit $r^2 - \sqrt{r^2 - x^2}$ multiplicirt, so entsteht vor

$$F = r\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\log\frac{[r - \sqrt{r^2 - x^2}][r - \sqrt{r^2 - x^2}]}{[r + \sqrt{r^2 - x^2}][r - \sqrt{r^2 - x^2}]} + C,$$

und nach weiterer Reduction erhält man:

$$F = xy + \frac{r^2}{2}\log\frac{(2r^2 - x^2) - 2xy}{x^2} + C.$$

Kubatur.

Für die Kubatur besteht der Ausdruck:

$$J = \pi\int y^2\partial x;$$

man hat daher für unsere krumme Linie:

$$J = \pi\int\frac{r^2(r^2 - x^2)}{x^2}.\partial x = r^2\pi\int\frac{r^2 - x^2}{x^2}.\partial x.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, verfährt man wie folgt:

$$J = r^2\pi\left[\int\frac{r^2\partial x}{x^2} - \int\partial x\right],$$

rner integrirt:

$$J = r^2\pi(-r^2 x^{-1} - x) + C,$$

:h weiterer Vereinfachung endlich:

$$J = C - \frac{r^2\pi(r^2 + x^2)}{x}.$$

Construction der Curve.

s die Construction der Curve anlangt, so ist dieselbe sehr und leicht auszuführen. Man zeichne sich, wie Taf. II. zeigt, einen Kreis *BNCM*, nehme die Gerade *PQ* als e und *BC* als *X*-Achse an, ziehe alsdann die beiden mit Achse parallelen Geraden *DG* und *EF*, welche die Curve hts nach links hin begrenzen. Um nun die in Rede stehen-rvenpunkte zu erhalten, ziehe man beliebige Strahlen, wie: F', AF'', AF'''...., welche alsdann die Grössen der jewei-rdinaten an der Geraden *DG* oder *EF* abschneiden, als: F', BF'', BF''' ...., die man durch Parallelen mit der e, wie: EF, $E'F'$, $E''F''$, $E'''F'''$.... jedesmal auf die nden Senkrechten: DG, $D'G'$, $D''G''$, $D'''G'''$.... überträgt, lann in: E, E', E'', E'''.... die entsprechenden Curven-zu erhalten. — In Taf. II. Fig. 2. ist der Lauf dieser krum-nie vollständig verzeichnet worden, und es ist zu ersehen r muschelähnlichen Form, dass der Name „die symme-e Conchoïde oder Muschellinie“ ein sehr passender eichnender ist. — Nimmt man nicht die trigonometrische e an, sondern Linien, die parallel derselben sind, so wird, II. Fig. 3. an der stärker angelegten (äusseren) Linie zeigt, e immer flacher, wenn solche Richtlinien ausserhalb des angenommen werden. Schneiden dagegen die Richtlinien is, so krümmt sich die Curve stärker, wie die schwächer e (innere) Linie in Taf. II. Fig 3. anzeigt.

VII.

Beitrag zu der Lehre vom Stosse der Körpe[illegible]

Von

Herrn Doctor *Külp*,

Assistenten der Physik an der technischen Schule in Darms[illegible]

(M. s. die Figur auf Taf. I.)

Ein Körper M trifft gleichzeitig schief eine beliebige [illegible] Kör[illegible]er von den Massen M', M'', M'''..., die in Ruhe sin[illegible] soll [illegible] die Geschwindigkeit aller dieser Körper nach dem [illegible] be[illegible]mmen. AB, AC, AD sind offenbar die Richtungen [illegible] we[illegible]ngen von M', M'', M''' nach dem Stosse. $AF=v$ [illegible] Ge[illegible]hwindigkeit vor dem Stosse, $AE=x$ dieselbe na[illegible] Sto[illegible]se und Winkel $FAE=z$. Man vollende das Parallel[illegible] AH[illegible]FE, alsdann ist AH die verlorene Geschwindigkeit [illegible] Fer[illegible]er AJ, AP, AS die Geschwindigkeiten von M', [illegible] nac[illegible] dem Stosse. Man zerlege sämmtliche Geschwind[illegible] AH[illegible], AJ, AP, AS, jede in eine nach der Richtung [illegible] in e[illegible]ne andere normal darauf. Man hat die Bedingungsgleic[illegible]

$$\text{I.} \quad M.AL = M'.AN + M''.AQ + M'''.AT$$

und

$$\text{II.} \quad M.AG = M'.AO - M''.AR - M'''.AV.$$

[illegible]Wird $\angle BAF$ mit α, $\angle CAF$ mit β und $\angle DAF$ [illegible] zeich[illegible]net, so erhält man:

$$AL = v - x\cos z, \quad AG = x\sin z,$$

$$AJ = AE.\cos BAE = x\cos(\alpha + z),$$

$$AP = AE \cdot \cos CAE = x \cos(\beta - \gamma),$$
$$AS = AE \cdot \cos DAE = x \cos(\gamma - z),$$
$$AN = AM \cdot \cos BAF = x \cos\alpha \cos(\alpha + z),$$
$$AO = AM \cdot \sin BAF = x \sin\alpha \cos(\alpha + z),$$
$$AQ = AP \cdot \cos CAF = x \cos\beta \cos(\beta - z),$$
$$AR = AP \cdot \sin CAF = x \sin\beta \cos(\beta - z),$$
$$AT = AS \cdot \cos DAF = x \cos\gamma \cos(\gamma - z),$$
$$AV = AS \cdot \sin DAF = x \sin\gamma \cos(\gamma - z).$$

Werden die eben mit Hülfe der Figur aufgestellten Werthe benutzt, so gehen die Bedingungsgleichungen I. und II. in folgende **über**:

$$\text{III.} \quad Mv - Mx \cos z = M'x \cos\alpha \cos(\alpha + z) + M''x \cos\beta \cos(\beta - z) + M'''x \cos\gamma \cos(\gamma - z)$$

und

$$\text{IV.} \quad Mx \sin z = M'x \sin\alpha \cos(\alpha + z) - M''x \sin\beta \cos(\beta - z) - M'''x \sin\gamma \cos(\gamma - z).$$

Hieraus berechnet sich:

$$\sin z = \frac{M' \sin\alpha \cos\alpha - M'' \sin\beta \cos\beta - M''' \sin\gamma \cos\gamma}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} (M + M' \sin^2\alpha + M'' \sin^2\beta + M''' \sin^2\gamma)^2 \\ + (M' \sin\alpha \cos\alpha - M'' \sin\beta \cos\beta - M''' \sin\gamma \cos\gamma)^2 \end{array} \right\}}},$$

$$\cos z = \frac{M + M' \sin^2\alpha + M'' \sin^2\beta + M''' \sin^2\gamma}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} (M + M' \sin^2\alpha + M'' \sin^2\beta + M''' \sin^2\gamma)^2 \\ + (M' \sin\alpha \cos\alpha - M'' \sin\beta \cos\beta - M''' \sin\gamma \cos\gamma)^2 \end{array} \right\}}}$$

und

$$x = \frac{Mv}{\left\{ \begin{array}{l} \cos z \cdot (M + M' \cos^2\alpha + M'' \cos^2\beta + M''' \cos^2\gamma) \\ - \sin z \cdot (M' \sin\alpha \cos\alpha - M'' \sin\beta \cos\beta - M''' \sin\gamma \cos\gamma) \end{array} \right\}}.$$

Sind nur zwei gleich harte Körper vorhanden, so ist:

$$x = \frac{Mv}{M + 2M' \cos^2\alpha} \quad \text{und} \quad y = \frac{Mv \cos\alpha}{M + 2M' \cos^2\alpha},$$

die Geschwindigkeiten der gestossenen Körper. Für elastische Körper hat man aber:

$$y = \frac{2Mv\cos\alpha}{M+2M'\cos^2\alpha}$$

und

$$x = v - 2\left(v - \frac{Mv}{M+2M'\cos^2\alpha}\right) = \frac{Mv - 2M'v\cos^2\alpha}{M+2M'\cos^2\alpha}.$$

VIII.

Ueber Erweiterung endlicher Reihen durch beliebige Parameter.

Von

Herrn Doctor *R. Most*

in Stettin.

Abel hat im ersten Bande des Journals von Crelle (p. 159) einen Ausdruck gegeben, von welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist; es lässt sich elementar zeigen, dass die von Abel vorgenommene Erweiterung nicht nur bei dem Binomium, sondern bei jeder endlichen Reihe zulässig ist und leicht von einem auf mehrere Parameter ausgedehnt werden kann. Die Aufgabe besteht allgemein darin, in der Gleichung:

$$1) \ldots \quad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots = B_0 x^n + B_1 (x+\alpha)^{n-1} + B_2 (x+2\alpha)^{n-2} + B_3 (x+3\alpha)^{n-3} + \ldots$$

die Coefficienten B_p durch A auszudrücken. Man erhält durch Induction:

$$2) \ldots \quad pB_p = pA_p - (p-1)(p\alpha)(n-p+1) A_{p-1} + (p-2)(p\alpha)^2 (n-p+2)_2 A_{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1} (p\alpha)^{p-1} (n-1)_{p-1} A_1$$

wo u_r, wie gebräuchlich, den $r$ten Binomial-Coefficienten von u bedeutet. Um die Formel inductorisch zu beweisen, führe man

in der durch Gleichsetzung der Coefficienten von x^{n-p-1} gewonnenen Gleichung:

$$3) \ldots\ldots B_{p+1} = A_{p+1} - (n-p)(p\alpha) B_p$$
$$-(n-p+1)_2[(p-1)\alpha]^2 B_{p-1} - (n-p+2)_3[(p-2)\alpha]^3 B_{p-2} - \ldots$$

für B_p, B_{p-1}, u. s. w. die aus 2) abgeleiteten Werthe ein, so giebt das bekannte Theorem:

$$(p-n)^n - (n+1)(p-n+1)^n + (n+1)_2(p-n+2)^n - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n(n+1)_n p^n + (-1)^{n+1}(p+1)^n = 0$$

den der Gleichung 2) entsprechenden Ausdruck für B_{p+1}.

Sollen die Functionen der Gleichung 1) noch durch einen zweiten Parameter erweitert werden, etwa so, dass

$$B_0 x^n + B_1(x+\alpha)^{n-1} + B_2(x+2\alpha)^{n-2} + \ldots$$
$$= D_0 x^n + D_1(x+\alpha)^{n-1} + D_2(x+2\alpha+\beta)^{n-2} + D_3(x+3\alpha+2\beta)^{n-3} + \ldots$$

würde, so ist zu berücksichtigen, dass der Ausdruck der rechten Seite zu einer Reihe

$$C_0 x^n + C_1(x+\alpha)^{n-1} + C_2(x+\alpha)^{n-2} + \ldots$$

mit dem Parameter $\alpha+\beta$ dieselbe Beziehung hat wie der Ausdruck $\Sigma B_p(x+p\alpha)^{n-p}$ zu $\Sigma A_p x^{n-p}$; auf die Form $\Sigma C_p(x+\alpha)^{n-p}$ ist aber der Ausdruck $\Sigma B_p(x+p\alpha)^{n-p}$ leicht zu bringen. Durch Vermittelung der Grössen C erhält man:

$$4) \ldots\ldots D_{p+1} = B_{p+1} - (p-1)(n-p)\beta B_p$$
$$+ (p-2)(n-p+1)_2 \beta(p\beta+2\alpha) B_{p-1}$$
$$- (p-3)(n-p+2)_3 \beta(p\beta+3\alpha)^2 B_{p-2} + \ldots$$

Will man nach 2) die hypergeometrische Reihe $F(-n, \beta, \gamma, x)$, wo n eine ganze Zahl ist, durch den Parameter δ erweitern, so erhält man:

$$5) \ldots\ldots\ldots F(-n, \beta, \gamma, x)$$
$$= F(1-n, \beta, \gamma, -n\delta) - n_1 \frac{\beta}{\gamma} F(2-n, \beta+1, \gamma+1, (1-n)\delta)[x+(n-1)\delta]$$
$$+ n_2 \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(3-n, \beta+2, \gamma+2, (2-n)\delta)[x+(n-2)\delta]^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n-2} n_2 \frac{\beta^{n-2|1}}{\gamma^{n-2|1}} F(-1, \beta+n-2, \gamma+n-2, -2\delta)[x+2\delta]^{n-2}$$
$$+ (-1)^{n-1} n \frac{\beta^{n-1|1}}{\gamma^{n-1|1}}(x+\delta)^{n-1} + (-1)^n \frac{\beta^{n|1}}{\gamma^{n|1}} x^n.$$

Wird $\beta = \gamma$, so geht die Gleichung 5) über in:

$$6)\ldots(1-x)^n = (1+n\delta)^{n-1} - n[1+(n-1)\delta]^{n-2}[x+(n-1)\delta] + \ldots$$
$$+(-1)^{n-2} n_2(1+2\delta)(x+2\delta)^{n-2} + (-1)^{n-1} n(x+\delta)^{n-2} + (-1)^n.$$

Auch kann man unmittelbar aus 2) die Abel'sche Gleichu erhalten:

$$7)\ldots(x+\xi)^n = x^n + n\xi(x+\alpha)^{n-1} + n_2\,\xi(\xi-2\alpha)(x+2\alpha)^{n-2}$$
$$+ n_3\,\xi(\xi-3\alpha)^2(x+3\alpha)^{n-3} + \ldots\ldots..$$
$$+ n\xi[\xi-(n-1)\alpha]^{n-2}[x+(n-1)\alpha] + \xi(\xi-n\alpha)^{n-1}.$$

IX.

Ableitung der Complanationsformel in Polarcoordin ten aus der Figur.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am Bauei markte u. s. w. in Wien.

Es sei M in Taf. III. Fig. 3. ein Punkt der krummen Fläcl mit den Coordinaten r, α, u für O als Pol. Man lege durch O, und Ox eine Ebene und beschreibe in derselben aus O den u endlich kleinen Bogen $Mn = rd\alpha$. Es sei $MK \perp Ox$, $\angle MK$ $= u$, und man drehe die Ebene OMK um Ox um den unen lich kleinen Winkel du; hierdurch kommt Mn nach pq und ist $Mq = np = MK.du = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha.du$.

Die Figur $Mnpq$ ist ein unendlich kleines Rechteck auf d Oberfläche einer Kugel vom Mittelpunkt O und vom Radius

Werden die Seitenflächen der zugehörigen Kugelpyramide $OMnpq$ erweitert, so entsteht auf der gegebenen Fläche die Figur $MNPQ$ als Differenzial derselben $= dS$. Das Rechteck $Mnpq$ ist die Projection dieses Flächenelementes dS auf die Kugelfläche. Nun ist $ar.Mnpq = r^2 \operatorname{Sin} \alpha\, d\alpha\, du$, bezeichnet also ω den Winkel, welchen die Ebenen der beiden Vierecke unter sich einschliessen, so ist:

$$(1) \ldots\ldots \quad dS = \frac{r^2 \operatorname{Sin} \alpha\, d\alpha\, du}{\operatorname{Cos} \omega}.$$

Zur Bestimmung des Winkels ω aus der Figur dient folgende Betrachtung: Ist $r = f(\alpha, u)$ die Gleichung der Fläche, so ist Nn die Aenderung des Leitstrahls durch die Aenderung von α, $Nn = \left(\frac{dr}{d\alpha}\right) d\alpha$, Qq die Aenderung des Leitstrahls durch die Aenderung von u, $Qq = \left(\frac{dr}{du}\right) du$. Da aber $\frac{Nn}{Mn} = \operatorname{tg} \varepsilon$, $\frac{Qq}{Mq} = \operatorname{tg} \varepsilon'$, so wird durch Substitution:

$$(2) \ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\alpha}\right), \quad \operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{\left(\frac{dr}{du}\right)}{r \operatorname{Sin} \alpha}.$$

Ziehen wir die Geraden NQ, nq, so ist das rechtwinkelige Dreieck nMq die Projection des Dreieckes MNQ und ω ist der Neigungswinkel ihrer Ebenen. Es sei $\angle NMQ = x$, so wird $ar.nMq = \frac{1}{2} MN.MQ.\operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos} \omega = \frac{1}{2} Mn.Mq$, oder weil $Mn = MN.\operatorname{Cos} \varepsilon$, $Mq = MQ.\operatorname{Cos} \varepsilon'$:

$$(3) \ldots\ldots \quad \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} \omega = \operatorname{Cos} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon'.$$

Die von den Geraden MO, MN, MQ in M formirte dreikantige Körperecke ist rechtwinkelig in der Kante MO nach der Construction, und die Kantenwinkel sind x, $90^0 + \varepsilon$, $90^0 + \varepsilon'$; x ist also als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes zu betrachten, dessen Katheten $90^0 + \varepsilon$, $90^0 + \varepsilon'$ sind; mithin ist $\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos}(90^0 + \varepsilon).\operatorname{Cos}(90^0 + \varepsilon')$ oder

$$(4) \ldots\ldots \quad \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} \varepsilon.\operatorname{Sin} \varepsilon'.$$

Eliminirt man aus (3), (4) x, so folgt aus der resultirenden Gleichung:

$$(5) \ldots\ldots \quad \operatorname{Cos} \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \operatorname{tg}^2 \varepsilon'}},$$

oder wenn man für $\operatorname{tg} \varepsilon$, $\operatorname{tg} \varepsilon'$ die früher gefundenen Werthe substituirt:

$$(6) \ldots \quad \operatorname{Cos}\omega = \frac{r\operatorname{Sin}\alpha}{\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\right\}\operatorname{Sin}^2\alpha+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}},$$

und nach (I):

$$dS = r\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\right\}\operatorname{Sin}^2\alpha+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}\,.\,d\alpha\, du,$$

$$(7) \ldots \quad S = \iint r\sqrt{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\right\}\operatorname{Sin}^2\alpha+\left(\frac{dr}{du}\right)^2}\,.\,d\alpha\, du.$$

Diese Formel (7) stammt meines Wissens von Euler her, er gewinnt sie jedoch durch Transformation aus der Complanationsformel in rechtwinkeligen Coordinaten. Eine Ableitung aus der Figur finde ich nur bei Herr, Höhere Mathematik Bd. 2. p. 422., aber der Winkel ω wird dort nicht aus der Figur ermittelt, und diess veranlasste mich zu den vorstehenden Zeilen. Es ist von Wichtigkeit, sich immer zu vergegenwärtigen, dass alle geometrischen Fundamentalformeln, wie jene für Rectification, Quadratur, Complanation, Cubatur, sei es in rechtwinkeligen oder Polarcoordinaten (wenn man nicht die Formel für das eine System in das andere transformirt), der Natur der Sache nach nur aus der Figur abgeleitet werden können. Moigno macht von der Formel (7) eine Anwendung auf das dreiaxige Ellipsoid, Vorl. über die Integralrechnung, deutsch von Schnuse, p. 177. Uebrigens ist diese Formel noch wenig untersucht und angewendet.

Bemerkung des Herausgebers.

Ich darf mir wohl erlauben, bei dieser Gelegenheit auch an meine Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Mit einer lithographirten Tafel. Greifswald und Leipzig. 1857. gr. 8°. zu erinnern, in welchem 282 Seiten umfassenden Buche ich ein vollständiges, ganz unabhängiges — also gar nicht durch Coordinatenverwandlungen an die gewöhnlichen cartesischen Coordinaten sich anschliessendes — System der gesammten analytischen Geometrie für polare Coordinatensysteme aufzustellen gesucht habe. Die in dem vorstehenden Aufsatze von dessen verehrtem Herrn Verfasser aus Betrachtung einer Figur abgeleitete Complanationsformel ist in meinem vorgenannten Werke **Cap. XII.** Complanation und Cubatur krummer Flächen. S. 267. ff. mittelst

einer strengen Gränzenbetrachtung gleichfalls unter Anschluss an eine Figur, wie ich glaube, in völliger Allgemeinheit entwickelt, und sowohl auf das Rotationsellipsoid als auch auf das allgemeine dreiaxige Ellipsoid mit ziemlicher Ausführlichkeit angewandt worden, so dass im letzteren Falle das zu bestimmende, gehörig begränzte Flächenstück wenigstens auf eine blosse Quadratur zurückgeführt worden ist. G.

X.

Bedeutung und Eigenschaften der aus $r = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ entspringenden Curve.

Von

Herrn ***Ludwig Stoeckly***

in Grenchen, Canton Solothurn in der Schweiz.

Bezeichnen wir den Bogen BCD (Taf. III. Fig. 1.) des um A beschriebenen Kreises mit b und die dazu gehörige Sehne BD mit s, so liegt der Schwerpunkt des Bogens b auf dem nach seiner Mitte C gezogenen Radius AC, und es ist bekanntlich, wenn wir den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises mit z und den Radius mit a bezehnen:

$$z = a\left(\frac{s}{b}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Es ist also z eine Function von b, und lassen wir den Bogen vom Punkte B aus stetig wachsen, so ändert sich auch die Lage des Schwerpunktes für denselben stetig. Es soll die Gleichung der

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{\pi}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad St = a, \quad Sn = \frac{4a}{\pi^2}, \quad T = a\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}$$

$$\text{und} \quad N = \frac{2}{\pi}.a\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}.$$

Für den Punkt F ist die Subtangente gleich dem Radius a. In diesem Punkte kann also sehr leicht eine Berührungslinie an die Curve gezogen werden, indem man einfach F und G verbindet.

Für $\varphi = \pi$ wird:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(\pi - \varphi)\cos\varphi + \sin\varphi}{(\pi - \varphi)\sin\varphi} = \frac{0}{0}.$$

Differentiiren wir Zähler und Nenner des Bruchs für sich, um auf den wahren Werth zu kommen, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{0}{0} = \frac{\varphi\sin\varphi - \pi\sin\varphi}{\pi\cos\varphi - \varphi\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{0}{0} = \frac{\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \pi\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi - \pi\sin\varphi - 2\cos\varphi}$$

$$= \frac{0}{2} = 0.$$

Ferner wird für $\varphi = \pi$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \cot\beta = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$St = \frac{a(1-\cos^2\varphi)}{(\pi-\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{0}{0} = \frac{a\sin^2\varphi}{\pi\cos\varphi - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2a\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi - \pi\sin\varphi} = \frac{0}{0} = \frac{2a\cos^2\varphi - 2a\sin^2\varphi}{\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \pi\cos\varphi} = \frac{2a}{0} = \infty;$$

$$Sn = \frac{(\pi-\varphi)a\cos\varphi + a\sin\varphi}{(\pi-\varphi)^2} = \frac{0}{0} = \frac{a\varphi\sin\varphi - a\pi\sin\varphi}{2\varphi - 2\pi} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{a\varphi\cos\varphi + a\sin\varphi - a\pi\cos\varphi}{2} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$T = \sqrt{r^2 + St^2} = \sqrt{a^2 + \infty^2} = \infty; \quad N = \sqrt{r^2 + Sn^2} = \sqrt{a^2} = a.$$

In B bildet also der Radius vector mit der Tangente einen rechten Winkel. Während der Drehung (von der Rechten nach der Linken) wird dieser Winkel immer kleiner, bis er im Centrum A gleich 0 geworden. In B laufen ferner die Tangente und die auf dem Radius vector errichtete Senkrechte parallel, d. h. sie bilden zusammen einen Winkel $= 0$. Dieser Winkel wird während der Drehung immer grösser, sein zuerst unendlich weit entfernter

heitelpunkt T kommt immer näher, bis in A dieser Winkel, ssen Schenkel nun unendlich klein geworden, gleich 90^0 ist.

Die Endpunkte T und N der Subtangente und Subnormale schreiben also während der Drehung selbst wieder krumme nien, deren Gleichungen sehr leicht aus der Gleichung $r = \frac{a\sin\varphi}{\pi - \varphi}$ er Hauptcurve hergeleitet werden können. Für die Curve der ubtangente ist diese selbst Radiusvector, und lässt man die rehung von P aus beginnen, so ist der Polarwinkel der derivirten urve Winkel $PAT = \varphi$ gleich dem Polarwinkel der Hauptcurve in iesem Moment; denn jeder besteht aus einem Rechten und dem Winkel GAT. Nun ist offenbar:

$$r = \frac{a(1-\cos^2\varphi)}{(\pi-\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi}$$

die Polargleichung der betreffenden Curve. Man braucht also nur die Polaraxe, von welcher aus die Drehung für die Hauptcurve beginnt, um 90^0 rückwärts zu drehen, so ist der Ausdruck für die Subtangente der Hauptcurve, wenn man darin $St = r$ setzt, die Gleichung der Curve, welche der Scheitelpunkt des Winkels während der Drehung beschreibt.

Wird die Polaraxe AG, von welcher aus die Drehung für die Hauptcurve beginnt, um drei rechte Winkel rückwärts geschoben, so dass die Drehung in gleichem Sinne jetzt von Q aus beginnt, so ist, wie leicht aus der Figur ersichtlich:

$$r = \frac{(\pi-\varphi)a\cos\varphi + a\sin\varphi}{(\pi-\varphi)^2}$$

die Gleichung der Curve, welche der Endpunkt der Subnormalen während der Drehung beschreibt. Es zeigt Taf. III. Fig. 2. die Hauptcurve, sammt den daraus abgeleiteten Curven der Subtangente und Subnormale. Die Curve der Subnormalen beginnt in m, welcher Punkt in der Mitte von AF liegt, und endet im Centrum A. Die Curve der Subtangente geht vom Centrum A aus durch den Endpunkt G des Radius AG und erstreckt sich ins Unendliche.

Denkt man sich aus dem Punkte M (Taf. III. Fig. 1.) der Curve eine Senkrechte auf AB gefällt, so hat man auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen für den Anfangspunkt A ganz einfach:

$$y = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad x = r\cos\varphi,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (1):

$$y = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}.\sin\varphi,$$

$$x = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}.\cos\varphi.$$

Mit Hülfe dieser zwei Gleichungen lässt sich die Curve ebenfalls leicht construiren. Durch Differentiation folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\varphi\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi}{\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}^2\varphi}{\varphi(1 - \mathrm{tg}^2\varphi) - \mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Setzen wir $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so folgt $2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}^2\varphi = 0$, woraus $\mathrm{tg}\,\varphi = 2\varphi$. Die Curve erreicht also ihr Maximum für einen Winkel φ, dessen Tangente zweimal so gross ist, als der dazu gehörige Bogen. Es findet dies Statt für $\varphi = 66^0 46'$.

Das gleiche Resultat erhält man übrigens noch schneller, wenn man in Bezug auf Polarcoordinaten Winkel α gleich Winkel φ, respective gleich Winkel $(\pi - \varphi)$ setzt und den Ausdruck für $\mathrm{tg}\,\alpha$ benützt.

Das Differential der Fläche der Curve mit Bezug auf die Polargleichung (1) ist:

$$\partial F = \tfrac{1}{2}r^2\partial\varphi \quad \text{oder} \quad \partial F = \tfrac{1}{2}.\frac{a^2\sin^2\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi.$$

Somit ist:

$$F = \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi.$$

Entwickelt man, um integriren zu können, den Ausdruck $\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}$ in eine Reihe, so erhält man zunächst:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\varphi^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{1}{2\varphi^2}.\cos 2\varphi,$$

und wenn man statt $\cos 2\varphi$ die entsprechende Reihe setzt, so ist:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{2\varphi^2} - \frac{1}{2\varphi^2}\left\{1 - \frac{(2\varphi)^2}{1.2} + \frac{(2\varphi)^4}{1.2.3.4} - \frac{(2\varphi)^6}{1.2.3.4.5.6} + - \ldots\right\},$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} = 2\left\{\tfrac{1}{2} - \frac{(2\varphi)^2}{1.2.3.4} + \frac{(2\varphi)^4}{1.2.3.4.5.6} - \frac{(2\varphi)^6}{1.2.3.4.5.6.7.8} + - \ldots\right\}. \quad (4)$$

Diese Reihe muss convergent sein, weil die Cosinusreihe es ist. Man hat übrigens:

$$(n+1)\text{tes Glied} = \frac{(2\varphi)^{2n}}{1.2.3\ldots.2n(2n+1)(2n+2)},$$

$$(n+2)\text{tes Glied} = \frac{(2\varphi)^{2n+2}}{1.2.3....2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)},$$

ithin

$$\frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{(2\varphi)^2}{(2n+3)(2n+4)},$$

nd also die Reihe convergent für $4\varphi^2 < (2n+3)(2n+4)$, d. h. r jeden endlichen Werth von φ. Multiplicirt man Gleichung (4) it $\partial\varphi$ und integrirt, so erhält man:

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi = 2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(2\varphi)^2.\varphi}{1.2.3.4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{(2\varphi)^4.\varphi}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1}{7}\cdot\frac{(2\varphi)^6.\varphi}{1.2....8} + ...\right) + C.$$

Um die ganze Fläche zu erhalten, muss das Integral $\frac{1}{2}a\int\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ genommen werden. Wir erhalten:

$$\tfrac{1}{2}a^2\int_0^\pi\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\partial\varphi = a^2\pi\left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\frac{(2\pi)^2}{1.2.3.4} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{(2\pi)^4}{1....6} - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{(2\pi)^6}{1....8} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{(2\pi)^8}{1....10} - ....\right\}.$$

Berechnet man die Glieder bis zur 8ten Potenz von π, so erhält man die Grösse der Fläche, welche zwischen der Curve und dem Radius AB liegt:

$$F = a^2\pi.0,2410316725.$$

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn $ABCD$ (Taf. III. Fig. 6.) ein Viereck im Kreise ist und e Seiten AB, CD sich in dem Punkte F, die Seiten BC, DA ch in dem Punkte G schneiden; so stehen die beiden Geraden, elche die Winkel F und G halbiren, jederzeit auf einander nkrecht. (Sylvester.)

Lehrsatz.

In Taf. III. Fig. 7. sei AB die grosse Axe einer Ellipse, deren Brennpunkte F und F' sind. In dem Brennpunkte F errichte man auf die grosse Axe AB ein Perpendikel, welches die Ellipse in D schneidet, und mache $DE = FD =$ dem halben Parameter der Ellipse. Beschreibt man dann aus dem Brennpunkte F als Mittelpunkt mit FE als Halbmesser einen Kreis, welcher die Ellipse in G schneidet, und zieht die Gerade FG; so ist FG die gerade Linie des kürzesten Falls von dem Brennpunkte F bis zur Ellipse. (E. Mc Cormick in The Educational Times. Vol. XIX. Avril 1866. pag. 18.)

XII.

Miscellen.

Geometrischer Satz.

Von Herrn Dr. K. Weihrauch in Arensburg auf der Insel Oesel in Livland.

Lehrsatz.

Ist ab in Taf. III. Fig. 4. die Seite des regelmässigen Vierzehnecks im Kreise um o, ferner $ac = ab$ gemacht, so ist im Dreiek oac die grösste Höhe gleich der Summe der beiden Kleineren, $od = ae + cf$.

Beweis. 1) Es werde $od = h_1$, $ae = h_2$, $cf = h_3$, $ao = r$, $ab = ac = x$ gesetzt. Es ist $h_1 . ac = h_2 . oc = h_3 . ao$, also:

$$h_2 + h_3 = h_1 . ac \cdot \left(\frac{1}{oc} + \frac{1}{ao}\right).$$

Nun ist $oc = r - bc$, $bc : ab = ab : ao$, $bc = \frac{x^2}{r}$, $oc = \frac{r^2 - x^2}{r}$; also:

$$h_2 + h_3 = h_1 x \left(\frac{r}{r^2 - x^2} + \frac{1}{r}\right) = h_1 \frac{2r^2x - x^3}{r^3 - rx^2}.$$

Aus der Gleichung für die Seite des regelmässigen Vierzehnecks:

$$x^3 - rx^2 - 2r^2x + r^3 = 0$$

zieht man sofort $2r^2x - x^3 = r^3 - rx^2$, also $h_2 + h_3 = h_1$, w. z. b. w.

2) Der Satz lässt sich übrigens auch ohne Zuziehung der Gleichung des regelmässigen Vierzehnecks beweisen, wenn man den im Archiv Bd. XLII. S. 229. von dem Herrn **Herausgeber** aufgestellten Satz anwendet.

Beachtet man, dass

$$\angle aoc = \tfrac{2}{7}R, \quad \angle abc = \angle acb = \tfrac{6}{7}R, \quad \angle cao = \tfrac{4}{7}R, \quad \angle aco = \tfrac{8}{7}R,$$

so hat man:

$$\angle aco = 2 . \angle cao, \quad \angle cao = 2 . \angle aoc.$$

Nach dem citirten Satze ist dann:

$$ao^2 = co^2 + co . ac \quad \text{oder} \quad ao^2 = co . (co + ac),$$

$$co^2 = ac^2 + ac . ao \quad \text{oder} \quad ac . ao = (co + ac)(co - ac);$$

und durch Division:

$$\frac{ao}{ac} = \frac{co}{co - ac}.$$

Daraus:

$$ao . co = ao . ac + ac . co,$$

$$\frac{1}{ac} = \frac{1}{co} + \frac{1}{ao};$$

d. h. $h_1 = h_2 + h_3$, w. z. b. w.

Durch Addition der ursprünglichen Gleichungen entsteht:

$$ao^2 = ac . (ao + oc + ac),$$

d. h. die grösste Seite ist die mittlere Proportionale zwischen der kleinsten und dem ganzen Umfange.

Von dem Herausgeber.

Nach einer Bemerkung des Herrn **James Booth** — wenigstens entlehne **ich** sie von **ihm** — ist jede sechsziffrige decadische

Zahl von der Form $ab7ab7$ durch 7 und 13 ohne Rest theilbar. Der Beweis ist sehr leicht. Es ist nämlich:

$$ab7ab7 = a.100000 + b.10000 + 7.1000 + a.100 + b.10 + 7$$
$$= a.100100 + b.10010 + 7.1001,$$

und weil nun:

$$100100 = 14300.7 = 7700.13,$$
$$10010 = 1430.7 = 770.13,$$
$$1001 = 143.7 = 77.13$$

ist; so ist:

$$ab7ab7 = (a.14300 + b.1430 + 7.143).7$$
$$= (a.7700 + b.770 + 7.77).13,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Von dem Herausgeber.

Wenn

$$a = x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$
$$b = x + y + z + u$$

ist, so ist:

$$4a - b^2 = (x + y - z - u)^2 + (x + z - y - u)^2 + (x + u - y - z)^2.$$

Punktweise Construktion des Ellipsoides aus den Axen.

Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

Man construire aus O, dem Mittelpunkte des Ellipsoides, mit den Halbaxen a, b, c desselben, als Radien, drei concentrische Kugeln, ziehe aus O einen beliebigen Strahl, welcher die drei Kugeln in A, B, C schneidet; α, β, γ seien die drei 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche dieser Strahl mit den positiven Halbaxen des in O rechtwinkeligen Coordinatensystems einschliesst. Legt man nun durch A eine Ebene parallel zur Ebene (yz), durch B eine Ebene parallel zur (xz), durch C eine Ebene parallel zur (xy), so sind die Gleichungen dieser Ebenen:

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad y = b\,\mathrm{Cos}\,\beta, \quad z = c\,\mathrm{Cos}\,\gamma;$$

ihr Durchschnittspunkt M liegt auf der Oberfläche des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Bezeichnet R die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkt O, so ist:

$$R=\sqrt{a^2\mathrm{Cos}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\beta+c^2\mathrm{Cos}^2\gamma},$$

und sind λ, μ, ν die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche der Strahl OM mit den positiven Halbaxen der Coordinaten einschliesst, so ist:

$$\mathrm{Cos}\,\lambda=\frac{a\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{R},\quad \mathrm{Cos}\,\mu=\frac{b\,\mathrm{Cos}\,\beta}{R},\quad \mathrm{Cos}\,\nu=\frac{c\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{R}.$$

Diese Construktion für Punkte eines Ellipsoides ist einer bekannten Construktion der Ellipse analog, und da ich mich nicht erinnere, dieselbe schon irgendwo gelesen zu haben, so erlaubte ich mir, sie hier mitzutheilen.

Sehr wichtige literarische Nachricht!

Da, indem ich Dieses schreibe, der diesem Hefte beizugebende Literarische Bericht No. CLXXXIX. bereits geschlossen ist, so halte ich es für meine Pflicht, den mir am Schlusse dieses Heftes noch dargebotenen Raum zu benutzen, um den Lesern so bald als irgend möglich eine mir so eben aus Rom zugegangene wichtige literarische Nachricht mitzutheilen, welche ich nicht glaube bis zu dem Erscheinen des nächsten Literarischen Berichts verschieben zu dürfen.

Der berühmte und hochverdiente Herr D. Baldassarre Boncompagni, dei Principi di Piombino in Rom, welchem die ältere Literatur und die Geschichte der Mathematik die vielfachsten und wichtigsten Bereicherungen und grössere Beförderung verdanken, als irgend einem anderen Gelehrten vor ihm, wird vom Januar dieses Jahres an auf seine eigenen Kosten eine der Bibliographie und Geschichte der Mathematik eigens gewidmete Zeitschrift herausgeben, was einen Jeden, der die grossen Verdienste, welche Herr Boncompagni sich bereits in so hohem Maasse um diese Zweige unserer Wissenschaft erworben hat, kennt und nur einigermassen zu würdigen versteht, mit der grössten Freude und dem grössten Danke erfüllen muss, da zu einem so wichtigen Unternehmen unter den jetzigen Mathematikern gewiss Niemand mehr geeignet und im Stande ist, als gerade Herr Boncompagni. Der Raum fehlt mir jetzt, mich

weiter über dieses neue Unternehmen von dem unschätzbarsten Werthe zu äussern; ich sehe aber dem Erscheinen der ersten Lieferung mit dem grössten Verlangen entgegen, und werde dann nicht säumen, die Leser weiter mit dieser wichtigen neuen Zeitschrift bekannt zu machen, indem ich mich für jetzt auf die Mittheilung der beiden folgenden, von Herrn Boncompagni in französischer Sprache erlassenen, zunächst in Briefform an einzelne Gelehrte gerichteten Ankündigungen zu beschränken genöthigt bin.

Greifswald im Januar 1868. Grunert.

Monsieur

Dans le mois courant on commence à publier a Rome un recueil mensuel, in 4to, intitulé — BULLETINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE —. Le soussigné ose vous prier, Monsieur, de vouloir bien lui envoyer par la poste quelque écrit relatif à la bibliographie ou à l'histoire des sciences mathématiques et physiques, et permettre que ces écrits soient publiés dans ce recueil. Toute analyse, notice ou récension d'ouvrages anciens ou modernes relatifs à ces sciences, pourra être publiée dans ce recueil.

Rome 1 janvier 1868.

B. Boncompagni.

Le recueil intitulé „BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE" est un ouvrage périodique dont on publie chaque mois un cahier de trois feuilles au moins, et de cinq au plus. Ces cahiers se vendent à Rome dans l'imprimérie des sciences mathématiques et physiques (Via Lata, nº. 211 A) au prix de 35 centimes la feuille. Les personnes qui voudront bien envoyer des érits destinés à être publiés dans ce recueil, sont priées de les remettre au bureau de la poste dans des plis adressés à D. B. Boncompagni à Rome. Ceux de ces écrits qui seront redigés en italien, en français ou en latin, seront publiés textuellement dans ce Bulletin.

XIII.

es premières notions de la théorie des fonctions elliptiques.

Par
Monsieur Dr. *E. G. Björling*
à Westerås en Suède.

(Traduit du récit annuaire pour le Lycée roy. de Westerås en Suède 1866.)

Il y a sans doute plusieurs qui, au premier coup-d'oeil sur ce mémoire, au moins s'étonnent de sa publication dans un temps où la connaissance des fonctions elliptiques est déjà presque devenue la propriété de chacun, et — ce qu'il y a de plus — où l'on aborde ordinairement cette étude avec des vues bien plus vastes que celles qui sont offertes dans ce travail. Mais, voici en peu de mots le motif de l'auteur! S'étant occupé pendant quelques années de ces fonctions intéressantes, il lui a semblé que l'entrée même de cette belle région d'analyse est devenue pour le commençant — peut-être à cause de ces vastes vues mêmes — si extrêmement épineuse qu'il serait une vraie preuve de bienveillance que de lui en faciliter l'accession. C'est cette intention bienveillante qui a été la cause motive de ce travail. Qu'il soit aussi regardé de ce point de vue!

Au reste il y aurait beaucoup à dire en préface sur la matière même de ce mémoire, pas précisément pour l'instruction du commençant, mais comme une explication de l'auteur devant les savants. Mais le peu d'espace lui en permet seulement quelques mots.

Vouloir introduire le commençant dans la région des fonctions circulaires moyennant une définition qui convient à la notion générale de fonction circulaire, quel que soit l'argument, imaginaire ou réel, voilà ce que serait — avouons-le — à trop demander au pouvoir humain. Un tel essai échouerait sans doute, tant qu'il puisse sembler que ce procédé serait le plus juste et le plus direct. Mais s'il en est ainsi des fonctions circulaires, n'est-il pas aussi le cas — et à plus forte raison, s'il est possible — des fonctions elliptiques? Au moins l'auteur n'en

éprouve aucun doute. Il faut nécessairement, croit-il, faire c
mencer l'étudiant avec des arguments réels; donc point
tout l'introduire par des définitions générales, qui convien
à la notion „fonctions elliptiques d'un argument quelconque'
mais par des préliminaires, qui conviennent précisément
notion: fonctions elliptiques d'argument réel et bien
module positif < 1 (ou même zéro). Voilà le principe
l'auteur a cherché d'avoir toujours présent à l'esprit; voilà a
son motif pour ne s'occuper dans ce mémoire introd
toire que de fonctions d'arguments **réels** [2]).

Mais de l'autre coté on ne doit point par de tels prépar
trop retarder ceux qui ont pour dessein d'aller jusqu'au fond
choses.

Ce n'est pas sans un peu d'assurance qu'ose espérer l'au
d'avoir satisfait par le mémoire présent à ces deux prétenti
Et plus encore: il y a sans doute plusieurs qui — en cons
rant toute l'utilité qu'a apportée la théorie des fonctions circula
d'argument réel — se contentent de la connaissance des fonct
elliptiques dans ce sens limité. Eh bien! l'auteur ose m
présumer que ces personnes peuvent, moyennant l'instruction
donnée, poursuivre leur chemin sans être égarées par
fausses indications, malheureusement pas trop rares m
aujourd'hui. Ce sont en effet ces sortes d'indications qui ont
spiré à l'auteur l'idée d'essayer de délivrer d'autres des diffic
et des désagréments auxquels il a été exposé lui-même au c
mencement de ces études.

Maintenant aussi quelques mots sur des **spécialités!**

Il y a une chose capitale, chose à laquelle — selon ce qui n
semble — les auteurs même de notre temps n'ont attribué as
d'importance, c'est qu'il ne faut soumettre nullement ni la no
„fonctions elliptiques“ ni mêmes les propriétés fondam
tales de ces fonctions à l'intégrale elliptique (39) [3]) a
toutes ses subtilités. Ici (§§. 1 et 2) nous avons eu soin de n
conformer, comme il faut, à ce principe, et du reste nous av
épargné au commençant la peine de tous embarras sur la val

---

1) Voilà ce qui ne serait pas moins mal-à-propos que de dé
au premier abord les fonctions circulaires p. ex. par une certaine é
tion différentielle.

2) Par-là nous avons aussi indiqué nos motifs pour passer ici
silence la double périodicité des fonctions elliptiques.

3) Voir le §. 3 ci-dessous.

de cette intégrale pour x numér. >1. Et, en effet, que cette dernière „crux" dans la théorie de l'intégrale elliptique ne touche nullement la théorie introductive des fonctions elliptiques dont il s'agit ici, c'est ce qui doit être évident pour quiconque en peut encore hésiter, de ce que nous avons dit sur cette intégrale dans les §§. 3 et 5.

A propos de celà, l'auteur ose espérer que la déduction très-simple de la relation (53) ou (52) dans le §. 3 soit jugée convenable.

Comme la plupart de ses contemporains l'auteur aussi considère les notions anciennes de Jacobi

(1) . . . . $\sin \operatorname{am}(a)$ et $\cos \operatorname{am}(a)$

comme peu convenables à la théorie générale; il est même convaincu qu'elles n'y peuvent être employées sans risque. Pour sa part il souhaiterait — comme on le peut voir dans le §. 4 — qu'elles fussent remplacées (dans cette théorie générale) par les notations significatives et plus courtes

(2) . . . . $\mathfrak{S}(a)$ et $\mathfrak{C}(a)$ [1].

Dans ce même §. 4 l'auteur a aussi énoncé son opinion qu'on peut même dans le cours préparatif (argument réel, module $\leqq 1$) employer avec profit cette espèce de notations (soit par les lettres $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}$ ou par les λ et μ ou d'autres) qui sont bien propres à indiquer la dépendance immédiate de l'argument sans l'intervention de la fonction „amplitude", — après avoir pourtant commencé par employer les notations primitives (1), devenues à jamais mémorables.

Quant à la notation

(3) . . . . $\Delta \operatorname{am}(a)$

pour la troisième des fonctions „simples", l'auteur s'accorde avec la plupart d'autres à l'élider même de la théorie préparative, comme on le voit déjà de la formule (7) dans le §. 1. En échange il propose la notation

$$\mathfrak{D}(a),$$

---

1) Plutôt que p. ex. par celles de MM. Briot et Bouquet

$$\lambda(a) \text{ et } \mu(a)$$

ou par celles de Gudermann

$$\operatorname{sn}(a) \text{ et } \operatorname{cn}(a), \text{ etc.}$$

analogue aux deux premières (2), d'autant mieux qu'elle rappelle nettement l'identité de cette fonction à la fonction toujours mémorable Δam. Motiver cette élision-là n'est plus nécessaire ici. — Du reste, il n'est pas besoin de mentionner ici que l'exclusion même de ce signe dès le commencement déjà et son remplacement par une notation analogue aux deux premières (2) motivent aussi l'introduction de celles-ci à la première occasion convenable, et qu'en effet une occasion très-favorable de faire cet échangement s'offre dès qu'il s'agira premièrement des formules d'addition.

Que l'auteur a choisi la formule (66) ou (72) pour fondement des formules d'addition, ainsi que sa méthode de la déduire, cela indique que lui, comme la plupart des auteurs, se conforme à Lagrange dans cette partie. Peut-être trouvera-t-on que son remaniement de la déduction de ce grand géomètre ait l'avantage de soulager le travail du commençant, et — bien entendu — sans dommage de l'exactitude. Du reste il ose croire que sa méthode de déduire les autres formules d'addition de cette relation fondamentale sera trouvée préférable aux autres méthodes employées jusqu'ici, à cause de sa simplicité et parce qu'elle n'exige point de considération de fonctions d'arguments imaginaires [1].

L'avantage, ou plutôt la nécessité d'examiner séparément la position $k = 1$, avant de discourir de fonctions elliptiques à „module $<$ ou $= 1$“, ne semble malheureusement pas être assez observé de tous auteurs; donc notre §. 5 sera sans doute jugé bien à sa place, — jugement que mérite aussi, comme j'espère, la Note à la fin.

Enfin un mot. Il peut se faire qu'on se soit attendu, dans ce mémoire, à quelque histoire du sujet en question. Pourtant s'il en est ainsi, on n'a pas assez observé ce que nous avons dit ci-dessus sur le but de ce mémoire. En effet, la dite histoire n'apporte en rien de telles difficultés pour le commençant

---

1) Que l'on compare à elle p. ex. la déduction de Jacobi dans le journal de Crelle, T. 39 pag. 325—328; ou celle de Mr. le Prof. O. J. Broch dans une Note „Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques“ insérée dans les Comptes Rendus T. 69 (1864) pag. 999; ou bien celles qui se trouvent dans la „Theorie der elliptischen Functionen“ de Mr. Durège ou dans „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen“ de Mr. Schellbach.

que nous y avons mentionnées; du reste il faut convenir que le temps propre à commencer l'étude de cette histoire ne sera venu qu'après qu'on s'est instruit des éléments qui font l'objet de ce mémoire.

---

§. 1.

Définitions et formules fondamentales.

1. Si, en partant de zéro, la variable réelle φ passe continûment par toutes les valeurs possibles, positives ou négatives, la fonction

$$(1) \ldots\ldots \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ ou, pour abréger, } F(\varphi, k)$$

(la constante ou, comme on dit ordinairement, le module k satisfaisant aux conditions $1 > k \geqq 0$)

variera elle-même continûment, puisque la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ sous le signe d'intégration jouit elle-même de cette propriété. Pour $\varphi = 0$ elle deviendra zéro; du reste on aura évidemment

$$(2) \ldots\ldots\ldots F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k),$$

et $F(\varphi, k)$ sera constamment du même signe que φ. De plus, la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ étant toujours positive, la valeur numérique de la fonction (1) croît constamment et indéfiniment [1]) avec celle de φ; par suite cette fonction est elle-même capable de toutes valeurs réelles possibles et en obtiendra des différentes pour des valeurs différentes de φ.

De-là il suit que, quelle que soit la quantité réelle donnée α, il y aura toujours une valeur de φ, et une seule, qui satisfait à l'équation

$$(3) \ldots\ldots F(\varphi, k) \left(= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right) = \alpha.$$

---

1) En effet la fonction $F(\varphi, k)$ est pour chaque valeur de φ numériquement $\geqq \int_0^{\varphi} d\varphi$ (ou φ), selon que k est positif (<1) ou zéro.

De plus, si l'on désigne par

(13) K la valeur de $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ ou $F(\frac{1}{2}\pi, k)$ [1]),

on aura encore, en vertu de la même définition ci-dessus, non seulement

(14) . . . . $\mathrm{am}(K, k) = \frac{1}{2}\pi$,

et par suite

(15) .... $\sin\mathrm{am}\, K = 1$, $\cos\mathrm{am}\, K = 0$, $\mathfrak{D}(K, k) = \sqrt{1-k^2} = k'$ (voir ci-dessous),

mais aussi pour chaque argument ($\mathfrak{A}$), numériquement $< K$,

(16) . . . . $\mathrm{am}(\mathfrak{A}, k)$ numér. $< \frac{1}{2}\pi$,

et par suite

(17) $\begin{cases} \sin\mathrm{am}\,\mathfrak{A} \text{ constamment de même signe que l'argument } (\mathfrak{A}), \\ \cos\mathrm{am}\,\mathfrak{A} \text{ toujours positif } = \sqrt{1-\sin^2\mathrm{am}\,\mathfrak{A}}. \end{cases}$

Observ. On désigne ordinairement l'expression $\sqrt{1-k^2}$ par k' et par le nom „module complémentaire de k" ou, simplement, „le complément du module k" [2]).

Mais — demandera-t-on peut-être ici — comment trouver les valeurs de ces fonctions $\sin\mathrm{am}(\alpha)$, $\cos\mathrm{am}(\alpha)$, $\mathfrak{D}(\alpha)$ pour un α quelconque? Le paragraphe suivant nous instruira beaucoup sur cette question cardinale. Nous y trouverons en effet que ces fonctions (6) sont (de même que les fonctions circulaires sinus et cosinus) des fonctions périodiques de l'argument (α), et

---

1) D'où résulte que, pour $k=0$, K est $=\frac{1}{2}\pi$, ou (pour abréger)

$$K_{(k=0)} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Quant à l'évaluation de K pour un autre module quelconque, nous en dirons ci-dessous tant qu'il sera nécessaire ici. En vertu de la définition (13) il est évidemment toujours > 0. En attendant nous le considérons comme un nombre connu (fonction de k, naturellement).

2) Vu qu'en effet

$$k^2 + k'^2 \text{ est } = 1,$$

ou k'^2 le complément à 1 de la quantité k^2.

r suite que, pour trouver leurs valeurs pour un argument réel elconque, il ne faut que trouver leurs valeurs pour chaque argument num. $\leqq K$.

§. 2.

ır la périodicité et les coëfficients différentiels des fonctions elliptiques.

1. On voit aisément [1]) que chaque argument numér. $> K$ est

(18) . . . = quelque argum. $\mathfrak{A}$ (num. $\leqq K) + 2\mu K$,

(μ étant de valeur numér. entière).

Etant ainsi, cherchons d'abord

$\text{am}(\mathfrak{A} + 2mK)$, m nombre entier,

à d. la valeur de ψ qui satisfait à l'équation

$$F(\psi, k) =]\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \mathfrak{A} + 2mK$$

$$= \mathfrak{A} + 2m\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

plutôt — puisque, n étant nombre entier, évidemment

$$n\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ est } = \int_0^{n.\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ [2])}, \text{ —}$$

---

1) En effet, il suffira évidemment de la seule inspection de cette gne-çi:

...... $-3K$ $-2K$ $-K$ 0 K $2K$ $3K$ $4K$ ......

2) En effet ce dernier membre est

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \ldots + \int_{(n-1).\frac{1}{2}\pi}^{n.\frac{1}{2}\pi};$$

plus

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}, \text{ si l'on pose } \chi = \pi - \varphi,$$

$$\text{donc } = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

la valeur de ψ qui satisfait à l'équation

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \int_0^{m\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \mathfrak{A}.$$

Ce premier membre est $= \int_{m\pi}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$

$$= \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}},$$

si nous désignons la différence $\psi - m\pi$ par ω; donc notre équation se réduit à

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} = F(\omega, k) = \mathfrak{A},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\omega =) \psi - m\pi = \operatorname{am} \mathfrak{A},$$

$$\psi = m\pi + \operatorname{am} \mathfrak{A}.$$

Donc nous avons trouvé

(19) . . . . . . $\operatorname{am}(\mathfrak{A} + 2mK) = \operatorname{am} \mathfrak{A} + m\pi.$

De plus, comme il s'en suit, en vertu de la formule (11),

(19') . . . . . $\operatorname{am}(\mathfrak{A} - 2mK) = \operatorname{am} \mathfrak{A} - m\pi$ [1]),

il en est constaté qu'en effet cette rélation

(20) . . . . . . $\operatorname{am}(\mathfrak{A} + 2\mu K) = \operatorname{am} \mathfrak{A} + \mu\pi$

subsiste pour chaque argument numériquement $> K$.

Il en suit aisément, pour un argument (réel) quelconque, soit-il numér. $>$ ou $=$ ou $< K$,

---

puis

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}},$$

si l'on pose maintenant $\chi = \varphi - \pi$,

donc $= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$

etc. etc.

1) En effet les formules (19) et (11) donnent

$$\operatorname{am}(-\mathfrak{A} - 2mK) = \operatorname{am}(-\mathfrak{A}) - m\pi,$$

ou, $-\mathfrak{A}$ remplacé par $\mathfrak{A}$, la formule même (19').

(21) . . . . $\operatorname{am}(\alpha + 2\mu K) = \operatorname{am}\alpha + \mu\pi$ [1]),

et par conséquent

$$(22) \ldots \begin{cases} \sin\operatorname{am}(\alpha+2\mu K) = (-1)^\mu \sin\operatorname{am}\alpha, \\ \cos\operatorname{am}(\alpha+2\mu K) = (-1)^\mu \cos\operatorname{am}\alpha, \\ \mathfrak{D}(\alpha+2\mu K) = \mathfrak{D}(\alpha). \end{cases}$$

De ces formules (21) et (22) il est évident non-seulement que l'amplitude et les fonctions elliptiques peuvent être evaluées pour un argument quelconque num. $> K$, pourvu qu'elles soient connues pour tous arguments num. $\leqq K$, et de plus comment cette évaluation doit se faire, mais encore — chose cardinale — que ces trois fonctions

(23) . . . . . . $\sin\operatorname{am}\alpha, \quad \cos\operatorname{am}\alpha, \quad \mathfrak{D}(\alpha)$

jouissent de la propriété d'être des fonctions périodiques de α, de même que les circulaires $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. En effet les formules (22) montrent que les fonctions sin am et cos am ont la même valeur, pour un argument α quelconque et pour ce même α augmenté ou diminué par $4K$ ou quelqu'un de ses multiples; et que la fonction $\mathfrak{D}(\alpha)$ a la même valeur pour α et pour $\alpha+\mu(2K)$; ou, en d'autres termes, que tous les arguments dont la différence est $4K$ ou quelqu'un de ses multiples, ont le même sin am et cos am, et que tous les arguments, dont la différence est $2K$ ou quelqu'un de ses multiples, ont le même $\mathfrak{D}$.

Donc on peut aussi dire que la quantité $4K$ suffit pour indiquer la valeur de la période de sin am et de cos am, et la quantité $2K$ celle de la période de $\mathfrak{D}$.

Mais ajoutons aussi qu'elles ne font que suffire exactement.

Car, puisqu'il faut — comme on sait bien — que am α passe par l'intervalle 2π, pour que les valeurs de sin (am α) reviennent périodiquement, il est aussi nécessaire pour cela même que l'argument α passe par l'intervalle $4K$, vu que l'équation

(24) . . . . $\operatorname{am}(\alpha + \xi) = \operatorname{am}\alpha + 2\pi$

---

1) La vérité de cette formule pour α num. $\overline{\overline{<}} K$ est constatée par (20). Et pour chaque α num. $> K$, c. à d.

$$= \mathfrak{A} + 2\nu K \quad (\nu \text{ entier}),$$

on peut la vérifier facilement à l'aide de (20).

mots sur les relations importantes entre les fonctions elliptiq et leurs dérivées du premier ordre.

Puisque $\mathrm{am}\,\alpha$ est précisément la valeur de φ qui satisfait l'équation (3), on aura évidemment, pour chaque valeur de

$$(31)\ldots\ldots \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}=\right)\frac{d(\mathrm{am}\,\alpha)}{d\alpha}=\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}=\mathfrak{D}(\alpha),$$

et par suite

$$\begin{cases} d(\sin\mathrm{am}\,\alpha)=d\sin\varphi= \cos\varphi d\varphi= \cos\mathrm{am}\,\alpha.\mathfrak{D}(\alpha)\,d\alpha, \\ d(\cos\mathrm{am}\,\alpha)=d\cos\varphi=-\sin\varphi d\varphi=-\sin\mathrm{am}\,\alpha.\mathfrak{D}(\alpha)\,d\alpha, \\ d\mathfrak{D}(\alpha)=d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=-k^2\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\,\alpha d\alpha; \end{cases}$$

ou

$$(32)\ldots \begin{cases} \dfrac{d\sin\mathrm{am}\,\alpha}{d\alpha}= \cos\mathrm{am}\alpha\mathfrak{D}(\alpha), \\ \dfrac{d\cos\mathrm{am}\,\alpha}{d\alpha}=-\sin\mathrm{am}\alpha\mathfrak{D}(\alpha), \\ \dfrac{d\mathfrak{D}(\alpha)}{d\alpha}=-k^2\sin\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\alpha; \end{cases}$$

relations qui méritent en vérité la plus grande atte tion [1]).

Elles sont vraies, comme nous l'avons dit, pour tout valeurs (réelles) de α. Mais puisqu'on a toujours

$$(33)\quad \mathfrak{D}(\alpha)=\sqrt{1-k^2(\sin\mathrm{am}\,\alpha)^2}=\sqrt{k'^2+k^2(\cos\mathrm{am}\,\alpha)^2},$$

et, du moins pour α numér. $\leqq K$,

$$(34)\ldots\ldots \begin{cases} \cos\mathrm{am}\,\alpha=\sqrt{1-(\sin\mathrm{am}\,\alpha)^2}, \\ k\cos\mathrm{am}\,\alpha=\sqrt{\mathfrak{D}^2(\alpha)-k'^2}; \end{cases}$$

$$(35)\ldots \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,\alpha=\pm\sqrt{1-(\cos\mathrm{am}\,\alpha)^2}, \\ \text{suivant que } \alpha \text{ est positif ou négatif;} \\ k\sin\mathrm{am}\,\alpha=\pm\sqrt{1-\mathfrak{D}^2(\alpha)}, \\ \text{(de même);} \end{cases}$$

il en résulte que les relations

---

1) On voit que les deux premières se réduisent pour $k=0$ à d formules déjà bien connues.

$$27) \ldots \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(\alpha \pm 2K) = -\sin\mathrm{am}\,\alpha, \\ \cos\mathrm{am}(\alpha \pm 2K) = -\cos\mathrm{am}\,\alpha, \\ \mathfrak{D}(\alpha \pm 2K) = \quad \mathfrak{D}(\alpha); \end{cases}$$

nt les dernières, en vertu des formules (12), donnent aussi les marquables [1]):

$$(28) \ldots \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(2K-\alpha) = \quad \sin\mathrm{am}\,\alpha, \\ \cos\mathrm{am}(2K-\alpha) = -\cos\mathrm{am}\,\alpha, \\ \mathfrak{D}(2K-\alpha) = \quad \mathfrak{D}(\alpha). \end{cases}$$

Mais — les relations entre les valeurs des fonctions elliptiques pour α et celles pour $[\alpha \pm$ un multiple impair de $K]$? Les formules (22) n'en donnent pas avis immédiatement, comme on le voit; mais il ne faut qu'observer que

$$(29) \ldots \ldots \alpha + (2m \pm 1)K \text{ est } = (\alpha \pm K) + 2mK,$$

pour apercevoir qu'en effet nos formules (22) donnent aussi la réponse de cette question, pourvu que l'on connaisse les relations entre les valeurs des fonctions elliptiques pour α et celles pour l'un et l'autre des deux

$$(30) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \alpha \pm K.$$

C'est de ce que nous serons informés dans le paragraphe suivant, attendu que nous y trouvions les relations importantes entre les valeurs des fonctions elliptiques pour un argument α quelconque et celles pour son „complément“

$$K - \alpha.$$

Observons aussi déjà qu'en outre ces dernières relations nous feront avancer un nouveau pas vers la solution de la question cardinale indiquée dans la fin du §. 1. En effet on conçoit aisément qu'en vertu de ces relations la dite question sera reduite à celle qui se rapporte à des arguments positifs $\leqq \frac{K}{2}$.

2. Avant de finir ce paragraphe, nous ajouterons quelques

---

1) Des deux premières de celles-ci les formules bien connues

$$\sin(\pi - \alpha) = \quad \sin\alpha,$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

sont des cas spéciaux. La troisième donne, dans le même cas (mod. $=0$),

$$\mathfrak{D}(\pi - \alpha) = \mathfrak{D}(\alpha) = 1.$$

dont l'intégrale bien connue:

$$(40) \ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

n'est évidemment qu'un cas très-spécial.

De même que cette intégrale spéciale, aussi la générale (varie-t-elle continûment avec x (réel), tant que x n'excè les limites ± 1 [1]). Attendu qu'en outre sa valeur (pour cha valeur de x) dépende de la constante k, nous désignerons p abréger cette fonction générale, supposé toutefois que x soit pas numér. > 1, par

$$U_{x,k},$$

admettant ainsi pour définition

$$(41) \quad U_{x,k} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (x \text{ num.} \leqq 1);$$

d'où en particulier

$$(41') \quad U_{x,0} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad (x \text{ num.} \leqq 1).$$

Cela posé, nous avons évidemment

$$(42) \ldots\ldots \quad U_{0,k} = 0, \quad U_{-x,k} = -U_{x,k},$$

et, pour chaque valeur de x numér. $\leqq 1$,

$$(43) \quad U_{x,k} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,k), \text{ savoir } \varphi = \arcsin x,$$

ou, en un mot,

$$(44) \ldots\ldots\ldots \quad U_{x,k} = F(\arcsin x, k)$$

constamment du même signe que x et — [puisque la dérivée

---

ont donné naissance à toute cette partie inépuisable de l'Analyse (est appelée la théorie des fonctions elliptiques. — Nous n'éc vons pas d'histoire ici; toutefois les noms Euler et Legendr Abel et Jacobi soient au moins cités ici, en mémoire des gra auteurs et pour l'encouragement des commençants.

1) Voir la Note à la fin.

$$\frac{d(U_{x,k})}{dx}, \quad \text{c. à d.} \quad \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

t toujours positive] — numériquement croissante avec x jus-
'aux limites

$$(45)\ \ldots \quad \begin{cases} U_{1,k} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K, \\ U_{-1,k} = -U_{1,k} = -K; \end{cases}$$

onc cette fonction est capable de toutes valeurs possibles entre
$\pm K$, et en obtiendra des différentes pour des valeurs différentes de x.

Il en resulte que, quelle quantité réelle $\mathfrak{A}$ num. $\leqq K$ que
oit donnée, il y a toujours une valeur réelle de ξ, et
ne **seule,** qui satisfait à l'équation

$$(46)\ \ldots\ldots\ldots \quad U_{\xi,k} = \mathfrak{A} \ (\text{num.} \leqq K),$$

qu'en effet cette valeur de ξ, étant évidemment $=0$ pour $\mathfrak{A}=0$,
ra précisément $\sin\text{am}(\mathfrak{A}, k)$ même, vu qu'en vertu de la for-
ule (44):

7) $\arcsin\xi$ est $=\text{am}(U_{\xi,k})$, voir la défin. de „l'amplitude" (§. 1.),

$=\text{am}(\mathfrak{A}, k)$, ξ étant la raçine réelle de l'équat. (46),

par conséquent

$$(48)\ \ldots\ldots\ldots \quad \xi = \sin\text{am}(\mathfrak{A}, k).$$

C'est precisément de cette même conclusion que les
lations remarquables entre les fonctions elliptiques d'argu-
ents complémentaires seront déduites dans l'article suivant.

2. Dans la théorie des fonctions elliptiques on entend par
es arguments complémentaires deux arguments quelconques
ont la somme est $=K$; ainsi p. ex. α et $K-\alpha$ [1]).

Concevons d'abord que A représente un argument positif
uelconque $< K$. En vertu des propriétés ci-dessus mentionnées
e la fonction U il nous réussira facilement d'exprimer la valeur
e sin am du complément

---

1) P. ex. pour $k=0$ les bien connus

$$\alpha \text{ et } \tfrac{1}{2}\pi - \alpha.$$

(49) . . . . $K - A$, (A positif $< K$),

par des fonctions elliptiques de A même.

En effet il ne s'agit içi (voir la fin de l'art. 1) que d'expri en fonction de x la valeur réelle de ξ qui satisfait à l'équatio

(50) . . . . . . $U_{\xi,k} = (K - A =) K - U_{x,k}$,

x représentant la valeur de $\sin \operatorname{am} A$, et par conséquent é positif <1.

[De l'art. 1 il est déjà connu non-seulement qu'il existe ef tivement une telle valeur de ξ, et une seule, pour chaque va de x, mais aussi que cette valeur de ξ est positive <1].

Pour $k=0$ cette équation se réduit à

(50′) . . . . $U_{\xi,0} = \frac{1}{2}\pi - U_{x,0}$

c'est à dire

$$\arcsin \xi = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin x = \arcsin(\sqrt{1-x^2}),$$

et par suite on a définitivement dans ce cas

(50″) . . . . $\xi = \sqrt{1-x^2}$.

Mais en général (k soit $=0$ ou positif <1 quelconque), t dis que x varie continûment entre zéro et une valeur posit <1 quelconque, ξ variera aussi continûment avec x en vertu la relation (50), demeurant lui-même positif <1 pour x pos <1, puis $=1$ pour $x=0$, et on aura constamment pour c cune des valeurs de x:

$$\frac{d(U_{\xi,k})}{dx} = -\frac{d(U_{x,k})}{dx},$$

c. à d.

$$(51) \;\ldots.\; \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Maintenant comme, pour $k=0$, ξ est $=\sqrt{1-x^2}$, il y évidemment beaucoup de vraisemblance qu'en général ξ doit é de la forme

$$f(x,k).\sqrt{1-x^2} \quad \text{ou plutôt} \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mathfrak{f}(x,k)}.$$

S'il en est ainsi, il faut nécessairement que cette fonct $\mathfrak{f}(x,k)$ soit $=1$ et pour $k=0$ et pour $x=0$; du reste, p toute autre valeur de x (positive <1) elle doit être positive telle, selon (51), que

$$\frac{\mathfrak{f}.xdx+(1-x^2)d\mathfrak{f}}{\sqrt{[\mathfrak{f}^2-(1-x^2)][\mathfrak{f}^2-k^2(1-x^2)]}} \text{ soit } =\frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

u bien — [si l'on pose

$$y=\sqrt{1-k^2x^2},$$

onc (puisque x est >0)

$$kx=\sqrt{1-y^2},\quad k^2xdx=-ydy,\text{ etc.}] -$$

elle, que

$$\frac{\mathfrak{f}.ydy+(k'^2-y^2)d\mathfrak{f}}{\sqrt{(k'^2+\mathfrak{f}^2-y^2)(k'^2+k^2\mathfrak{f}^2-y^2)}} \text{ soit } =\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Et comme cette équation — cela saute aux yeux — est vérifiée par

$$\mathfrak{f}=y,\text{ c. à d. }=\sqrt{1-k^2x^2},$$

et que de plus cette valeur de $\mathfrak{f}$ remplit effectivement les deux conditions ci-dessus d'être $=1$ et pour $k=0$ et pour $x=0$, il en est bien constaté que la valeur de ξ cherchée est définitivement

$$(52)\ \ldots\ldots\ldots\ \xi=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

u bien que pour chaque A positif $<K$

$$(53)\ \ldots\ \sin\operatorname{am}(K-A)\text{ est }=\frac{\cos\operatorname{am}A}{\mathfrak{D}(A)}.$$

Nous voilà donc parvenus à notre but d'exprimer la valeur de sin am du complément (49) par des fonctions elliptiques de A lui-même.

Ajoutons que de (53) suivent non-seulement ces formules

$$(54)\ \ldots \left\{\begin{aligned} \cos\operatorname{am}(K-A)&=\frac{k'\sin\operatorname{am}A}{\mathfrak{D}(A)},\\ \mathfrak{D}(K-A)&=\frac{k'}{\mathfrak{D}(A)};\end{aligned}\right.$$

mais aussi en particulier pour l'évaluation des fonctions elliptiques de l'argument $\frac{1}{2}K$:

$$(55)$$

$$\sin\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K)=\sqrt{\frac{1}{1+k'}}\,^{1)},\quad \cos\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K)=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}},\quad \mathfrak{D}(\tfrac{1}{2}K)=\sqrt{k'};$$

1) La vérité de cette formule pour $k=0$ est évidente. Mais soit

par suite aussi la relation

$$(56) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K).\mathfrak{D}(\tfrac{1}{2}K) = \cos\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K).$$

Mais aussi observons maintenant 1⁰) qu'en effet les formules précédentes (53) et (54) subsisteront encore pour des valeurs négatives de $\mathfrak{A}(=-A)$, comme on le vérifie aisément à l'aide des formules (12) et (27) [1];

2⁰) qu'en vertu de ce 1⁰) et des formules (18) et (22), ces relations générales

$$(57) \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(K-\alpha) = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)} \;=\; \sin\mathrm{am}(K+\alpha), \\ \cos\mathrm{am}(K-\alpha) = \dfrac{k'\sin\mathrm{am}\,\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)} = -\cos\mathrm{am}(K+\alpha), \\ \mathfrak{D}(K-\alpha) = \dfrac{k'}{\mathfrak{D}(\alpha)} = \mathfrak{D}(K+\alpha) \end{cases}$$

subsistent, quelle que soit la valeur d'argument (réel) α [2];

---

k positif (<1). La formule (53) donne pour $A = \frac{1}{2}K$, si nous élévons au carré,

$$\sin^2\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-\sin^2\mathrm{am}(\frac{1}{2}K)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(\frac{1}{2}K)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$k^2\sin^2\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K) = 1 \pm k', \quad \sin^2\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1\pm k'}{1-k'^2} = \frac{1}{1\mp k'},$$

donc, en définitif, puisque $\sin\mathrm{am}(\frac{1}{2}K)$ doit être et positif et <1,

$$\sin\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K) = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}.$$

1) Effectivement on a, en vertu de (12) et (27),

$$\sin\mathrm{am}(K-\mathfrak{A}) = \sin\mathrm{am}(K+A) = -\sin\mathrm{am}(-K+A) = \sin\mathrm{am}(K-A)$$
$$= \frac{\cos\mathrm{am}\,A}{\mathfrak{D}(A)} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}(\mathfrak{A})};$$

et ainsi, à peu près, des deux formules (54) aussi.

2) D'abord il est évident de 1⁰) et de la formule (27) qu'elles subsistent pour chaque valeur de α numér. $\leqq K$. De plus, comme on peut exprimer chaque valeur de α num. $>K$ [voir (18)] par

$$(\alpha=)\,\mathfrak{A}+2\mu K, \quad (\mathfrak{A}\text{ numér. } \leqq K),$$

on en aura évidemment

3°) qu'il en résulte que la réponse de la question proposée immédiatement après les formules (28) dans le paragraphe précédent sera donnée par ces nouvelles formules

$$(58) \ldots \left\{ \begin{aligned} \sin\operatorname{am}[\alpha+(2\mu+1)K] &= \frac{\cos\operatorname{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)}(-1)^\mu, \\ \cos\operatorname{am}[\alpha+(2\mu+1)K] &= -\frac{k'\sin\operatorname{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)}(-1)^\mu, \\ \mathfrak{D}[\alpha+(2\mu+1)K] &= -\frac{k'}{\mathfrak{D}(\alpha)}; \end{aligned} \right.$$

et enfin 4°) qu'en vertu des relations entre les fonctions elliptiques d'arguments complémentaires maintenant trouvées, la question importante dans la fin du §. 1. est réduite — comme nous avons déjà remarqué [voir à la ligne (30)] — à celle des arguments positifs numér. $<\frac{1}{2}K$ [1]). — Le titre même du paragraphe suivant indique qu'il nous fournira largement des matériaux pour répondre à cette dernière question.

§. 4.

Théorèmes d'addition.

1. Trouver les relations qui existent entre les fonctions elliptiques de deux arguments α et β (réels) et celles de leur somme $\alpha+\beta$, voici le problème dont il s'agit maintenant.

Pour fixer les idées, nous supposons d'abord, dans le raisonnement suivant, que le module k est positif (pas $=0$); puis nous prouverons qu'en effet les résultats trouvés subsistent encore pour $k=0$.

Soit φ une quantité réelle continûment variable; la fonction

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \text{ ou (pour abréger) } \alpha,$$

sera elle-même continûment variable avec φ (voir §. 1) et, tandis

---

$$\sin\operatorname{am}(K-\alpha) = \sin\operatorname{am}[(2\mu+1)K-\mathfrak{A}] = (-1)^\mu \sin\operatorname{am}(K-\mathfrak{A})$$
$$= (-1)^\mu \frac{\cos\operatorname{am}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}(\mathfrak{A})} = (-1)^\mu \frac{\cos\operatorname{am}(\alpha-2\mu K)}{\mathfrak{D}(\alpha-2\mu K)} = \frac{\cos\operatorname{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)};$$

et de même aussi, à peu près, des deux autres formules (57).

1) Pour $\frac{1}{2}K$ lui-même la réponse à cette question est déjà donnée par les formules (55).

que φ passe par toutes valeurs réelles possibles, α atteindra tôt ou tard une certaine valeur particulière α_1; soit φ_1 la valeur correspondante de φ, c. à d. soit

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \alpha_1.$$

Alors

$$\alpha-\alpha_1 \text{ est } = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et par conséquent, en désignant $\operatorname{am}(\alpha-\alpha_1)$ par ψ, comme alors

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \text{ est } = \alpha-\alpha_1,$$

on aura

$$(59) \ldots\ldots \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

De cette relation entre ψ, φ et φ_1, ou (en d'autres termes)

entre les $\operatorname{am}(\alpha-\alpha_1)$, $\operatorname{am}\alpha$ et $\operatorname{am}\alpha_1$

nous déduirons la relation entre les sinus, cosinus etc. de ces amplitudes, c. à d. (en d'autres termes) entre les fonctions elliptiques des arguments mêmes α, α_1 et $\alpha-\alpha_1$.

La formule (59), ou bien

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = d\alpha,$$

donne

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$
$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} = -k^2\sin\psi\cos\psi, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = -k^2\sin\varphi\cos\varphi;$$

ou bien, si l'on pose pour abréger

$$\sigma = \psi+\varphi,$$
$$\delta = \psi-\varphi,$$

celles-ci:

$$(60) \ldots \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \\ \dfrac{d\delta}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \end{cases}$$

$$(61)\begin{cases}\left(\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2}=\right)\frac{d\sigma'}{d\alpha}=-k^2(\sin\psi\cos\psi+\sin\varphi\cos\varphi)=-k^2\sin\sigma\cos\delta,\\ \left(\frac{d^2\delta}{d\alpha^2}=\right)\frac{d\delta'}{d\alpha}=-k^2\cos\sigma\sin\delta,\\ \left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha}=\right)\sigma'\delta'=-k^2(\sin^2\psi-\sin^2\varphi)=-k^2\sin\sigma\sin\delta;\end{cases}$$

où résulte, par division,

$$\begin{cases}\frac{\left(\frac{d\sigma'}{d\alpha}\right)}{\sigma'.\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)}=\frac{\cos\delta}{\sin\delta}, \text{ ou } \frac{d\sigma'}{\sigma'}=\frac{\cos\delta.d\delta}{\sin\delta}=\frac{d(\sin\delta)}{\sin\delta},\\ \frac{\left(\frac{d\delta'}{d\alpha}\right)}{\delta'.\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)}=\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}, \text{ ou } \frac{d\delta'}{\delta'}=\frac{\cos\sigma.d\sigma}{\sin\sigma}=\frac{d(\sin\sigma)}{\sin\sigma};\end{cases}$$

en d'autres termes,

$$(62) \ldots\ldots \begin{cases}(\sigma'=)\frac{d\sigma}{d\alpha}=C.\sin\delta,\\ (\delta'=)\frac{d\delta}{d\alpha}=C_1.\sin\sigma.\end{cases}$$

mme ces formules subsistent pour chaque valeur de α, l'on en lient, en particulier, pour $\alpha=\alpha_1$ [vu qu'alors φ est $=\varphi_1$, $=0$, $\sigma=\varphi_1$, $\delta=-\varphi_1$ et, en vertu de (60)),

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}=1+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1},$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha}=1-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}\Big]$$

formules

$$(63) \ldots \begin{cases}-C.\sin\varphi_1=1+\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1},\\ C_1.\sin\varphi_1=1-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}\end{cases}$$

ur la détermination des „constantes arbitraires“ C et C_1.

De plus, comme il résulte des mêmes formules (62) que

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha} \text{ est } =C\sin\delta.\frac{d\delta}{d\alpha} \text{ et aussi } =C_1\sin\sigma.\frac{d\sigma}{d\alpha},$$

en conclut

$$C\sin\delta . d\delta = C_1 \sin\sigma . d\sigma,$$

ou, en d'autres termes,

$$(64) \ldots\ldots\ldots C.\cos\delta = C_1 \cos\sigma + C_2$$

pour chaque valeur de α, et par suite, en particulier, pour $\alpha = \alpha_1$

$$(C - C_1)\cos\varphi_1 = C_2,$$

c. à d. en vertu de (63)

$$C_2 \sin\varphi_1 = -2\cos\varphi_1.$$

La constante C_2 ainsi déterminée, la formule (64) se réduit à

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\delta + \cos\sigma}{2} + \frac{\cos\delta - \cos\sigma}{2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1},$$

ou

$$(65) \ldots\ldots \cos\varphi_1 = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1},$$

ou bien, en d'autres termes,

$$\cos\mathrm{am}\,\alpha_1 = \cos\mathrm{am}(\alpha - \alpha_1)\cos\mathrm{am}\,\alpha + \sin\mathrm{am}(\alpha - \alpha_1)\sin\mathrm{am}\,\alpha\,\mathfrak{D}(\alpha_1).$$

Maintenant si je remplace $\alpha_1 - \alpha$ par β (par suite α_1 par $\alpha + \beta$), j'obtiens la formule remarquable

$$(66) \quad \cos\mathrm{am}(\alpha+\beta) = \cos\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\alpha\sin\mathrm{am}\,\beta . \mathfrak{D}(\alpha+\beta)$$

pour tous arguments (réels) α et β.

Voilà une formule vraiment fondamentale, dont on pourra en effet déduire toutes les autres formules pour les relations entre les valeurs des fonctions elliptiques des trois arguments

$$(67) \ldots\ldots\ldots \alpha, \beta \text{ et } \alpha + \beta\ [1])$$

et parvenir ainsi à l'ensemble des expressions analytiques pour ce qu'on appelle dans la théorie des fonctions elliptiques les théorèmes d'addition (en tant qu'il s'agit de trois arguments).

2. Nous nous proposons ici d'entrer dans les détails de dite deduction, mais avant tout il importe d'indiquer que dès présent nous allons employer, au lieu des longues expressions

$$\sin\mathrm{am}(\alpha, k) \text{ et } \cos\mathrm{am}(\alpha, k),$$

---

1) Ces relations bien trouvées pour toutes valeurs de α et de on en aura évidemment trouvé aussi les relations pour

$$\alpha, \beta \text{ et } \alpha - \beta.$$

les plus convenables

$$\mathfrak{S}(\alpha, k) \text{ et } \mathfrak{C}(\alpha, k)$$

ou même, quand il conviendra de supprimer le module, tout simplement

$$\mathfrak{S}(\alpha) \text{ et } \mathfrak{C}(\alpha),$$

et cela de tant meilleur gré qu'en effet ces longues notations-là ne peuvent plus être employées, sans entraîner de confusion et des erreurs graves, dans la théorie générale des fonctions elliptiques, c. à d. où il s'agit de fonctions elliptiques d'arguments quelconques (imaginaires ou complexes ainsi que réels) [1]), et que, de l'autre côté, dans cette théorie générale on tirera de grands avantages de l'emploi des trois expressions

$$(68) \ldots\ldots \mathfrak{S}(\alpha, k), \ \mathfrak{C}(\alpha, k), \ \mathfrak{D}(\alpha, k)$$

pour désigner brièvement les fonctions elliptiques générales, quel que soit l'argument α.

Il est bien évident aussi que par l'adoption de ces nouvelles notations toutes les formules pour les relations entre les trois fonctions

$$(69) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{S}(\alpha), \ \mathfrak{C}(\alpha), \ \mathfrak{D}(\alpha)$$

se présenteront dans une forme bien plus élégante que ci-dessus. Pourtant il n'est pas besoin de répéter ici ces relations dans leur nouvelle forme; nous citerons seulement comme exemple

$$(70) \ldots \mathfrak{D}(\alpha) = \sqrt{1 - k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)} = \sqrt{k'^2 + k^2\mathfrak{C}^2(\alpha)}$$

et sa conséquence

$$(71) \ldots\ldots \mathfrak{D}^2(\alpha) = 1 - k^2\mathfrak{S}^2(\alpha) = k'^2 + k^2\mathfrak{C}^2(\alpha),$$

ainsi que

$$\mathfrak{C}^2(\alpha) = 1 - \mathfrak{S}^2(\alpha).$$

Cela posé, allons au fait.

I. Si l'on remplace dans la formule fondamentale (66), c. à d. (d'après la nouvelle notation)

---

1) Sans doute on ne pourra s'empêcher d'entrevoir ici que la définition générale de la notion „fonctions elliptiques" doit être une autre et de bien plus grande latitude que celle que nous avons donnée ci-dessus pour la notion „fonctions elliptiques d'arguments réels", mais pourtant telle qu'elle se réduira en effet pour des arguments réels précisément à celle que nous avons donnée.

$$(72)\ \ldots\ \mathfrak{C}(\alpha+\beta)=\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)-\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{D}(\alpha+\beta),$$

$\alpha+\beta$ par α, par suite α par $\alpha-\beta$, et que puis on change le signe de β, il vient

$$(73)\ \ldots\ \mathfrak{C}(\alpha)=\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha+\beta)+\mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha+\beta).\mathfrak{D}(\alpha).$$

II. En remplaçant

$$\alpha \text{ per } \alpha+K$$

on obtient immédiatement de la formule fondamentale (72), en vertu des formules (57), cette nouvelle relation:

$$(74)\ \ldots\ \mathfrak{S}(\alpha+\beta)\mathfrak{D}(\alpha)=\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)+\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{D}(\alpha+\beta);$$

d'où, si l'on y change $\alpha+\beta$ en β (par suite β en $\beta-\alpha$) et puis α en $-\alpha$, il vient de plus:

$$(75)\ \ldots\ \mathfrak{S}(\alpha+\beta)\mathfrak{C}(\alpha)=\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)+\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{C}(\alpha+\beta),$$

et enfin de l'une ou de l'autre de ces formules, si l'on y change $\alpha+\beta$ en α (par suite α en $\alpha-\beta$) et puis β en $-\beta$:

$$(76)\ \ldots\ \mathfrak{D}(\alpha+\beta)\mathfrak{S}(\alpha)+\mathfrak{C}(\alpha+\beta)\mathfrak{S}(\beta)=\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{S}(\alpha+\beta).$$

III. De même, en remplaçant à la fois

$$\alpha \text{ par } \alpha+K \text{ et } \beta \text{ par } \beta-K,$$

on obtient aussi immédiatement de la formule fondamentale (72), en vertu des formules (57):

$$(77)\ \ldots\ \mathfrak{D}(\alpha+\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)-\mathfrak{C}(\alpha+\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)=k'^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta);$$

puis de-là, par le même changement que ci-dessus au passage de la première à la seconde des formules dans II:

$$(78)\ \ldots\ k'^2\mathfrak{S}(\alpha+\beta)\mathfrak{S}(\alpha)=\mathfrak{D}(\alpha+\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)-\mathfrak{C}(\alpha+\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta).$$

IV. Si l'on élimine de la formule fondamentale (72) $\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)$ à l'aide de la formule (77), il vient

$$k'^2\mathfrak{C}(\alpha+\beta)=\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)\,[k'^2-\mathfrak{D}^2(\alpha+\beta)]+\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta).\mathfrak{C}(\alpha+\beta),$$

et par suite en vertu de la relation (71) entre les fonction $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, l'on obtient cette formule très-remarquable:

$$(79)\ \ldots\ \mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta)=k^2\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha+\beta)+k'^2.$$

V. De cette dernière on obtient immédiatement, si l'on change

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha \text{ en } \alpha+K,\\ \beta \text{ en } \beta-K\end{array}\right\}:$$

(80) .... $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)=\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)-k^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$,

out à fait analogue à la formule fondamentale même (72); et de-à, de la même manière que (73) est obtenue de (72):

(81) . . . $\mathfrak{D}(\alpha)=\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta)+k^2\mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha+\beta).\mathfrak{C}(\alpha)$.

VI. Et enfin on obtient très-facilement les formules importantes

$$(82) \dots \begin{cases} \mathfrak{C}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)-\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)}, \\ \mathfrak{D}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)-k^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)}, \\ \mathfrak{S}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{D}(\beta)+\mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)}; \end{cases}$$

par lesquelles chacune des trois

(83) . . . . . $\mathfrak{S}(\alpha+\beta)$, $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$, $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$

se trouve exprimée par des fonctions elliptiques de α et de β mêmes;

savoir la première et la seconde, si l'on élimine, respectivement, $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ et $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$ entre la formule fondamentale (72) et son analogue (80);

et puis la troisième provient de (74) ou (75) ou (76), si l'on en élimine, respectivement, $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ ou $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$ ou toutes les deux moyennant les formules (82) pour $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ et $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$.

Rem. Maintenant rien n'est plus facile que de vérifier que toutes ces „formules d'addition" (72) jusqu'à (82) subsistent encore pour $k=0$ [1]). En effet on voit presque immédiatement qu'en y remplaçant k par zéro on les réduit ou à des simples identités ou aux formules bien connues

$$(82') \dots \begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

On concevra bien aisément quel nombre immense de relations entre les fonctions elliptiques se laissent déduire moyennant ces „formules d'addition" (72) jusqu'à (82), si l'on se rappelle seulement la grande utilité à cet égard des deux formules très-particulières (82') dans la théorie des fonctions circulaires. Il nous

1) Voy. les premières lignes de ce §. 4.

manque d'espace ici pour entrer dans ces détails, mais auss est bon d'observer à ceux qui veulent pénétrer dans la thé générale des fonctions elliptiques (où — comme nous l'av déjà dit — on ne se borne pas à des arguments réels) qu'il a point de raison de se retarder auparavant par ces dét En effet on est actuellement ici parvenu au point même d'ou peut entrer immédiatement dans cette région si vaste et si i ressante de l'analyse.

Même la question cardinale (voir la fin du §. I) de l'éva tion des fonctions elliptiques pour des arguments réels — e la solution de laquelle les formules précédentes d'addition f nissent des moyens excellents, comme on le voit bien — mê toute cette question, reduite comme elle est en effet par le à celle pour des arguments positifs $<\frac{1}{2}K$, peut encore être lais à part de qui a pour but d'étudier la dite théorie générale fonctions elliptiques. Et ce qu'il y a de plus, pour économis le temps on pourra même se dispenser de l'évaluation non-seul ment de ce $\frac{1}{2}K$ ou bien de la quantité $K(=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ mais en général de la fonction ou — comme on dit ordinairement de l'intégrale elliptique

$$F(\varphi, k),\ \text{c. à d.}\ \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

pour des valeurs de φ positives et $\leqq\frac{1}{2}\pi$ [1]), jusqu'à ce qu'ap

1) Quant à des valeurs de φ soit positives $>\frac{1}{2}\pi$ ou négatives, savons déjà et que

$$F(-\varphi, k)\ \text{est}\ = -F(\varphi, k)$$

et que chaque arc de cercle numér. $>\frac{1}{2}\pi$ peut être représenté par

$$\mu\pi + \text{un arc}\ \Phi\ \text{num.}\ \leqq\tfrac{1}{2}\pi\quad (\mu\ \text{de valeur numér. entière}),$$

et qu'en vertu de la formule (20)

$$\int_0^{\Phi+\mu\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ \text{est}\ = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + 2\mu K,$$

ou, plus abrégé,

$$F(\Phi+\mu\pi) = F(\Phi) + 2\mu K;$$

c. à d., nous savons déjà, comment la valeur de l'intégrale don s'agit pour chaque valeur de φ numér. $>\frac{1}{2}\pi$ peut être trouvée, pou qu'elle soit connue pour φ positif $\leqq\frac{1}{2}\pi$.

être informé des richesses de cette théorie générale, on se trouvera, pour y parvenir, en possession de ressources bien plus puissantes que celles, dont on peut disposer à présent [1]).

Toutefois à l'entrée même de la nouvelle région il est bien à propos de donner un avis assez essentiel. Il est contenu dans le paragraphe suivant.

§. 5.

Sur la position $k=1$.

1. Ainsi que nous avons vu que, pour $k<1$ positif ou zéro, l'équation

$$(84) \quad \ldots \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{ou} \quad F(\varphi, k)=\alpha$$

peut être vérifiée pour chaque valeur réelle de α par une seule valeur réelle de φ, nous allons faire voir que cela est aussi le cas de l'équation

$$(84') \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \text{ ou} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} \text{ ou enfin } F(\varphi, 1)\ ^{2)}=\alpha,$$

mais toutefois — bien à remarquer — que cette dernière valeur de φ sera constamment numér. $<\frac{1}{2}\pi$.

Cela est évident de ce qu'en effet la fonction

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} \quad \text{ou} \quad F(\varphi, 1)$$

passera successivement par toutes valeurs réelles, tandisque φ parcourt continûment l'intervalle entre $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$, mais deviendra infinie pour chaque valeur de φ numér. $\overset{=}{>}\frac{1}{2}\pi$.

---

1) Quant aux personnes au contraire — et c'est en effet la plupart — qui, sans vouloir pénétrer dans l'étude plus profonde des fonctions elliptiques, veulent profiter pour des buts pratiques des résultats que fournit déjà la théorie de ces fonctions d'arguments réels, quant à ces personnes ou, plus exact, pour ce qui conçerne le profit qu'ils pourront tirer du présent memoire, l'auteur a déjà énonçé en peu de mots son opinion dans la préface.

2) En effet, nous nous décidons à étendre ainsi l'emploi du signe $F(\varphi, k)$, ce qui est évidemment permis.

Effectivement on voit bien non-seulement que, tandisqu reste num. $<\frac{1}{2}\pi$, la fonction $F(\varphi, 1)$ variera continûment avec en y étant

$$F(-\varphi, 1) = -F(\varphi, 1), \quad F(0, 1) = 0,$$

et que de plus

$$(0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi), \quad F(\varphi, 1) \text{ ou } \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \text{ croîtra avec } \varphi,$$

en demeurant toujours

$$= \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (x = \sin\varphi),$$

mais aussi que, pour ce qui concerne φ numér. $= \frac{1}{2}\pi$,

$$F(\tfrac{1}{2}\pi, 1) \text{ ou } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}, \text{ c. à d. lim.} \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}$$

en convergeant ε (positif) indéfiniment vers zéro, sera

$$= \infty = -F(-\tfrac{1}{2}\pi, 1).$$

Et pour prouver ensuite que $F(\varphi, 1)$ est aussi infini p chaque valeur de φ num. $>\frac{1}{2}\pi$, il suffit de faire voir que, p chaque valeur de φ_1 positive $<\frac{1}{2}\pi$,

$$F(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi_1, 1), \text{ c. à d. } \lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ \varepsilon_1 = 0}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}\pi+\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}\right.$$

$$(\varepsilon \text{ et } \varepsilon_1 \text{ positifs}),$$

sera infini, ce qui évidemment n'a rien de difficile [1]).

---

1) En effet, comme en général

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} \text{ est } = \int_{x=\sin a}^{x=\sin b} \frac{dx}{1-x^2},$$

quand a et b sont positifs et $<\frac{1}{2}\pi$,

mais $=-$ (le même), quand a et b sont situés entre $\frac{1}{2}\pi$ et π,

et par suite

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ pour } x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) = 1 - \eta \quad (\eta \text{ positi}$$

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ pour } x = 0,$$

$$\text{c. à d. } = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{2-\eta}{\eta}\right),$$

Donc: Pour chaque valeur (réelle) de α l'équat. (84') est atisfaite par une valeur réelle de φ, et bien par une seule, ui est toujours num. $< \frac{1}{2}\pi$ et donnée par la formule

$$\varphi = \arcsin \xi,$$

ξ étant la racine réelle de l'équation

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \alpha,$$

c. à d.

$$\xi = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}.$$

Nous désignerons — par analogie à ce que nous vons fixé ci-dessus (pour $k<1$) — cette valeur de φ ar la dénomination

l'amplitude de α (mod. 1)

t par la notation abrégée

$$\mathrm{am}(\alpha, 1).$$

Ce n'est pas tout; nous adoptons aussi la dénomination „les onctions elliptiques (mod. 1) de l'argument α", ainsi que eurs notations abrégées $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{C}$ (quand il faudra), de même e nom „module complémentaire" et la notation k'; tout çela lans le même sens pour $k=1$ que ci-dessus pour $k<1$ [1]) (d'où il suit que k' sera dit être $=0$ pour $k=1$).

De cette convention il suit immédiatement que pour chaque valeur réelle de α:

$$(85) \;.\;.\;.\quad \mathrm{am}(\alpha, 1) \text{ est } = \arcsin \xi, \quad \xi = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}},$$

---

puis

$$\int_{\frac{1}{2}\pi+\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}\pi+\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} = \tfrac{1}{2} l\left[\frac{1-\sin(\frac{1}{2}\pi+\varphi_1)}{1+\sin(\frac{1}{2}\pi+\varphi_1)}\right] - \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\eta_1}{2-\eta_1}\right),$$

vu que $\sin(\frac{1}{2}\pi+\varepsilon_1)$ est $=1-\eta_1$ (η_1 positif);

il en résulte évidemment, que $F(\frac{1}{2}\pi+\varphi_1, 1)$ est infini, attendu que

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{2-\eta}{\eta}\right) + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{2-\eta_1}{\eta_1}\right)$$

croît indéfiniment, quand η et η_1 convergent indéfiniment vers zéro.

1) En effet nous en ne faisons que de nous conformer tout-à-fait à l'usage ordinaire, ou plutôt à ce qui est, à l'ordinaire, tacite convenu.

et

$$(86)\begin{cases} \sin\mathrm{am}(\alpha, 1) = \xi = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}, \\ \cos\mathrm{am}(\alpha, 1) = \sqrt{1-\xi^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)} = \mathfrak{D}(\alpha, 1); \end{cases}$$

d'où il est évident qu'en effet les „fonctions elliptiques" — si toutefois l'on ne restreinte pas cette dénomination au cas $k < 1$, mais qu'on l'emploie aussi (comme nous avons dit déjà) pour $k=1$ — constituent un genre de fonctions, dont non-seulement, comme il est dit auparavant, les fonctions circulaires ($k=0$), mais aussi les exponentielles ($k=1$) ne sont que de simples spécialités.

Des formules précédentes, ou plutôt de la première d'elles, il est évident qu'il n'y a pas de périodicité chez les fonctions elliptiques au module 1 [1]. En effet cette formule montre que, quelque grande que soit la valeur numérique de l'argument, son amplitude (pour $k=1$) restera toujours numér. $< \frac{1}{2}\pi$; et l'on sait bien que dans l'intervalle $\pm \frac{1}{2}\pi$ il n'y a de périodicité chez les fonctions sinus, cosinus, etc. — Aussi la valeur limite que nous avons désigné pour $k < 1$ par K [voir la formule (13)], et dont dépend l'étendue des périodes, se reduit-elle dans ce cas-là à

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

c. à d. à l'infini; d'où il suit en outre que dans ce cas ($k=1$) il ne peut pas être question d'arguments complémentaires (§.3).

Rem. On dit en abrégé „Pour $k=1$, K est $=\infty$"; en effet il est devenu d'usage de désigner par K la valeur de l'intégrale (13) non seulement pour $k < 1$ (comme ci-dessus), mais aussi pour $k=1$.

Et de même aussi, puisque on est convenu de désigner — pour chaque module k (entre 0 et 1) — la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \quad (k' \text{ le module complémentaire})$$

1) Chose évidente déjà même de ce que ces fonctions — voir ci-dessus — ne sont en effet que des fonctions exponentielles (d'exposant réel).

par K', il s'ensuit que

$$K' \text{ est } = \infty \text{ pour } k=0,$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \text{ pour } k=1.$$

Mais aussi, excepté seulement ce peu de différences, toutes les autres propriétés et relations des fonctions elliptiques, que nous avons démontrées ci-dessus pour $k<1$, subsistent encore pour le module 1, donc en effet toutes ces mêmes propriétés avec la seule modification qui est une suite évidente de ce qu'en peu de mots il n'existe pas de quantité $K_{(k=1)}$ ou que, en d'autres termes, dans ce cas particulier l'amplitude de **chaque** argument est num. $<\tfrac{1}{2}\pi$. — C'est ce que nous allons expliquer ici en quelques mots.

En effet, quant à la vérité dans ce cas des formules fondamentales (9)—(12), elle est évidente par les seules formules (85) et (86). Quant aux formules d'addition (72)—(82), nous observons d'abord qu'en effet notre déduction (voir l'art. 1 du § 4) de la formule fondamentale (72) ou (66) s'applique aussi bien au cas $k=1$ [1]). De plus, comme les fonctions $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ sont identiques dans ce cas, cette formule fondamentale se réduit ici à

$$(87) \ldots \quad \mathfrak{C}(\alpha+\beta)=\frac{\mathfrak{C}(\alpha)\,\mathfrak{C}(\beta)}{1+S(\alpha)\,S(\beta)}, \quad (\text{mod. } 1),$$

et, par suite, chacune des formules dans II [c. à d. (74)—(76)] à

$$(88) \ldots \quad S(\alpha+\beta)=\frac{S(\alpha)+S(\beta)}{1+S(\alpha)\,S(\beta)}, \quad (\text{mod. } 1),$$

formules qu'on pourra d'ailleurs vérifier immédiatement p. ex. à l'aide de la prémière des formules (86). Par la position $\mathfrak{C}=\mathfrak{D}$ les formules dans III et dans IV se réduisent évidemment à des identités, et celles dans V aux formules mêmes (72) et (73). Donc, en résumé, les formules d'addition subsistent effectivement pour $k=1$ et se réduisent alors aux deux seules précédentes et le reste à de simples identités.

Enfin, pour ce qui concerne les relations importantes (32) et (33) entre les fonctions elliptiques et ses dérivées, comme il est évident que la formule (31) subsiste encore dans le cas dont il s'agit, il s'ensuit qu'il en est de même de ces relations (32) et (33), et — bien entendu — que dans ce cas particulier, vu qu'alors

1) Pourvu toutefois que l'on y conçoive que la variable φ soit continûment de valeur numérique $<\tfrac{1}{2}\pi$.

l'amplitude reste constamment numér. $<\frac{1}{2}\pi$, ces dernières (36) subsisteront — aussi bien que les (32) mêmes — pour toutes valeurs de l'argument α.

2. Puisque ainsi la première des formules (36) subsiste encore pour $k=1$, et même alors pour toutes valeurs de α, il en résulte que pour $k=1$ on pourra satisfaire à l'équation (voy. §. 3)

$$(37) \ldots\ldots \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = d\alpha$$

par

$$(38) \ldots\ldots \xi = \operatorname{sinam}(\alpha, k),$$

même quelque grande que soit la valeur numér. de α.

Il y a plus; on en est naturellement conduit à faire usage de la notation

$$U_{x,k}, \quad (x \text{ num. } \leqq 1, \text{ comme ci-devant}),$$

même pour $k=1$, et bien à fixer le sens de ce signe, même pour $k=1$, par la definition adoptée ci-dessus (seulement pour $k<1$):

$$(41) \quad U_{x,k} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (x \text{ num. } \leqq 1),$$

d'où resulte, en particulier,

$$(41'') \ldots \quad U_{x,1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2}, \quad (x \text{ num. } \leqq 1).$$

Cela posé, comme en conséquence on aura, pour chaque valeur de x numér. <1,

$$(89) \ldots \quad U_{x,1} = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad U_{-x,1} = -U_{x,1},$$

et, en particulier,

$$U_{0,1} = 0,$$

mais (pour $x = \pm 1$)

$$U_{1,1}\left[= \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\right] = \infty = -U_{-1,1},$$

il est évident qu'on pourra toujours satisfaire à l'équation $U_{\xi,1} = \alpha$, quelle valeur réelle de α que soit donnée, par une valeur réelle de ξ, et bien par une seule, savoir

$$\xi = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \sin\operatorname{am}(\alpha, 1),$$

et qu'ainsi la proposition très-importante (dans le §. 3) auprès de la ligne (46) restera vraie aussi pour $k = 1$ et même, dans ce cas particulier, quelle que soit la valeur (réelle) de $\mathfrak{A}$ ou de α.

Donc, en résumé:

La fonction $\sin\operatorname{am}(\alpha, k)$, quel que soit le module k entre les limites 0 et 1 (inclusive), jouit de la propriété de satisfaire, au moins pour chaque valeur de α num. $< K$ [1]), à l'équation

$$(90) \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = d\alpha,$$

étant en effet elle-même la seule valeur réelle de ξ qui satisfait à l'équation

$$(91) \quad (U_{\xi,k} =) \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \alpha \text{ (numér. } \leqq K);$$

voilà un théorème bien propre au point même d'entrée à la théorie générale des fonctions elliptiques!

Remarque.

De la formule (89), c. à d. de ce que pour chaque valeur de x num. < 1

$U_{x,1}$ est $= \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et par suite $= i \arcsin\left(\frac{-ix}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ [2]),

on tire immédiatement la relation

$$\arcsin(yi) = iU_{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}, \quad y \text{ réel quelconque } {}^{3)},$$

---

1) Pour $k = 1$ cela revient évidemment au même que de dire: pour chaque valeur de α.

2) Car, du moins pour chaque valeur de x num. < 1,

$$\frac{1}{2i} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ est } = \arcsin z,$$

z étant déterminé par la formule $\frac{zi}{\sqrt{1-z^2}} = x$, c. à d. (comme on trouve facilement) $z = -\frac{xi}{\sqrt{1-x^2}}$. (Voir Cauchy, Exerc. T. IV., p. 281.)

3) Car, en effet, si l'on substitue dans la formule précédente y au

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est } = \arcsin x$$

pour chaque valeur de x num. $\leqq 1$.

2) Puisque, pour $k<1$,

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ est } = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

tandis qu'au moins x est num. <1, φ étant $=\arcsin x$, et que cet

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

est fonction continue de x entre $x=0$ et $x=\pm 1$ [1]), on en peut conclure assûrément que

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ est } = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

pour chaque valeur de x num. $\leqq 1$, donc aussi fonction continue de x entre $x=1$ et $x=-1$.

---

1) En effet, comme, tandis que x n'excède pas les limites ± 1, φ (c. à d. $\arcsin x$) est continûment variable avec x, évidemment la fonction $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (fonction continue de φ entre des limites de φ quelconques) sera elle-même fonction continue de x dans le dit intervalle.

ici. Mais, ce qu'il y a bien à propos, nous allons ajouter ici expressement — comme étant en effet la **base** même de ce que nous avons énoncé dans les premières lignes du §. 3. ci-dessus — ce **corollaire**, évident en effet, du dit theorème, à savoir, que la formule

$$(2) \ldots\ldots \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x) - f(x_0)$$

est parfaitement sûre pour chaque valeur de x qui n'est pas située hors de deux limites, dont l'une est x_0, pourvu — comme ci-dessus — que $f(x)$ soit continue entre elles et qu'elle ait $f'(x)$ pour dérivée, au moins, pour chaque valeur de x donnée en dedans de cet intervalle — cette même fonction $f'(x)$ soit y continue sans cesse ou non —; et que par suite la fonction

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$$

sera elle-même en tel cas fonction continue de x entre ces limites.

En voici quelques exemples [1]):

1) Puisque

$$\int_{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est } = \arcsin x,$$

tandis qu'au moins x est num. < 1, et que cet $\arcsin x$ est fonction continue de x entre $x = 0$ et $x = 1$ ou -1; on en peut conclure assûrément que

---

[...]ter rigoureusement quelques notions **fondamentales** de l'Analyse supérieure, du vrai sens desquelles il semblait qu'on n'était pas alors parfaitement d'accord. Comme cela est effectivement le cas encore aujourd'hui en quelque degré, cette introduction pourra peut-être encore tourner au profit à quelques-uns.

1) Remarquons qu'on a employé ici, pour abréger, l'expression

$$\int_{x_0} F'(x)\,dx = F(x)$$

dans le même sens que celle-ci plus longue:

$$F'(x) \text{ est } = \frac{dF(x)}{dx} \text{ et } F(x_0) = 0.$$

durch p theilbar sind. Sieht man daher vorerst von der Bezi[ehung], worin a und d zu p stehen, ab, so ergibt sich folgen[de] Congruenz:

$$3)\quad (a+d)^{p-1|d} = a^{p-1} + d.2d \ldots (p-1)d \equiv a^{p-1} + d^{p-1|d},\ \text{Mod. } p.$$

Diess beweist sich am Einfachsten aus den Gesetzen d[es] Polynomiums. Bezeichnet man nämlich die entwickelte Darste[l]lung der p^{ten} Potenz von

$$4) \ldots\ldots \quad P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

durch

$$5) \ldots\ldots \quad P^p = V_0^p + V_1^p x + V_2^p x^2 \ldots. V_r^p x^r + \ldots,$$

so hat man für die Ableitung der Vorzahl V_r^p aus den vorher[-]gehenden Vorzahlen der vorhergehenden $(p-1)^{ten}$ Potenz folgend[e] Gleichung:

$$6)\quad r.V_r^p = p[a_1 V_{r-1}^{p-1} + 2a_2 V_{r-2}^{p-1} + 3a_3 V_{r-3}^{p-1} \ldots r.a_r V_0^{p-1}].$$

Dieses Ableitungs-Gesetz findet man am Besten durch Diffe[-]renziren und es ist aus 5):

$$7) \ldots \quad \frac{\partial . P^p}{\partial x} = V_1^p + 2V_2^p x + 3V_3^p x^2 + \ldots. r.V_r^p x^{r-1} \ldots.$$

und ferner:

$$8)\quad \frac{\partial . P^p}{\partial x} = pP^{p-1}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$= p(V_0^{p-1} + V_1^{p-1}x + V_2^{p-1}x^2 + \ldots.)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots.)$$

$$= p\left[a_1 V_0^{p-1} + \begin{array}{c|c|c|c} a_1 V_1^{p-1} & x + a_1 V_2^{p-1} & x^2 + a_1 V_3^{p-1} & x^3 \ldots \\ 2a_2 V_0^{p-1} & 2a_2 V_1^{p-1} & 2a_2 V_2^{p-1} & \\ & 3a_3 V_0^{p-1} & 3a_3 V_1^{p-1} & \\ & & 4a_4 V_0^{p-1} & \end{array}\right.$$

Aus 7) und 8) folgt 6).

Aus der Analysis sind ferner folgende Sätze bekannt:

$$9)\quad P_1 = \frac{1}{x}\lg\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x}[-\lg(1-x)] = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots.$$

und es ist nach 4):

$$a_0 = 1,\quad a_1 = \tfrac{1}{2},\quad a_2 = \tfrac{1}{3}, \ldots. a_r = \frac{1}{r+1}.$$

Eben so hat man:

10)

$$P_1{}^p = \left[\frac{1}{x}\lg\frac{1}{1-x}\right]^p = 1 + \frac{C(1,p)^1}{p+1}x$$
$$+\frac{C(1,p+1)^2}{(p+1)(p+2)}x^2 + \frac{C(1,\,p+2)^3x^3}{(p+1)(p+2)(p+3)}\cdots\frac{C(1,p+r-1)^r x^r}{(p+1)^{r|1}}\cdots$$

Die Bildungs-Elemente für 6) sind hieraus:

$$V_r^p = \frac{C(1,p+r-1)^r}{(p+1)^{r|1}} = \frac{C(1,\,2,\,3,\ldots\, p+r-1)^r}{(p+1)(p+2\ldots(p+r)},$$

$$V_r^{p-1} = \frac{C(1,p+r-2)^r}{p^{r|1}} = \frac{C(1,\,2,\,3,\ldots\, p+r-2)^r}{p(p+1)\ldots(p+r-1)},$$

und es entsteht durch Einführung der erforderlichen V und a in 6):

$$\frac{r.C(1,p+r-1)^r}{(p+1)^{r|1}} = p\left[\frac{C(1,p+r-3)^{r-1}}{2.p^{r-1|1}} + \frac{2C(1,p+r-4)^{r-2}}{3.p^{r-2|1}}\right.$$
$$\left.+\frac{3C(1,p+r-5)^{r-3}}{4.p^{r-3|1}} + \ldots\frac{r-1}{r}\,\frac{C(1,p-1)^1}{p} + \frac{r}{r+1}\right].$$

Multiplicirt man mit $(p+1)^{r|1} = (p+1)(p+2)\ldots(p+r)$ und unterdrückt die gleichen Factoren im Zähler und Nenner der Glieder auf der rechten Seite, so bleiben im ersten Gliede die zwei höchsten, im zweiten Gliede die drei höchsten Factoren von $(p+1)^{r|1}$ übrig u. s. w. und man erhält, wenn man diese Factorenfolgen als fallende schreibt:

$$r.C(1,\,p+r-1)^r = \frac{(p+r)^{2|-1}C(1,p+r-3)^{r-1}}{2}$$
$$+\frac{2(p+r)^{3|-1}}{3}C(1,p+r-4)^{r-2}+\ldots$$
$$+\frac{q}{q+1}(p+r)^{q+1|-1}C(1,\,p+r-q-2)^{r-q}\ldots\frac{r}{r+1}(p+r)^{r+1|-1},$$

oder wenn $p-r$ statt p geschrieben wird:

11)

$$r.C(1,\,p-1)^r = \frac{p(p-1)}{2}C(1,p-3)^{r-1} + \frac{2p(p-1)(p-2)}{3}C(1,p-4)^{r-2}$$
$$+\frac{3p(p-1)\ldots(p-3)}{4}C(1,p-5)^{r-3}+\ldots$$
$$+\frac{q}{q+1}p(p-1)\ldots(p-q)C(1,p-q-2)^{r-q}\ldots\frac{r}{r+1}p(p-1)\ldots(p-r).$$

In dieser Darstellung kann nach 1) der Werth von r nicht grösser als $(p-2)$ werden. Die Ausdrücke, welche in der allgemeinen Form $C(1, m)^n$ begriffen sind, können nur ganze Zahlen bedeuten, da sie Producte aus lauter ganzen Zahlen sind. In jedem Gliede auf der rechten Seite von 11) kommt ein Divisor vor, der so viele Einheiten enthält, als die Factoren-Anzahl der Fakultät im Zähler beträgt. Dieser Divisor ist in die zugehörige Fakultät ohne Rest theilbar. Sind nämlich p und x ganze Zahlen, so können die Ausdrücke

$$(p)_x = \frac{p(p-1)(p-2) \;....\; (p-x+1)}{1.\,2.\,3.\;....\;x},$$

$$[p]_x = \frac{p(p+1)(p+2) \;....\; (p+x-1)}{1.\,2.\,3.\;....\;x}$$

bekanntlich nur ganze Zahlen sein, denn diese Ausdrücke bestimmen die Anzahl der Gruppen, welche die Elemente a_1, a_2 .... a_p bilden, wenn die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen zur x^{ten} Dimension oder Classe in Frage kommen, und bedeuten daher nichts anderes als Summen von Einheiten oder ganze Zahlen. Im ersten Ausdruck muss $p > x$ sein. Hieraus folgt:

12) Das Product von x aufeinander folgenden Zahlen im Zahlensystem ist immer durch je eine, oder mehrere oder alle Zahlen 1, 2, 3, ... x ohne Rest theilbar, wenn jede der theilenden Zahlen nicht mehr als einmal vorkommt.

13) Ist eine oder sind mehrere dieser Zahlen zu den Divisoren 1, 2, 3, ... x theilfremd, so muss das Product der übrigen $(x-1)$, oder $(x-2)$ Factoren u. s. w. durch die in Frage stehenden Divisoren ohne Rest theilbar sein.

Hieraus folgt, dass alle in 11) vorkommenden Glieder durch die ihnen zugehörigen Divisoren ohne Rest theilbar sein müssen.

Ist nun p eine Primzahl, so sind, da r nicht grösser als $(p-2)$ werden kann, alle vorkommenden Divisoren zu p theilfremd, und es folgt weiter, dass die Ausdrücke in 11) auf der rechten Seite und folglich auch der auf der linken

$$C(1, p-1)^r = C(1, 2, 3, \;....\; p-1)^r$$

durch p ohne Rest theilbar sind.

Diess stellt sich auch so dar: Der Ausdruck

14)

$$C(1,\ 2,\ 3, \ldots\ p-1)^r = \frac{p}{r}\Big[\frac{p-1}{2}C(1,\ p-3)^{r-1}$$

$$+ \frac{2(p-1)(p-2)}{3}C(1,\ p-4)^{r-2} + \ldots$$

$$+ \frac{q}{q+1}(p-1)(p-2)\ldots(p-q)\,C(1, p-q-2)^{r-q} \ldots \frac{r}{r+1}(p-1)\ldots(p-r)\Big]$$

ist eine **ganze** Zahl und **theilbar** durch die **Primzahl** p, so lange r eine der Zahlen 1, 2, 3 .... $(p-2)$ bedeutet.

Hiermit ist die Richtigkeit von 3) bewiesen. Setzt man $-d$ statt d in 1), so ändert sich nichts in der Schlussreihe und man hat, da $(-d)^{p-1} = d^{p-1}$ ist:

15) . . . . $(a-d)^{p-1|-d} \equiv a^{p-1} + d^{p-1|d}$, Mod. p.

Da alle Primzahlen (2 ausgenommen) ungerade sind, so können zwischen zwei Primzahlen entweder **eine**, oder **drei**, oder **fünf** Zahlen u. s. w. liegen. Hiernach fliesst aus 12) und 13) der Folgesatz:

16) Liegt **eine** Zahl zwischen zwei Primzahlen, so ist sie durch $1.2.3 = 6$ theilbar, wenn die niedere Primzahl grösser als 3 ist; liegen **drei** zwischen denselben, so sind sie durch $1.2.3.4.5 = 120$ theilbar, wenn die niedere Primzahl grösser als 5 ist; liegen **fünf** dazwischen, so sind sie durch $1.2.3\ldots.7 = 5040$ theilbar, wenn die niedere grösser als 7 ist u. s. w.

§. 2.

Was nun die Beziehungen der a und d zu der Primzahl p in 3) und 15) §. 1. betrifft, so sind entweder beide Grössen durch p theilbar, oder die eine ist theilfremd und die andere theilbar, oder auch beide sind theilfremd zu p.

Im ersten Falle hat man aus 3) und 15) §. 1.:

1)

$$(a \pm d)^{p-1|\pm d} = (a \pm d)(a \pm 2d) \ldots (a \pm (p-1)d) \equiv 0, \text{ Mod. } p.$$

Ist a theilfremd zu p und d theilbar durch p, also $d = np$, so entsteht:

2) . . . . $(a \pm d)^{p-1|\pm d} \equiv a^{p-1}$, Mod. p.

Ist a theilbar $(a = mp)$ und d theilfremd, so wird:

3)

$$(a \pm d)^{p-1|\pm d} \equiv d^{p-1|d} = d.2d \ldots (p-1)d, \text{ Mod. } p.$$

Aus 2) und 3) folgt:

4) Ist in der Basis der Factorenfolge $(a \pm d)^{p-1|\pm d}$ die e Grösse theilfremd, die andere theilbar durch p, worun hier und künftig immer eine Primzahl verstanden werden soll, ist die Fakultät durch p nicht theilbar.

Nummer 3) lässt sich noch einfacher darstellen. Bestim man nämlich die Reste der d nach dem Modul p, so erhält m

$$d \equiv r_1,\ 2d \equiv r_2,\ 3d \equiv r_3\ \ldots.\ (p-1)d \equiv r_{p-1}.$$

Da aber diese Reste in irgend beliebiger Ordnung mit den Zah $1, 2, 3 \ldots. (p-1)$ zusammen fallen, so hat man:

$$d.2d.3d\ \ldots.\ (p-1)d \equiv r_1.r_2.r_3 \ldots. r_{p-1} \equiv 1.2.3\ldots.(p-1),\ \text{Mod.}$$

und 3) geht über in:

$$5) \ldots.\ (a \pm d)^{p-1|\pm d} = (a \pm d)(a \pm 2d) \ldots. (a \pm (p-1)d)$$
$$\equiv d.2d \ldots. (p-1)d \equiv 1.2.3.(p-1),\ \text{Mod.}$$

oder wenn mp statt a geschrieben wird:

$$6) \ldots.\ (mp \pm d)^{p-1|\pm d} \equiv d^{p-1|d} \equiv 1^{p-1|1},\ \text{Mod.}\, p.$$

Für $p = 5,\ m = 1,\ d = \pm 2$ wird aus 6):

$$7.9.11.13 - 2.4.6.8 = 9009 - 384 = 5.1723,$$
$$7.9.11.13 - 1.2.3.4 = 9009 - 24 = 5.1767,$$
$$3.1(-1)(-3) - 2.4.6.8 = 9 - 384 = -5.75,$$
$$3.1(-1)(-3) - 1.2.3.4 = 9 - 24 = -5.3.$$

Aus den zwei letzten Gliedern der Congruenz 5) und 6) f weiter:

$$7) \ldots\ldots\ldots\ d^{p-1} \equiv 1,\ \text{Mod.}\ p.$$

Diess ist der Lehrsatz von Fermat.

Um den Fall, wenn a und d theilfremd zu p sind, zu e scheiden, kann man von der Fakultät $(a+1)^{p-1|1} = (a+1)(a+2$ $\ldots(a+p-1)$ ausgehen. Setzt man $a = mp + \alpha$, worin α die Wer $1, 2, 3, \ldots. (p-1)$ durchlaufen kann, so nimmt die vorstehe Fakultät folgende Form an:

$$(mp+\alpha+1)(mp+\alpha+2)(mp+\alpha+3) \ldots. (mp+\alpha+p-1).$$

Schreibt man nun für α die angegebenen Werthe, so kann Fakultät folgende Formen durchlaufen:

$$(mp+2)(mp+3)\ldots.(mp+p),$$
$$(mp+3)(mp+4)\ldots.(mp+p)(mp+p+1),$$
$$(mp+4)(mp+5)\ldots.(mp+p)(mp+p+1)(mp+p+2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(mp+p)(mp+p+1)\ldots.(mp+2p-2).$$

ede dieser Formen ist wegen des Factors $mp+p$, der in jeder orkommt, durch p ohne Rest theilbar. Daher ist:

$$8) \ldots . \quad (a+1)(a+2)\ldots.(a+p-1) \equiv 0, \text{ Mod. } p,$$

enn a theilfremd zu p ist.

Untersucht man nun die Fakultät $(a+d)^{p-1|d}$ unter der oben genannten Voraussetzung, so hat man nach den Vorbemerkungen zu 5) durch Zuzählung von a:

$$\left.\begin{array}{r} a+d \equiv a+r_1 \\ a+2d \equiv a+r_2 \\ \cdots\cdots \\ a+(p-1)d \equiv a+r_{p-1} \end{array}\right| \text{ Mod. } p,$$

und hieraus, da diess für $+d$ und $-d$ gilt:

$$(a\pm d)(a\pm 2d)\ldots.(a\pm(p-1)d) \equiv (a\pm r_1)(a\pm r_2)\ldots.(a\pm r_{p-1}), \text{ Mod. } p.$$

Nun fallen die Reste r_1, r_2, r_3 .... r_{p-1} mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $(p-1)$ zusammen. Daher ist:

$$(a\pm r_1)(a\pm r_2)\ldots.(a\pm r_{p-1}) \equiv (a\pm 1(a\pm 2)\ldots.(a\pm p\mp 1) \equiv 0, \text{ Mod. } p,$$

und mit Rücksicht auf 8):

$$9)$$
$$(a\pm d)(a\pm 2d)\ldots.(a\pm(p-1)d) \equiv (a\pm 1)(a\pm 2)\ldots.(a\pm p\mp 1) \equiv 0, \text{ Mod. } p.$$

Das Gesagte führt mit Rücksicht auf 4) zu folgendem Satze:

10) Die Factorenfolge $(a\pm d)^{p-1|\pm d} = (a\pm d)(a\pm 2d)\ldots.(a\pm(p-1)d)$ st immer theilbar durch die Primzahl p, wenn die Grössen (a nd d) gleichartig zu p sind (also gleichzeitig theilfremd, oder leichzeitig theilbar durch p). Sie ist nicht theilbar durch p, enn sie ungleichartig zu p sind (also die eine theilfremd und ie andere theilbar).

Man kann aus dem Gesagten noch andere und zum Theil twas allgemeinere Sätze ableiten. So ergibt sich folgender Satz:

11) Die Faktorenfolge $(a\pm d_1)(a\pm d_2)\ldots.(a\pm d_{p-1})$ ist durch die

Primzahl p theilbar, wenn a zu p theilfremd ist und die d in irgend beliebiger Ordnung die Reste 1, 2, 3 .... $(p-1)$ zu p geben. Sie ist nicht theilbar, wenn a durch p theilbar ist und die d die genannten Reste nach p geben und umgekehrt, wenn a theilfremd zu p und die d theilbar durch p sind.

Eine Anwendung dieser Sätze auf arithmetische Reihen gibt Folgendes:

12) Gruppirt man die Glieder einer arithmetischen Progression von der Form $u=a\pm nd$ nach der Primzahl p, so wird eines unter den ersten $(p-1)$ Gliedern durch p theilbar sein, wenn a und d theilfremd zu p ist. Von da an wird jedes p^{te} Glied gleichfalls durch p theilbar, die zwischenliegenden $(p-1)$ Glieder aber nicht theilbar sein.

13) Ist a theilfremd zu p und d theilbar durch p, so ist kein Glied der Reihe durch p theilbar. Ist dagegen a theilbar und d theilfremd zu p, so findet sich in den $(p-1)$ ersten Gliedern kein durch p theilbares Glied vor. Von da an ist aber jedes p^{te} Glied durch p theilbar. Ist a und d theilbar durch p, so sind es auch alle Glieder der Reihe.

Ist $a=5$, $d=\pm 3$, $n=1, 2, 3 \ldots$ so entsteht

$$8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59 \ldots$$
$$2, -1, -4, -7, -10, -13, -16, -19, -22, -25, -28, -31, -34, -37, -40, -43, \ldots$$

Gruppirt man die Glieder dieser Reihen nach der Primzahl 3, so ist keines ihrer Glieder durch 3 ohne Rest theilbar nach 13). Gruppirt man sie nach 5, so ist keines unter den 4 ersten Gliedern durch 5 theilbar, dagegen vom 5ten an jedes 5te Glied, von den zwischen liegenden aber keines nach 13). Bei der Zahl 7 ist eines unter den ersten 6 Gliedern und von da an wird jedes 7te Glied theilbar sein nach 12), u. s. w. so bei jeder anderen Primzahl.

Ist $a=6$, $d=\pm 4$, $n=1, 2, 3 \ldots$ so entsteht

$$10, 14, 18, 22, 26, 30, 34 \ldots$$
$$2, -2, -6, -10, -14, -18, -22 \ldots$$

Jedes Glied ist durch 2 theilbar. Für 3, 5, 7, ... wiederholen sich die vorhin angegebenen Gesetze.

§. 3.

Durch Anwendung des Satzes 9) §. 2. auf 3) §. 1. erhält man folgenden Satz:

1)

$$d.2d.3d \dots (p-1)d + a^{p-1} = d^{p-1|d} + a^{p-1} \equiv 0. \text{ Mod. } p.$$

Die Summe der $(p-1)^{ten}$ um d steigenden Fakultät von und der $(p-1)^{ten}$ Potenz von a ist immer durch die imzahl p theilbar, wenn d und a theilfremd zu p sind.

So ist für $p = 5$, $a = 3$, $d = 1, 2, 3 \dots$

$$1.2.3.4 + 3^4 = 24 + 81 = 5.19,$$
$$2.4.6.8 + 3^4 = 384 + 81 = 5.93,$$
$$3.6.9.12 + 3^4 = 1944 + 81 = 5.405,$$

s. w., wobei a gleichfalls verschiedene Werthe durchlaufen ann. Dieser Satz umschliesst die von Wilson und Fermat, nd zeigt zugleich, dass die gleichen Gesetze von Potenzen und Faktorenfolgen, die verwandte Begriffe sind, gelten.

Setzt man $a = 1$ und dann auch $d = 1$, so entsteht

2) . . . . . $d.2d.3d \dots (p-1)d \equiv -1$, Mod. p.

3) . . . . . . $1.2.3 \dots (p-1) \equiv -1$, Mod. p.

Nummer 3) ist der Wilson'sche Lehrsatz. Aus 1) und 2) wird

$$a^{p-1} \equiv -d^{p-1|d} \equiv -(-1), \text{ Mod. } p$$

der:

4) . . . . $a^{p-1} \equiv +1$, Mod. p.

Diess ist eine zweite Ableitung des Fermat'schen Lehrsatzes.

Dem Satze 1) lässt sich auf leicht zu rechtfertigende Art ehr Allgemeinheit und Anwendbarkeit geben, und es ist

5)

$$\dots p \pm d)(m_2 p \pm 2d)(m_3 p \pm 3d) \dots (m_{p-1} p \pm (p-1)d) + a^{p-1} \equiv 0, \text{ Mod. } p,$$

6) . . . . . $(mp \pm d)^{p-1|\pm d} + a^{p-1} \equiv 0$, Mod. p,

d

7)

$$(m_1 p \pm d)(m_2 p \pm 2d) \dots (m_{p-1} \pm (p-1)d) \equiv -1, \text{ Mod. } p,$$

8) . . . . . . $(mp \pm d)^{p-1|\pm d} \equiv -1$, Mod. p.

Die oberen und unteren Zeichen gelten gleichzeitig. Für die können beliebig die Werthe 0, 1, 2, 3 .... geschrieben werden. att der Summen der Factorenfolgen und Potenzen kann man ch ihre Unterschiede einführen und dann erhält man durch Verdung mit 4):

9)

$$(m_1p \pm d)(m_2p \pm 2d)\dots(m_{p-1}p \pm (p-1)d) - a^{p-1} \equiv -2, \text{ Mo}$$

$$10) \dots (mp \pm d)^{p-1|\pm d} - a^{p-1} \equiv -2, \text{ Mod. } p,$$

und

11)

$$a^{p-1} - (m_1p \pm d)(m_2p \pm 2d)\dots(m_{p-1}p \pm (p-1)d) \equiv +2, \text{ Mod}$$

$$12) \dots a^{p-1} - (mp \pm d)^{p-1|\pm d} \equiv +2, \text{ Mod. } p,$$

und im speciellen Falle:

$$13) \dots \pm d^{p-1|d} \mp a^{p-1} \equiv \mp 2, \text{ Mod. } p.$$

Aus 1) und 13) entnimmt sich:

14) Die Summe der $(p-1)^{ten}$ um d steigenden Fak tät von d und der $(p-1)^{ten}$ Potenz von a ist theil durch p. Wird aber ihr Unterschied durch p gethei so lässt er den Rest $p-2$ oder 2, je nachdem die P tenz oder die Fakultät abgezogen wird, wenn d und theilfremd zu p sind.

So ist für $p=5$, $d=2$, $a=3$ aus 1) und 13):

$$2.4.6.8+3^4 = 384+81 = 5.93,$$
$$2.4.6.8-3^2+2 = 384-81+2 = 303+2 = 5.61,$$
$$3^4-2.4.6.8-2 = 81-384-2 = -303-2 = -5.61,$$

u. s. w. Zahlen-Beispiele zu 5) bis 12) ergeben sich leicht, wegen sie nicht besonders hervorgehoben werden.

Andere Beweise für die Sätze von Wilson und Fer 3) und 4) finden sich in Nouv. Mém. d. l'acad. de Berlin 1771 (er beruht jedoch auf Induction) von Lagrange, in dem C ment. acad. Petrop. und opusc. anal. von Euler in Disquis. arithm. von Gauss, im 30. Bande des Arch vom Herausgeber und im 32. Bande u. s. w.

§. 4.

Aus $d.2d.3d\dots(p-1)d \equiv -1$, Mod. p erhält man, wen auf der rechten Seite zugezählt und dann $(p-1)$ entfernt w

$$d \times d.2d.3d\dots(p-2)d \equiv +1, \text{ Mod. } p.$$

Wird mit 2 multiplicirt und dann p auf der rechten Seite ab zogen, so entsteht:

$$2.d \times d.2d.3d \dots (p-2)d \equiv -(p-2), \text{ Mod. } p.$$

hieraus durch Unterdrückung von $(p-2)$:

$$d.2d \times d.2d.3d \dots (p-3)d \equiv -1, \text{ Mod. } p;$$

ch Multiplikation mit 3 und Zuzählung von p ergibt sich hieraus:

$$d.2d.3d \times d.2d.3d \dots (p-4)d \equiv +1, \text{ Mod. } p,$$

.w. folglich allgemein:

1)

$$.2d.3d \dots rd \times d.2d.3d \dots (p-r-1)d \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } p,$$

r:

$$\dots d^{r|d} d^{p-r-1|d} \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } p.$$

la p eine Primzahl bedeutet, so ist $\frac{p-1}{2}$ eine ganze Zahl.

t man daher $r = \frac{p-1}{2}$, so erhält man aus 1) und 2):

3)

$$d^{\frac{p-1}{2}|d}.d^{\frac{p-1}{2}|d} = d.2d \dots \frac{p-1}{2}d \times d.2d \dots \frac{p-1}{2}d \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}, \text{ Mod. } p.$$

Ist p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so wird $(-1)^{\frac{p+1}{2}}$ 1; für die Form $4n+3$ wird $(-1)^{\frac{p+1}{2}} = +1$. Daher folgt aus 3):

$$\dots (d.2d.3d \dots \frac{p-1}{2}d)^2 \equiv -1, \text{ Mod. } p,$$

n p eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist; und

$$\dots (d.2d.3d \dots \frac{p-1}{2}d)^2 \equiv +1, \text{ Mod. } p,$$

hieraus auch:

$$\dots d.2d.3d \dots \left(\frac{p-1}{2}\right)d \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

n p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist.

Für $d = 1$ entsteht aus diesen Sätzen:

7)

$$1^{p-r-1|1} = 1.2 \dots r.1.2 \dots (p-r-1) \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } p.$$

8)

$$1^{\frac{p-1}{2}|1}.1^{\frac{p-1}{2}|1} = (1.2.3 \dots \frac{p-1}{2})^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p.$$

9) . . . . $1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1$, Mod. p.

Das obere (negative) Zeichen in 8) gilt für $p = 4n+1$, untere für $4n+3$. Der Satz 9) gilt für $p = 4n+3$. Das Zei ist unbestimmt, und es liegt kein Kriterium zu dessen Bestimm vor. In den vorstehenden Congruenzen kann r die Werthe ($2 \ldots \frac{p-1}{2}$ durchlaufen. Für $p=7$, $r=0$, 1, 2, 3 wird aus 7) bi

$$
\begin{aligned}
1.2.3 \ldots 6+1 &= 720+1 = 7.103,\\
1.1.2 \ldots 5-1 &= 120-1 = 7.17,\\
1.2.1.2.3.4+1 &= 48+1 = 7.7,\\
1.2.3.1.2.3-1 &= 36-1 = 7.5,\\
1.2.3+1 &= 6+1 = 7.1.
\end{aligned}
$$

Einzelne Fälle von 7) bis 9) haben schon Euler und Lagran a. a. O. angegeben.

Zur Darstellung von 6) ist folgendes Gesetz zu bemerken

10) Ist das Zeichen für $d = 1$ aufgefunden, so bleibt d selbe unverändert, wenn d ein Quadratrest zu p ist. geht in das entgegengesetzte über, wenn d ein Nichtq dratrest zu p ist.

Int $p = 7$, so sind 1, 2 und 4 Quadratreste und 3, 5 un Nichtquadratreste zu 7 und man erhält, wenn $d = 1, 2, 3, 4,$ gesetzt wird, aus 6) folgende Zusammenstellung:

$$
\begin{aligned}
1.2.3+1 &= 6+1 = 7.1,\\
2.4.6+1 &= 48+1 = 7.7,\\
3.6.9-1 &= 162-1 = 7.23,\\
4.8.12+1 &= 384+1 = 7.55,\\
5.10.15-1 &= 750-1 = 7.107,\\
6.12.18-1 &= 1296-1 = 7.185 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}
$$

§. 5.

Aus den im vorigen Paragraphen aufgefundenen Sätzen las sich dadurch neue und allgemeinere ableiten, und weitere wendungen machen, dass man sie mit Grössen, die durch p th bar sind, in Verbindung bringt. Aus 2) §. 4 erhält man zu Ende:

1)

$$(m_1p \pm d)(m_2p \pm 2d) \dots (m_rp \pm rd)(n_1p \pm d)(n_2p \pm 2d) \dots (n_qp \pm qd) \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } p.$$

Hierin ist der Kürze wegen q statt $p-r-1$ geschrieben und

2)

$$(mp \pm d)^{r|\pm d} \times (np \pm d)^{p-r-1|\pm d} \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } p.$$

Die oberen oder unteren Zeichen gelten in 1) und 2) gleichzeitig. Für die m und n können beliebig die Werthe 0, 1, 2, 3 .... gesetzt werden. So ist für $m = 2$, $n = 1$ und $d = \pm 1$, $p = 7$ und $r = 2$ aus 2):

$$15.16.8.9.10.11 + 1 = 1900800 + 1 = 7.271543,$$
$$13.12.6.5.4.3 + 1 = 56160 + 1 = 7.8023$$

u. s. w. Eben so erhält man:

3)

$$(m_1p \pm d)(m_2p \pm 2d) \dots (m_rp \pm rd)(n_1p \mp d)(n_2p \mp 2d) \dots (n_qp \mp qd) \equiv -1, \text{ Mod. } p.$$

$$4) \dots (mp \pm d)^{r|\pm d}(np \mp d)^{p-r-1|\pm d} \equiv -1, \text{ Mod. } p.$$

Für $p = 7$, $m = 2$, $n = 1$, $d = \pm 2$ und $r = 2$ wird aus 4):

$$-16.18.5.3.1.1 + 1 = -4320 + 1 = -7.617,$$
$$12.10.9.11.13.15 + 1 = 2316600 + 1 = 7.330943.$$

Das Zeichen bleibt in 3) und 4) unverändert, während es in 1) und 2) wechselt. Setzt man $r = \frac{p-1}{2}$, so ergibt sich aus 3):

5)

$$(m_1p \pm d)(m_2p \pm 2d) \dots (m_rp \pm \frac{p-1}{2}d).(n_1p \mp d)(n_2p \mp 2d) \dots (n_rp \mp \frac{p-1}{2}d) \equiv -1, \text{ Mod. } p,$$

oder wenn die correspondirenden m und n einander gleich gesetzt werden:

6)

$$[(m_1p)^2 - d^2][(m_2p)^2 - (2d)^2] \dots [(m_rp)^2 - (\frac{p-1}{2}d)^2] \equiv -1, \text{ Mod. } p.$$

Aus 1) und 2) wird für $r = \frac{p-1}{2}$ mit Rücksicht auf 5) u. 6) §. 4.

7)

$$(m_1p\pm d)(m_2p\pm 2d)\ldots.(m_rp\pm \tfrac{p-1}{2}d)(n_1p\pm d)(n_2p\pm 2d)\ldots(n_rp\pm \tfrac{p-}{}$$

$$\equiv \mp 1, \text{ Mod. } p.$$

$$8) \ldots\ldots [(mp\pm d)^{\frac{p-1}{2}|\pm d}]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p.$$

Das obere (negative) Zeichen auf der rechten Seite gil 7) und 8), wenn $p=4n+1$, das untere (positive) wenn $p=4$ ist. Eben so fliesst aus beiden Darstellungen:

9)

$$(m_1p\pm d)(m_2p\pm 2d)\ldots.(m_{\frac{p-1}{2}}p\pm \tfrac{p-1}{2}d) \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p.$$

$$10) \ldots\ldots (mp\pm d)^{\frac{p-1}{2}|\pm d} \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p.$$

Nr. 9) und 10) gilt, wenn p eine Primzahl von der Form 4n ist, und das Zeichen auf der rechten Seite ist dann unbestim

In allen Darstellungen dieses Paragraphen gelten die ob und unteren Zeichen auf der linken Seite gleichzeitig.

Ist $p=7$, $d=\pm 2$, so wird aus 8) und 10):

$$(9.11.13)^2-1 = 1656369-1 = 7.236624,$$
$$(5.3.1)^2-1 = 225-1 = 7.32,$$
$$\text{und } 9.11.13+1 = 1287+1 = 7.184,$$
$$5.3.1-1 = 15-1 = 7.2 \text{ u. s. w.}$$

§. 6.

In den bisher gewonnenen Resultaten ist die Zahl der toren $(p-1)$. Man kann sie auf $(p-2)$ und $(p-3)$ zurückbri und dadurch mehr Beweglichkeit in dem Calcul und neue S erhalten, wenn man $d=1$ setzt und dann von folgenden stellungen

$$\left.\begin{array}{l} 1) \ldots 1.2.3\ldots.(p-1) \equiv -1, \\ 2) \ldots 1.2.3\ldots.(p-2) \equiv +1, \\ 3) \ldots 1.2\ldots.r.1.2.3\ldots.(p-r-1) \equiv (-1)^{r+1} \end{array}\right\} \text{Mod. } p$$

ausgeht. In diesen Darstellungen kann man die Einheit, u schadet ihrer Richtigkeit, unterdrücken und dann die übr Factoren mit Grössen, die durch p theilbar sind, wie bisher

h, verbinden. Es leiten sich dann aus 1) und 2) vier zu-
nengehörige Gruppen auf folgende Weise ab:

4)

$$\left.\begin{array}{l}(m_1p\pm 1)(m_2p\pm 2)\ldots\ldots(m_{p-1}p\pm p\mp 1)\equiv -1,\\(m_1p\pm 1)(m_2p\pm 2)\ldots\ldots(m_{p-2}p\pm p\mp 2)\equiv \pm 1,\\(m_2p\pm 2)(m_3p\pm 3)\ldots\ldots(m_{p-1}p\pm p\mp 1)\equiv \mp 1,\\(m_2p\pm 2)(m_3p\pm 3)\ldots\ldots(m_{p-2}p\pm p\mp 2)\equiv +1,\end{array}\right\}\text{Mod. } p.$$

Für die m können beliebig die Werthe 0, 1, 2, 3 gesetzt
den. Die oberen und unteren Zeichen gelten gleichzeitig, auch
der rechten Seite bei den beiden mittleren Factorenfolgen.
beiden mittleren Formen haben $(p-2)$, die letzte hat $(p-3)$
ctoren. Für Fakultäten gilt hiernach:

$$5)\ \ldots\ldots\ \left.\begin{array}{l}(mp\pm 1)^{p-1|\pm 1}\equiv -1,\\(mp\pm 1)^{p-2|\pm 1}\equiv \pm 1,\\(mp\pm 2)^{p-2|\pm 1}\equiv \mp 1,\\(mp\pm 2)^{p-3|\pm 1}\equiv +1,\end{array}\right\}\text{Mod. } p.$$

So ist für $p=5$, $m=1$ und beide Zeichen auf der linken
ite aus den drei letzten Formen von 5):

$$\begin{array}{l}6.7.8-1=336-1=5.67 \text{ und } 4.3.2+1=5.5,\\7.8.9+1=504+1=5.101 \text{ und } 3.2.1-1=5.1,\\7.8-1=56-1=5.11 \text{ und } 3.2-1=5.1.\end{array}$$

Aus 3) erhält man auf dieselbe Weise:

6)

$$\ldots p\pm 1)(m_2p\pm 2)\ldots\ldots(m_rp\pm r)(n_1p\pm 1)\ldots\ldots(n_qp\pm(p-r-1))\equiv(-1)^{r+1},\ \text{Mod. } p.$$

$$\ldots p\pm 2)\ldots\ldots(m_rp\pm r)(n_1p\pm 1)\ldots\ldots(n_qp\pm(p-r-1))\equiv\pm(-1)^{r+1},\ \text{Mod. } p,$$

$$\ldots p\pm 1)\ldots\ldots(m_rp\pm r)(n_2p\pm 2)\ldots\ldots(n_qp\pm(p-r-1))\equiv\pm(-1)^{r+1},\ \text{Mod. } p,$$

$$\ldots p\pm 2)\ldots\ldots(m_rp\pm r)(n_2p\pm 2)\ldots\ldots(n_qp\pm(p-r-1))\equiv(-1)^{r+1},\ \text{Mod. } p.$$

Die oberen und unteren Zeichen gelten auf beiden Seiten gleich-
ig, q ist der Kürze wegen für $p-r-1$ geschrieben. Setzt
$p=7$, $r=2$, $m_1=2$, $m_2=1$, $n_1=1$, $n_2=n_3=n_4=0$,
ergibt sich hieraus:

$$\begin{array}{l}9\times 8.2.3.4+1=7.3703 \text{ u. } 13.5\times 6(-2)(-3(-4)+1=-7.1337,\\9\times 8.2.3.4+1=7.247 \text{ u. } 5\times 6(-2)(-3)(-4)-1=-7.103,\end{array}$$

... = 7.463 u. 13.5 × (—2)(—3)(—4)—1 = —7.
... = 7.31 u. 5(—2)(—3)(—4)+1 = —7.17,

...ungen 6) kann man leicht in Fakultäten ü... man die m und ebenso die n unter sich gl... $\frac{p-1}{2}$ geschrieben, so wird auch $p-r-1=$... für die erste und letzte Form in 6):

7)

$$\ldots \frac{p-1}{2} \ldots (n_1 p \pm 1) \ldots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{Mo}\ldots$$

8)

$$\ldots \frac{p-1}{2} \ldots (n_2 p \pm 2) \ldots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{Mo}\ldots$$

... Seite gelten die oberen und unteren Zei... die oberen Zeichen auf der rechten Seite gelten ... der Form $4n+1$, die unteren für eine von ...

... Formen in 6) fallen im vorliege... sie unterscheiden sich aber hinsich... man erhält:

9)

$$\ldots \frac{p-1}{2} \ldots (n_1 p + 1)(n_2 p + 2) \ldots (n_r p + \frac{p-1}{2}) \equiv \ldots$$

Mod. p,

$$\ldots \frac{p-1}{2} \ldots (n_1 p - 1)(n_2 p - 2) \ldots (n_r p - \frac{p-1}{2}) \equiv \ldots$$

Mod. p.

... auf der rechten Seite gelten, wen... von der Form $4n+1$, die unteren, wenn sie von ... und die correspondirenden m und n einan... aus 7) und 8):

10)

$$\ldots (m_r p + \frac{p-1}{2})]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$\ldots (m_r p - \frac{p-1}{2})]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

Fac

er den nämlichen Bedingungen wie zu 7) und 8). Aus 10) et sich weiter ab:

11)

$$(m_1 p \pm 1)(m_2 p \pm 2) \dots (m_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

$$(m_2 p \pm 2)(m_3 p \pm 3) \dots (m_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

nn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. Das Zeichen auf r rechten Seite ist unbestimmt.

Geht man von den Factorenfolgen auf Fakultäten über, so ibt sich aus diesen Darstellungen:

$$12) \dots (mp \pm 1)^{\frac{p-1}{2}|\pm 1}(np \pm 1)^{\frac{p-1}{2}|\pm 1} \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$(mp \pm 2)^{\frac{p-3}{2}|\pm 1}(np \pm 2)^{\frac{p-3}{2}|\pm 1} \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$13) \dots (mp + 2)^{\frac{p-3}{2}|1}(np + 1)^{\frac{p-1}{2}|1} \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$(mp - 2)^{\frac{p-3}{2}|-1}(np - 1)^{\frac{p-1}{2}|-1} \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

$$14) \dots [(mp \pm 1)^{\frac{p-1}{2}|\pm 1}]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$[(mp \pm 2)^{\frac{p-3}{2}|\pm 1}]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p.$$

Auf der linken Seite gelten in 12) und 14) die oberen und nteren Zeichen gleichzeitig. Auf der rechten Seite gelten in 12), 3) und 14) die oberen Zeichen, wenn p von der Form $4n+1$; ie unteren, wenn es von der Form $4n+3$ ist. Ferner ist aus 14):

$$15) \dots (mp \pm 1)^{\frac{p-1}{2}|\pm 1} \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

$$(mp \pm 2)^{\frac{p-3}{2}|\pm 1} \equiv \pm 1, \text{ Mod. } p,$$

enn p von der Form $4n+3$ ist.

Aus 13) wird für $p = 5$ und $p = 7$, $m = 1$:

$7.6.7 + 1 = 294 + 1 = 5.49$ und $3.4.3 - 1 = 5.7$,

$9.10.8.9.10 - 1 = 64799 = 7.9257$ und $5.4.6.5.4 + 1 = 7.343$.

Aus 14) wird für dieselben Werthe:

$6.7.6.7 + 1 = 5.353$ und $7.7 + 1 = 5.10$,

$4.3.4.3 + 1 = 5.29$ und $3.3 + 1 = 5.2$,

$$8.9.10.8.9.10-1=7.74057 \text{ und } 9.10.9.10-1=7.1157,$$
$$6.5.4.6.5.4-1=7.2057 \text{ und } 5.4.5.4-1=7.57.$$

Aus 15) wird für $p=7$:

$$8.9.10+1=7.103 \text{ und } 6.5.4-1=7.17,$$
$$9.10+1=7.13 \text{ und } 5.4+1=7.3.$$

Werden die Zeichen im ersten Theile der Darstellunge 6) positiv, im zweiten negativ genommen, so entsteht:

16)

$$(m_1p+1)\ldots.(m_rp+r)(n_1p-1)\ldots.(n_qp-(p-r-1))\equiv-1, \text{ Mo}$$
$$(m_1p+1)\ldots.(m_rp+r)(n_2p-2)\ldots.(n_qp-(p-r-1))\equiv+1, \text{ Mo}$$
$$(m_2p+2)\ldots.(m_rp+r)(n_1p-1)\ldots.(n_qp-(p-r-1))\equiv-1, \text{ Mo}$$
$$(m_2p+2)\ldots.(m_rp+r)(n_2p-2)\ldots.(n_qp-(p-r-1))\equiv+1, \text{ Mo}$$

Hierin ist q für $p-r-1$ geschrieben. Werden die corre direnden m und n gleich gesetzt, so erhält man aus der e und letzten Form, wenn $r=\frac{p-1}{2}$ geschrieben wird:

17)

$$[(m_1p)^2-1^2][(m_2p)^2-2^2]\ldots.[(m_rp)^2-(\frac{p-1}{2})^2]\equiv-1, \text{ Mo}$$

$$[(m_2p)^2-2^2][(m_3p)^2-3^2]\ldots.[(m_rp)^2-(\frac{p-1}{2})^2]\equiv+1, \text{ Mo}$$

Der Uebergang aus den Factorenfolgen auf Fakultäten sich aus 16) für r und $p-r-1$ leicht. Wird $r=\frac{p-1}{2}$ g so folgt:

$$18)\quad (mp+1)^{\frac{p-1}{2}|1}(np-1)^{\frac{p-1}{2}|-1}\equiv-1, \text{ Mod. } p,$$
$$(mp+1)^{\frac{p-1}{2}|1}(np-2)^{\frac{p-3}{2}|-1}\equiv+1, \text{ Mod. } p,$$
$$(mp+2)^{\frac{p-3}{2}|1}(np-1)^{\frac{p-1}{2}|-1}\equiv-1, \text{ Mod. } p,$$
$$(mp+2)^{\frac{p-3}{2}|1}(np-2)^{\frac{p-3}{2}|-1}\equiv+1, \text{ Mod. } p.$$

Für $m=4$, $n=1$ und $p=5$ wird aus 18):

$$6.7\times4.3+1=5.101 \text{ und } 6.7\times3-1=5.25,$$
$$7\times4.3+1=5.17 \text{ und } 7\times3-1=5.4,$$

§. 7.

Auch auf den erweiterten Wilson'schen Lehrsatz lassen sich die bisher gemachten Bemerkungen anwenden.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, eine zusammengesetzte Zahl durch:

1) . . . . $z = p^{\pi}.r^{\varrho}.s^{\sigma} \ldots,$

worin p, r, s Primzahlen bedeuten, so ist die Anzahl aller zu z theilfremden Zahlen:

2)

$$k = \frac{z}{p.r.s\ldots}(p-1)(r-1)(s-1)\ldots = (p-1)p^{\pi-1}(r-1)r^{\varrho-1}(s-1)s^{\sigma-1}\ldots$$

Bezeichnet man ferner die zu z theilfremden Zahlen selbst durch b_1, b_2, b_3 .... b_k; so gilt bekanntlich für ihr Product:

3) . . . . . $P = b_1.b_2.b_3 \ldots b_k \equiv \mp 1$, Mod. z.

Das Zeichen auf der rechten Seite ist unbestimmt gelassen und soll in der vorstehenden Weise beibehalten werden, obgleich dasselbe specialisirt werden kann, wie in Disquis. arithm. von Gauss 78) nachzusehen ist. In 3) ist $b_1 = 1$ und $b_k = z - 1$. Nimmt man nun zu 3) noch folgende leicht zu rechtfertigende Sätze:

4) . . . . $P_1 = b_1.b_2.b_3 \ldots b_{k-1} \equiv \pm 1$, Mod. z,
$P_2 = b_2.b_3.b_4 \ldots b_k \equiv \mp 1$, Mod. z,
$P_3 = b_2.b_3 \ldots b_{k-1} \equiv \pm 1$, Mod. z,

zu Hülfe, die um einen oder zwei Factoren verkürzt sind, so leiten sich hieraus folgende allgemeinere Factorenfolgen ab:

5)

$$\left.\begin{array}{l}(m_1z+b_1)(m_2z+b_2)\ldots(m_kz+b_k) \equiv \mp 1,\\ (m_1z+b_1)(m_2z+b_2)\ldots(m_{k-1}z+b_{k-1}) \equiv \pm 1,\\ (m_2z+b_1)(m_3z+b_3)\ldots(m_k+b_k) \equiv \mp 1,\\ (m_2z+b_2)(m_3z+b_4)\ldots(m_{k-1}z+b_{k-1}) \equiv \pm 1,\end{array}\right\}\text{Mod. } z.$$

Für negative b erhält man folgende vier Formen mit den zugehörigen Zeichen:

6)

$$\left.\begin{array}{l}(m_1z-b_1)(m_2z-b_2)\ldots(m_kz-b_k) \equiv \mp 1,\\ (m_1z-b_1)(m_2z-b_2)\ldots(m_{k-1}z-b_{k-1}) \equiv \mp 1,\\ (m_2z-b_2)(m_3z-b_3)\ldots(m_kz-b_k) \equiv \pm 1,\\ (m_2z-b_2)(m_3z-b_3)\ldots(m_{k-1}z-b_{k-1}) \equiv \pm 1,\end{array}\right\}\text{Mod. } z.$$

Setzt man $m_1=1$, $m_2=1$, $m_3=1$ und $m_4=0$ in 5) und $m_1=1$, $m_2=1$, $m_3=2$, $m_4=2$ in 6), so erhält man folgende vier Formen, für die positiven und negativen b, wenn $z=10=2.5$, $k=4$ und $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=7$, $b_4=9$ bedeutet:

$$11.13.17.9+1=10.2188,\quad 9.7.13.11+1=10.901,$$
$$11.13.17-1=10.243,\quad 9.7.13+1=10.82,$$
$$13.17.9+1=10.199,\quad 7.13.11-1=10.100,$$
$$13.17-1=10.23,\quad 7.13-1=10.9.$$

Da $p, r, s, \ldots$ Primzahlen sind, so wird die Anzahl der zu z theilfremden, aus 2) hervorgehenden Zahlen gerade sein. Nur der Fall $z=2$, der übrigens nicht weiter in Frage kommt, macht eine Ausnahme. Man bemerkt nun leicht, dass die eine Hälfte der zu z theilfremden Zahlen kleiner, die andere grösser als $\frac{1}{2}z$ ist, und dass je zwei von der ersten und letzten gleich weit abstehenden Zahlen sich zur Summe z ergänzen und daher:

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b_{k-a}=z-b_{a+1}$$

ist, worin a die Werthe 0, 1, 2, 3 .... $\frac{1}{2}k$ durchlaufen kann.

Aus diesen Bemerkungen lassen sich weitere Sätze ableiten. Unterscheidet man zwischen dem negativen und positiven Zeichen, geht von dem negativen aus und multiplicirt mit b_1 und zählt z auf der rechten Seite zu, so entsteht aus 3):

$$b_1 \times b_1 . b_2 . b_3 \;\ldots\; b_k \equiv z-b_1, \text{ Mod. } z.$$

Da nun $z-b_1=b_k$ nach 7) ist, so erhält man hieraus:

$$b_1 \times b_1 . b_2 . b_3 \;\ldots\; b_{k-1} \equiv +1, \text{ Mod. } z.$$

Wird diese Darstellung mit b_2 multiplicirt und dann $-z$ auf der rechten zugezählt, so folgt:

$$b_1 . b_2 \times b_1 . b_2 \;\ldots\; b_{k-1} \equiv -(z-b_2), \text{ Mod. } z.$$

Da aber $z-b_2=b_{k-1}$ nach 7) ist, so entsteht hieraus:

$$b_1 . b_2 \times b_1 . b_2 \;\ldots\; b_{k-1} \equiv -b_{k-1}, \text{ Mod. } z,$$

folglich:

$$b_1 . b_2 \times b_1 . b_2 . b_3 \;\ldots\; b_{k-2} \equiv -1, \text{ Mod. } z.$$

Durch Multipliciren mit b_3 und Zuzählung von z und Substitution von $z-b_3=b_{k-2}$ und Ausstossen von b_{k-2} erhält man:

$$b_1 . b_2 . b_3 \times b_1 . b_2 . b_3 \;\ldots\; b_{k-3} \equiv +1, \text{ Mod. } z,$$

u. s. w. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt zu folgender Darstellung:

$$8) \quad \ldots b_1 . b_2 \ldots . b_r \times b_1 . b_2 \ldots . b_{k-r} \equiv (-)^{r+1}, \text{ Mod. } z.$$

Diese Darstellung gilt für das negative Zeichen in 3). Legt man aber das positive Zeichen zu Grunde und wendet man die gleichen Schlüsse an, so erhält man:

9)

$$b_1 b_2 b_3 \ldots . b_r \times b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_{k-r} \equiv (-1)^r, \text{ Mod. } z.$$

Man kann auch beide Formen von 8) und 9) in einer geben und dann das Zeichen auf der rechten Seite $\mp(-1)^r$ oder $\pm(-1)^{r+1}$ schreiben.

Ist $z = 9$, so sind die theilfremden Zahlen 1, 2, 4, 5, 7, 8 und man erhält aus 8):

$$\begin{aligned} 1.2.4.5.7.8+1 &= 2240+1 = 9.249, \\ 1.1.2.4.5.7-1 &= 280-1 = 9.31, \\ 1.2.1.2.4.5+1 &= 80+1 = 9.9, \\ 1.2.4.1.2.4-1 &= 64-1 = 9.7. \end{aligned}$$

Ist $z = 15$, dann sind die theilfremden Zahlen 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 und es wird aus 9) für $r = 0$ und $r = 4$:

$$\begin{aligned} 1.2.4.7.8.11.13.14-1 &= 896896-1 = 15.59783, \\ 1.2.4.7 \times 1.2.4.7-1 &= 3136-1 = 15.209. \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{2}k = c$ und $c = r$, so wird auch $k-r = \frac{1}{2}k = c$, und es geht 8) und 9) über in:

10)

$$b_1 b_2 b_3 \ldots . b_c \times b_1 b_2 b_3 \ldots . b_c \equiv \mp(-1)^c, \text{ Mod. } z,$$

und das Zeichen auf der rechten Seite kann, da c eine gerade oder ungerade Zahl sein kann, positiv oder negativ sein, wie diess aus dem Gesagten folgt. Ist das Zeichen positiv, so kann auch folgender Satz gelten:

$$11) \quad \ldots \ldots b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_c \equiv \pm 1, \text{ Mod. } z.$$

Er muss es jedoch nicht. Im vorliegenden Falle folgt immer aus 10), dass:

$$12) \quad \ldots \frac{(b_1 b_2 b_3 \ldots . b_c + 1)(b_1 b_2 b_3 \ldots . b_c - 1)}{z} = G,$$

eine ganze Zahl, oder dass das vorstehende Product durch z ohne Rest theilbar sein muss. Da aber z eine zusammengesetzte Zahl ist, so kann der eine Theil von ihr in dem einen Factor in 12), und der andere im zweiten enthalten sein, ohne dass z ausschliesslich in dem einen oder dem andern enthalten sein muss. So gilt der Satz 11) für die Zahlen $z = 9, 14, 18, 22$ u.s.w. und man hat für $z = 9$:

$$1.2.4+1 = 9.1.$$

für $z = 14$:

$$1.3.5-1 = 14.1,$$

für $z = 18$:

$$1.5.7+1 = 18.2,$$

für $z = 22$:

$$1.3.5.7.9+1 = 945+1 = 22.43,$$

u. s. w. Dagegen gilt er nicht für die Zahlen 8, 12, 15, 20, u. s. w., obgleich nach 8) und 9) das positive Zeichen auf der rechten Seite auftritt und es ist aus 12) für $z = 8$:

$$1.3.1.3-1 = (3+1)(3-1) = 8.1,$$

für $z = 12$:

$$1.5.1.5-1 = (5+1)(5-1) = 12.2,$$

für $z = 15$:

$$1.2.4.7 \times 1.2.4.7-1 = (56+1)(56-1) = 15 \times 209 = 15 \times 11.19,$$

für $z = 20$:

$$1.3.7.9 \times 1.3.7.9-1 = (189+1)(189-1) = 20.1786 = 20.19.94,$$

u. s. w.

§. 8.

Bringt man mit den in §. 7. erhaltenen Resultaten Werthe, die durch z theilbar sind, in Verbindung, so erhält man weitere neue Sätze. In den Darstellungen 8) und 9) kann $b_1 = 1$ unbeschadet der Richtigkeit weggelassen werden. Hiernach erhält man folgende vier Formen von Factorenfolgen:

1)

$$(m_1 z \pm b_1) \ldots. (m_r z \pm b_r)(n_1 z \pm b_1) \ldots. (n_q z \pm b_q) \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } z.$$

2)

$$(m_1 z \pm b_1) \ldots. (m_r z \pm b_r)(n_2 z \pm b_2) \ldots. (n_q z \pm b_q) \equiv \pm(-1)^{r+1}, \text{ Mod. } z.$$

3)

$$(m_2 \pm b_2) \ldots (m_r z \pm b_r)(n_1 z \pm b_1) \ldots (n_q \pm b_q) \equiv \pm(-1)^{r+1}, \text{ Mod. } z.$$

4)

$$(m_2 \pm b_2) \ldots (m_r z \pm b_r)(n_2 z \pm b_2) \ldots (n_q z \pm b_q) \equiv (-1)^{r+1}, \text{ Mod. } z.$$

Hierin ist q für $k-r$ geschrieben. Die m und n können beliebig die Werthe 0, 1, 2, 3, ... durchlaufen. Dieselben Gebilde ergeben sich für 9) §. 7., wenn man $(-1)^r$ statt $(-1)^{r+1}$ schreibt.

In 1) bis 4) kann auch $\frac{1}{2}k=c$ statt r geschrieben und können die m und n belassen werden. Setzt man aber auch die correspondirenden m und n einander gleich, so leiten sich, da 2) und 3) sofort zusammen fallen, folgende Darstellungen ab:

5)

$$[(m_1 z \pm b_1)(m_2 z \pm b_2) \ldots (m_c z \pm b_c)]^2 \equiv (-1)^{c+1}, \text{ Mod. } z.$$

6)

$$(m_1 z \pm b_1)[(m_2 z \pm b_2) \ldots (m_c z \pm b_c)]^2 \equiv \pm(-1)^{c+1}, \text{ Mod. } z.$$

7)

$$[(m_2 z \pm b_2)(m_3 z \pm b_3) \ldots (m_c z \pm b_c)]^2 \equiv (-1)^{c+1}, \text{ Mod. } z.$$

Wegen der Zeichen auf der rechten Seite tritt die zu 1) bis 4) gemachte Bemerkung in Kraft.

Für $z=9$, $c=3$, $m_1=m_2=m_3=1$ ergeben sich aus 5) bis 7) folgende Fälle für die negativen b:

$$\begin{aligned} (8.7.5)^2 - &= 78400 - 1 = 9.8711, \\ 10.(7.5)^2 - 1 &= 12250 - 1 = 9.1361, \\ 8.(7.5)^2 + 1 &= 9800 + 1 = 9.1089, \\ (7.5)^2 - 1 &= 1225 - 1 = 9.136. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die für die positiven b. Nach 5) und 7) kann auch sein:

8)

$$\left.\begin{aligned} (m_1 z \pm b_1)(m_2 z \pm b_2) \ldots (m_c z \pm b_c) \equiv \pm 1, \\ (m_2 z \pm b_2)(m_3 z \pm b_3) \ldots (m_c z \pm b_c) \equiv \pm 1, \end{aligned}\right\} \text{ Mod. } z,$$

wenn in 5) und 7) auf der rechten Seite das positive Zeichen gilt. Er wird aber nicht immer eintreten, und es ist wie in 12) §. 7., wenn das positive Zeichen auf der rechten Seite gilt:

9)

$$[(m_1z \pm b_1) \ldots (m_cz \pm b_c)+1][(m_1z \pm b_1) \ldots (m_cz \pm b_c)-1] \equiv 0, \text{ Mod. } z,$$

$$[(m_2z \pm b_2) \ldots (m_cz \pm b_c)+1][(m_2z \pm b_2) \ldots (m_cz \pm b_c)-1] \equiv 0, \text{ Mod. } z.$$

Aus 8) erhält man sofort für die oben angegebenen Zahlenwerthe für $z=9$ und für positive und negative b:

$$10.11.13+1 = 9.159 \text{ und } 8.7.5-1 = 9.31,$$
$$11.13+1 = 9.16 \quad \text{und} \quad 7.5+1 = 9.4,$$

u. s. w. Dagegen ist für $z=8$, $c=2$, $b_1 = \pm 1$ und $b_2 = \pm 3$:

$$(9.11)^2-1 = 9801-1 = 8.1225 \text{ und } (7.5)^2-1 = 1224 = 8.153,$$
$$11^2-1 = 121-1 = 8.15 \text{ und } 5^2-1 = 8.3,$$

u. s. w. Wird der eine Theil der Factoren in 1) bis 4) mit dem positiven, der andere mit dem negativen Zeichen genommen, so entsteht:

10)

$$\left.\begin{array}{l} (m_1z+b_1) \ldots (m_rz+b_r)(n_1z-b_1) \ldots (n_qz-b_q) \equiv \pm 1, \\ (m_1z+b_1) \ldots (m_rz+b_r)(n_2z-b_2) \ldots (n_qz-b_q) \equiv \mp 1, \\ (m_2z+b_2) \ldots (m_rz+b_r)(n_1z-b_1) \ldots (n_qz-b_q) \equiv \pm 1, \\ (m_2z+b_2) \ldots (m_rz+b_r)(n_2z-b_2) \ldots (n_qz-b_q) \equiv \pm 1, \end{array}\right\} \text{Mod. } z.$$

Hierin ist q für $k-r$ geschrieben. Wird $c=\frac{1}{2}z$ für r und werden die correspondirenden m und n gleich gesetzt, so gehen diese Factorenfolgen, da sich die zwei mittleren Formen vereinigen lassen, in folgende über:

11)

$$\left.\begin{array}{l} [(m_1z)^2-b_1^2][(m_2z)^2-b_2^2] \ldots\ldots [(m_cz)^2-b_c^2] \equiv \pm 1, \\ (m_1z \pm b_1)[(m_2z)^2-b_2^2] \ldots\ldots [(m_cz)^2-b_c^2] \equiv \mp 1, \\ [(m_2z)^2-b_2^2][(m_3z)^2-b_3^2] \ldots [(m_cz)^2-b_c^2] \equiv \pm 1, \end{array}\right\} \text{Mod. } z.$$

Für $z=10$ ist $k=4$, $c=2$ und die theilfremden Zahlen sind 1, 3, 7, 9. Setzt man daher $m_1=m_2=1$, so erhält man aus 11) folgende zusammengehörige Fälle:

$$(10^2-1^2)(10^2-3^2)+1 = 9009+1 = 10.901,$$
$$11.(10^2-3^2)-1 = 1001-1 = 10.100,$$
$$9.(10^2-3^2)+1 = 819+1 = 10.82,$$
$$(10^2-3^2)-1 = 9-1 = 10.9.$$

§. 9.

Nach Analogie der in §. 3. 5) und ff. mitgetheilten Sätze ann man auch die in §. 6. gefundenen behandeln und dadurch u weiteren neuen Entwicklungen gelangen. Von den vielen mög-chen Fällen heben wir einige hervor, beschränken uns dabei ber auf Fakultäten, da von ihnen der Uebergang auf Factoren-olgen von allgemeinerer Form sehr leicht ist.

1)

$$\left.\begin{aligned}
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}+2\equiv0,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}+2\equiv0,
\end{aligned}\right\}\text{Mod. }p.$$

Diese Darstellungen gelten, wenn p eine Primzahl von der 'orm $4n+1$ und a ein Quadratrest zu p ist.

2)

$$\left.\begin{aligned}
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}+2\equiv0,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}+2\equiv0,
\end{aligned}\right\}\text{Mod. }p.$$

e gelten für $p=4n+1$ und wenn a ein Nicht-Quadratrest p ist.

3)

$$\left.\begin{aligned}
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}-2\equiv0,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}-2\equiv0,\\
&(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,,\\
&(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,
\end{aligned}\right\}\text{Mod. }p.$$

ie gelten für $p=4n+3$ und wenn a ein Ouadratrest zu ist.

4)

$$\left.\begin{array}{l}
(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}+a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0,\\
(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}-2\equiv0,\\
(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}-a^{\frac{p-1}{2}}-2\equiv0,
\end{array}\right\}\text{Mod. } p.$$

Sie gelten für $p=4n+3$ und wenn a ein Nicht-Quadratres zu p ist.

In den Darstellungen 1) bis 4) können m und n die Werth 0, 1, 2, 3 .... durchlaufen und gleich gesetzt werden. Die obere und unteren Zeichen in den Fakultäten gelten gleichzeitig.

Setzt man $p=7$, so sind 1, 2, 4 Quadratreste und 3, 5, (Nicht-Quadratreste zu 7 und man erhält aus den 2ten Formen i 3) und 4) für das positive und negative Zeichen und $m=n=1$

$$\begin{array}{ll}
9.10.9.10+1^3-2=7.1157, & 5.4.5.4+1^3-2=7.17,\\
9.10.9.10+2^3-2=7.1158, & 5.4.5.4+2^3-2=7.18,\\
9.10.9.10+4^3-2=7.1166, & 5.4.5.4+4^3-2=7.26,\\
9.10.9.10+3^3\quad=7.1161, & 5.4.5.4+3^3\quad=7.21,\\
9.10.9.10+5^3\quad=7.1175, & 5.4.5.4+5^3\quad=7.35,\\
9.10.9.10+6^3\quad=7.1188, & 5.4.5.4+6^3\quad=7.48,
\end{array}$$

u. s. w.

Auch können die in §. 6. gefundenen Sätze durch Potenzirun in allgemeinerer Weise dargestellt werden, wovon hier einig specielle Fälle hervorgehoben werden sollen.

Aus der ersten und letzten Form in 5) erhält man:

$$5) \ldots\ldots \left.\begin{array}{r}
[(mp\pm1)^{p-1|\pm1}]^{2n}\equiv+1,\\
[(mp\pm1)^{p-1|\pm1}]^{2n-1}\equiv-1,\\
[(mp\pm2)^{p-3|\pm1}]^{n}\equiv+1,
\end{array}\right\}\text{Mod. } p.$$

Aus den zwei mittleren Formen entsteht:

$$6) \ldots \left.\begin{array}{l}
[(mp\pm1)\ldots(mp\pm(p-2))]^n\equiv(\pm1)^n,\\
[(mp\pm2)\ldots(mp\pm(p-1))]^n\equiv(\mp1)^n,
\end{array}\right\}\text{Mod. } p,$$

und es lassen sich aus jeder dieser Darstellungen drei Forme wie in 5) ableiten. Aus 12) §. 6. gewinnt man:

7)

$$\left.\begin{array}{l}
[(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}]^{2n}\equiv+1,\\
[(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}]^{2n-1}\equiv-1,\\
[(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}]^{2n}\equiv+1,\\
[(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}]^{2n-1}\equiv-1.
\end{array}\right\}\text{Mod. }p.$$

Diese Formen gelten, wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist.

8)

$$\left.\begin{array}{l}
[(mp\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}(np\pm1)^{\frac{p-1}{2}|\pm1}]^{n}\equiv+1,\\
[(mp\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}(np\pm2)^{\frac{p-3}{2}|\pm1}]^{n}\equiv+1.
\end{array}\right\}\text{Mod. }p.$$

Sie gelten, wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. Auch hier bleiben die Bemerkungen über die m und n u. s. w., welche zu 1) bis 4) gemacht wurden, in Kraft. Diese Darstellungen lassen sich, wie man sieht, beliebig fortsetzen. Aus 5) entnehmen sich folgende Sätze:

9) Das Product der geraden Potenzen von $(p-1)$ in dem Zahlensystem auf einander folgenden (steigenden oder fallenden) Zahlen ist um die Einheit grösser, das der ungeraden aber um die Einheit kleiner als ein Vielfaches der Primzahl p, wenn p oder ein Vielfaches von ihr nicht unter diesen Zahlen enthalten ist.

10) Das Product aller Potenzen von $(p-3)$ auf einander folgenden (steigenden oder fallenden) Zahlen von der dritten Form $(mp\pm2)(mp\pm3)\ldots.(mp\pm p\mp2)$ ist immer um die Einheit grösser als ein Vielfaches von der Primzahl p.

Aehnliche Sätze lassen sich auch über Factorenfolgen aufstellen, was sich leicht durchführen lässt, und schliesslich können alle die so aufgefundenen Gebilde mit a^{p-1} und $a^{\frac{p-1}{2}}$ in Verbindung gebracht werden.

XV.

Ueber einige Anwendungen des Census-Theor

Von

Herrn Professor *J. B. Listing*
in Göttingen.

Die Bestandtheile eines räumlichen Complexes im allgem
Sinne zerfallen in vier Abtheilungen oder sog. Curien, nä
die der Punkte, welche als effectiv gegeben und im Cens
zählen sind (wie z. B. die Eckpunkte eines Polyeders), die
effectiven Linien (bei einem Polyeder dessen Kanten), di
gegebenen Flächen (wie Seitenflächen an einem Polyeder
die der Räume (beim Polyeder der endliche von dessen
fläche eingeschlossene Raum und der übrige ausgeschlos
ins Unendliche ausgedehnte und das Polyeder allseitig umsc
sende Raum). Ausser dem in jeder Curie vorhandenen Nu
der Constituenten kommt nun das sogenannte Attributiv im C
in Betracht, dessen Betrag sich aus den Modalitäten der Cyk
der Periphraxis und der Ausdehnung ins Unendliche zusam
setzt. In der Curie der Punkte, welche durchweg einfach
von gleicher Art aller der genannten Modalitäten entbehren,
das Attributiv jederzeit weg. Die Cyklose oder der cykl
Zusammenhang ist bei einer Linie Null oder einfach, bei
Fläche oder einem Raume Null, oder ein- oder meh
Die Periphraxis oder die allseitige Umschliessung komm
bei Flächen oder Räumen vor und ist bei jenen Null oder
z. B. bei einer sphäroidischen Fläche ohne auf ihr befin
effective Punkte oder Linien) einfach, bei diesen Null oder
bei einem ein oder mehrere Aggregate von Punkten, Linien,
chen, Räumen allseitig umgebenden Raume) ein- oder mehr
Die Ausdehnung ins Unendliche kommt (den Fall a

ommen, wo Nichts, also auch nicht der leere unendliche Raum, egeben ist) stets dem ins Unendliche sich erstreckenden Raume der auch mehreren Theilen desselben zugleich, so wie vorkomnenden Falls auch Flächen und Linien zu, zählt aber, indem das äumlich Unendliche censuell durch einen in unendlicher Ferne edachten Punkt repräsentirt wird, für alle an der Ausdehnung ns Unendliche theilnehmenden Constituenten gemeinsam als einach.

Wir bezeichnen mit a den Numerus der ersten Curie, d. h. ie Anzahl der effectiven Punkte, ebenso mit b die Zahl der Liien, mit c die Zahl der Flächen und mit d die Zahl der Räume, odann mit $\varkappa$ die Summe der Cyklosen in der Curie der Linien nit $\varkappa'$ die Summe der Cyklosen der Flächen, mit $\varkappa''$ diese Summe n der Curie der Räume, ferner mit π die Rangzahl der Periphraxis in der Curie der Flächen, mit π' diese Zahl in der Curie der Räume, endlich mit ω (Null in jenem vorhin erwähnten besondern Fall, wo der Numerus aller Curien $= 0$, sonst stets $= 1$) den die Ausdehnung ins Unendliche betreffenden Antheil des Attributivs. Bilden wir nun für die vier Curien eines räumlichen Complexes der Reihe nach folgende vier Grössen:

$$
\begin{aligned}
A &= a, \\
B &= b - \varkappa, \\
C &= c - \varkappa' + \pi, \\
D &= d - \varkappa'' + \pi' - \omega,
\end{aligned}
$$

so ist das Aggregat dieser vier, der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen genommenen Grössen gleich Null, oder:

$$A - B + C - D = 0.$$

Dies ist der Inhalt des Census-Theorems, dessen Beweis in er Abhandlung „der Census räumlicher Complexe“ *) gegeben orden ist.

Als eine sehr einfache und leichte Anwendung des Censusatzes soll nun zunächst die Begründung einer allgemeinen Eigenchaft der aus cyklischen Linien zusammengesetzten Linear-Comlexionen im Raume gegeben werden, welche ich bei Gelegenheit er Besprechung solcher Complexionen in den „Vorstudien zur opologie“ (S. 56.) **) ohne Beweis erwähnt habe.

*) Im X. Band der Abhandl. der K. Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. 1863.

**) In den Göttinger Studien 1847, erste Abtheilung.

Eine oder mehrere cyklische (d. h. in sich zurücklaufende) unter sich beliebig verschlungene oder verknotene Linien bilden eine Linear-Complexion im Raume. Wir projiciren die Complexion auf eine unbegrenzte Ebene oder auf eine Kugelfläche, d. h. wir führen sie auf eine Complexion in der Fläche zurück. Die aus dieser Projection erwachsenden Durchschnittspunkte der Linien entsprechen ebenso vielen sog. Ueberkreuzungen in der räumlichen Complexion. Diese Punkte sind sämmtlich vierzügig, nämlich solche, wo 4 Lineartheile der Complexion concurriren. Die Fläche — Ebene oder Kugel — zerfällt in eine Anzahl getrennter Theile oder Parzellen, deren Zahl zu der Zahl der Kreuz- oder Knotenpunkte in bestimmter Relation stehen, um deren Ermittelung es sich hier handelt.

Nehmen wir zuerst die Projection auf der Ebene vor. Die Zahl der cyklischen die Complexion zusammensetzenden Linien sei p. Sie bilden auf der Ebene eine Configuration, deren Lineamente alle unter sich zusammenhängen oder aus mehreren von einander getrennten Theilen bestehen. Die Zahl der die Configuration bildenden getrennten Theile sei q. Unter den p Linien kann eine Anzahl r als isolirte, weder von andern Linien noch in sich selbst durchkreuzte Ringlinien erscheinen. Die Zahlen p, q, r können alle drei zugleich Null sein; q und r können nicht grösser als p, r kann nicht grösser als q sein. Ist $q = 1$ und $r = 0$, so bildet die Configuration eine ganze Complexion ohne getrennte Theile. Sie enthält eine Zahl endlicher Flächenparzellen, umgeben von einem einfach cyklodischen ins Unendliche sich erstreckenden Theil der Fläche, dem sog. Flächen-Amplexum. Ist $r = q = p$, so besteht die Configuration aus p isolirten unverknoteten cyklischen Linien, deren jede einfach cyklodisch ist, so dass der der Cyklose entsprechende Theil des Attributivs in der zweiten Curie $\varkappa = p = r$ wird. Je zwei der p Cykeln können nun in der Configuration entweder ausser einander (seclusiv) oder in einander (inclusiv) erscheinen. Nicht nur in den beiden extremen hier möglichen Fällen, einmal, wo alle p Cykeln in seclusiver Stellung vorkommen und neben p acyklodischen Parzellen ein $p$fach cyklodisches Amplexum, und dann, wo alle p Cykeln in inclusiver Stellung befindlich und ausser einem einfach cyklodischen Amplexum noch $p - 1$ einfach cyklodische Parzellen und eine einzige acyklodische Parzelle erscheint; sondern auch in allen übrigen noch möglichen Fällen gemischter Seclusion und Inclusion ist die Summe aller Flächen-Cyclosen $\varkappa' = p = q$, wie man sich leicht durch Anwendung der sog. Anathese*) überzeugt.

*) „Der Census räumlicher Complexe", S. 25.

>1 und $<p$, so ist, — gleichviel welche Verhältnisse der
sion oder Inclusion zwischen den q von einander isolirten
en der Configuration stattfinden mögen — die Summe der
sen in der Curie der Linien $= r$, in der Curie der Flächen
Man hat also für den Census der Linearcomplexion in der
jedenfalls $\varkappa = r$, $\varkappa' = q$. Die Ebene theilt den gesammten
lichen Raum in zwei getrennte acyklodische Theile und man
mit in der vierten Curie $d = 2$, $\varkappa'' = 0$, $\pi' = 0$, ausserdem
. Den Numerus in den drei ersten Curien betreffend sei
ahl der vorhandenen Kreuzungs- oder Knotenpunkte $= a$.
sind sämmtlich vierzügig und die Zahl der Linien in der
n Curie besteht aus denen, deren jede je zwei Punkte mit
er verbindet und deren Zahl somit doppelt so gross ist als
hl der Knotenpunkte, und noch aus r vorhandenen isolirten
noteten Ringlinien, also $b = 2a + r$. Die Zahl aller Flächen-
len in der dritten Curie, das Amplexum mitgezählt, sei c.
hat man für den Census:

$$A = a,$$
$$B = 2a + r - r,$$
$$C = c - q,$$
$$D = 1;$$

:

$$a - 2a + c - q - 1 = 0,$$

$$c - a = q + 1,$$

n einer auf die Ebene projicirten räumlichen Linear-Com-
einer beliebigen Zahl von cyklischen Linien ist die Zahl
lächen-Parzellen einschliesslich des Amplexums weniger
hl der Kreuzungs- oder Knotenpunkte um Eins grösser als
hl der isolirten Theile der Complexion.

ojiciren wir jetzt die räumliche Complexion auf eine Kugel-
so ist auch hier die Zahl der Knotenpunkte $= a$, der Li-
$= 2a + r$, der Flächenstücke, in welche die sphärische Pro-
sfläche zerfällt, $= c$, der Räume $= 2$. Ferner ist auch
och $\varkappa = r$; die Zahl der Cyklosen in dritter Curie aber
da an die Stelle des ins Unendliche sich erstreckenden
cyklodischen Amplexums nunmehr eine um eine Cyklose
Parzelle der Kugelfläche tritt, $= q - 1$. Im Attributiv der
Curie wird, da beide Räume, der eingeschlossene wie der
chlossene, acyklodisch sind, $\varkappa'' = 0$, dagegen ist der letztere
periphraktisch, der erstere aperiphraktisch, und somit

$\pi' = 1$, ausserdem wie vorhin $\omega = 1$. Die Periphraxis in der dritten Curie, die bei der Projection auf die Ebene in allen Fällen, selbst dann, wenn $q = 0$ und gar keine Linearcomplexion gegeben wäre, Null ist, ist nunmehr nur $= 0$, wenn $q = 1$ oder grösser als 1, dagegen $= 1$, wenn $q = 0$. Man hat also in dem singulären Falle, wo $q = 0$, vorerst $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$, $\varkappa = 0$, $\varkappa' = 0$, $\varkappa'' = 0$, $\pi = 1$, $\pi' = 1$, $\omega = 1$; also $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$, $D = 2$, wodurch sich der Census-Satz verificirt und daneben $c - a = q + 1$ wird. Im Falle aber, wo $q > 0$, hat man:

$$A = a,$$
$$B = 2a + r - r,$$
$$C = c - q + 1,$$
$$D = 2;$$

also wiederum auch hier, wie oben:

$$c - a = q + 1.$$

Diese Relation stellt also den Zusammenhang zwischen der Zahl der Knotenpunkte und der Zahl der Flächenparzellen in jeder aus einer beliebigen Anzahl cyklischer Linien bestehenden auf eine Ebene oder eine Kugelfläche projicirten Linearcomplexion dar.

In dem Falle, wo die Complexion in ihrer Projection nicht aus mehreren von einander getrennten Theilen besteht, d. h. wo $q = 1$, nimmt die Relation diese Gestalt an:

$$c - a = 2.$$

„Die Zahl aller Parzellen (das Amplexum mitgerechnet) ist um 2 grösser als die Zahl der Kreuzungen."

Dies ist der a. a. O. in den „Vorstudien zur Topologie" erwähnte Satz, der also hiermit bewiesen ist. Die dortigen Figuren 6 — 17 können zur Erläuterung des Satzes in den durch sie dargestellten Beispielen dienen, in welchen durchweg $p = q = 1$ und $r = 0$ ist.

Eine anderweite nicht uninteressante Anwendung gestattet das Censustheorem auf die Polyedertheorie. Nachdem Euler*) um die Mitte des vorigen Jahrhunderts den bekannten auf die

---

*) L. Euler: elementa doctrinae solidorum, und: demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Nov. Comm. Petrop. ad annum 1752 et 1753. Petropoli 1768. pag. 109 und 140.

Polyeder bezüglichen Satz gefunden und für solche Körper dieser Art, bei welchen gewisse einschränkende Bedingungen erfüllt sind, die indessen damals nur stillschweigend vorausgesetzt wurden, streng bewiesen hatte, zog 60 Jahre später fast gleichzeitig der Gegenstand die Aufmerksamkeit zweier ausgezeichneter Geometer auf sich. **Lhuilier** *) suchte dem Euler'schen Satze diejenige Verallgemeinerung zu geben, welche im Stande wäre, jene beschränkenden Bedingungen in der Beschaffenheit des Polyeders zu beseitigen, oder das Theorem so zu erweitern, dass es auch die sogenannten Ausnahme-Fälle der Euler'schen Regel mit umfasste. Andererseits gab **Cauchy** **) unter Beibehaltung der Beschränkung auf sogenannte convexe Polyeder dem Euler'schen Satze die Erweiterung, wodurch er sich auf ein Aggregat von beliebig vielen Polyedern bezieht, in welches ein Polyeder durch ebene in seinem Innern angelegte Zwischenwände verwandelt werden kann.

Was zunächst diese Erweiterung betrifft, welche Cauchy dem Satze gegeben, wonach, wenn S die Zahl der sämmtlichen polyedrischen Eckpunkte, F die Zahl sämmtlicher Seiten- und Innenflächen, A die Zahl der Kanten aller polyedrischen Theile bedeutet und P die Anzahl der Polyederräume,

$$S + F = A + P + 1$$

ist, so habe ich bereits in der Abhandlung über den Census (S. 52.) die Evidenz derselben als eines Beispiels zu dem Census für cyklodische Constituenten nachgewiesen. Es wäre also überflüssig hier noch einmal darauf zurückzukommen.

Die **Lhuilier**'sche Verallgemeinerung dagegen, auf welche ich in der Einleitung jener Abhandlung nur im Allgemeinen aufmerksam machen konnte, dürfte wohl noch eine nachträgliche eingehendere Besprechung ihrer Tragweite und Leistungsfähigkeit verdienen. An der Hand des nicht bloss auf Polyeder in der weitesten Bedeutung, sondern auf räumliche Complexe irgend welcher Beschaffenheit anwendbaren Census-Lehrsatzes wird eine solche Revision leichten Schrittes ausführbar und zur Begründung des bei jener Gelegenheit ausgesprochenen Urtheils dienlich sein.

*) **Lhuilier**: mémoire sur la polyédrométrie, contenant une demonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen de diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti (extrait par M. Gergonne). Ann. de mathém. par Gergonne III. 1812. Dec. pag. 160.

) **Cauchy: recherches sur les polyèdres, 2. partie. Journal de l'école polyt. cah. 16. tome IX. Paris 1813. pag. 76.

Die von Lhuilier gegebene Relation zwischen der Anzahl von Flächen eines polyedrischen Raumes im allgemeineren Sin des Wortes, d. h. dessen Flächenbegrenzung nur aus Eben besteht, der Anzahl S von Eckpunkten, der Zahl A von Kant ferner der Anzahl i von eingeschlossenen Polyederräumen im nern des Polyeders, der Zahl o von durchgehenden Oeffnung und den Zahlen p, p' u. s. w. von eingeschriebenen Polygo auf Seitenflächen des Polyeders ist:

$$F + S = A + 2(i - o + 1) + (p + p' + p'' + \ldots.).$$

Lhuilier zählt an den Flächen des polyedrischen Körp wie oft aus einer polygonalen Seitenfläche ein polygonaler T so herausgeschnitten erscheint, dass dieser ganz innerhalb Fläche jener gelegen ist. Dies kann an einer Fläche p mal, einer zweiten p' mal, in einer dritten p'' mal u. s. w. der sein, so dass die Zahl dieses Vorkommnisses $p + p' + p'' +$ ist. Offenbar ist hiermit die Summe der Cyklosen in der zwe Curie in Anschlag gebracht, welches im Census durch $\varkappa'$ beze net wird, nur ist das Kriterium nicht mit der erforderlichen gemeinheit ausgestattet, was sofort einleuchtet, wenn man Fälle denkt, in welchen z. B. zwei einer Polyederseite eingesc bene Polygone einen Eckpunkt oder eine Seite gemein ha und man zweifelhaft sein wird, ob dann $p = 1$ oder $= 2$ zu se sei. Der Begriff der Flächen-Cyklose und die mittelst des Diagramms auch in jedem nach der Lhuilier'schen Begriff stimmung zweifelhaften Falle ermittelbare Ordnungszahl der klose gibt einen sicheren Weg zur Auffindung des Werthes $\varkappa'$. Lhuilier sagt: *supposons que l'une des faces du poly soit comprise entre p polygones extérieurs les uns aux a et un polygone qui les renferme tous.* Verstehen wir den druck extérieurs les uns aux autres im sachlich günstigen S dass die eingeschriebenen Polygone auf der Fläche des umsc benden von einander vollständig isolirt sein sollen, so dass sie durch Ecken oder Seiten, obwohl immer extérieurs les aux autres, unter einander in Contact stehen, man unter p die Zahl der Polygone, sondern der isolirten Polygongruppen steht, so dürfen wir $p + p' + \ldots.$ oder $\Sigma p = \varkappa'$ setzen. Bei ebenen Fläche ist in der That die Zahl der von einander v isolirten Theile ihrer Gesammtgrenze um 1 grösser als ihre nungszahl der Cyklose, was bei krummen Flächen nicht a mein der Fall ist, (vgl. „der Census räuml. Compl." S. 13. Fig.

Sodann wird in der Lhuilier'schen Relation durch o die zahl der durchgehenden Oeffnungen bezeichnet oder der c

ähnlichen Durchbrechungen, welche das Polyeder durchsetzen. In vielen Fällen ist bei einer solchen Gestaltung der polyedrische Raum und der umgebende amplexe Raum gleichvielfach cyklodisch, so dass dann $2o$ mit der in der dritten Curie stattfindenden Anzahl der Cyklosen $\varkappa''$ übereinkommt. In anderen Fällen aber würde nach Lhuilier's Feststellung zweifelhaft bleiben, wie man zur Kenntniss der Anzahl der hier zu zählenden Durchbrechungen gelangen soll. Wieviel Durchbrechungen zählen wir an einem polyedrischen Körper, den wir erhalten, wenn wir z. B. die Kanten eines Würfels oder eines Oktaeders durch ebenbegrenzte Stäbe gleichsam verkörpern? wieviel wenn wir am Würfel ausser seinen Kanten auch noch die vier Diagonalen in dem Vorbild des polyedrischen Körpers hinzunehmen? Nach den zur Ermittelung der Cyklose gegebenen Censusregeln ist der nach dem Typus der Würfelkanten gebildete Körper 5fach cyklodisch, diese Zahl ist im Falle des Oktaeders 7, im Falle der zu den Kanten hinzutretenden Diagonalen des Würfels 12. Diese wirklichen Werthe von o mittelst blosser Intuition wie in den einfacheren Fällen Lhuilier's zu ermitteln scheint so gut wie unausführbar, indem sich die Durchbrechungen solcher gestellförmigen polyedrischen Körper der Subsumption unter den Begriff canalartiger Durchgänge destomehr entziehen, je complicirter die Gestaltung ist. Von dieser Schwierigkeit abgesehen aber würde in Fällen der letzteren Art allerdings wie in den einfacheren der amplexe Raum sich jedesmal als ebensovielfach cyklodisch erweisen wie der polyedrische Körper, so dass also auch hier noch $\varkappa''=2o$ gesetzt werden darf. Indess gibt es noch andere Fälle, in denen nicht wie durchweg bei Lhuilier $\varkappa''$ eine gerade Zahl ist oder, allgemein zu reden, wo die Cyklose des polyedrischen Raums einerseits und die Cyklose des übrigen oder der übrigen Räume andererseits nicht die Differenz Null, sondern 1 oder 2 oder 3 u. s. w. ergeben, so dass alsdann die Lhuilier'sche Regel, nach welcher diese Differenz stets Null sein soll, sich nicht bewahrheitet und somit wiederum gleichsam in höherer Stufe ihre Ausnahmen darbietet, wie der Euler'sche Satz die seinigen in niederer Stufe, während sie doch alle Ausnahmen des Euler'schen Satzes in ihr Bereich aufzunehmen beansprucht. Indem ich, auf die Zuziehung von Zeichnungen verzichtend, nur auf vergleichungsweise sehr einfache Fälle eingehen kann, führe ich beispielshalber folgende Verbindung parallelepipedischer Theile eines polyedrischen Körpers an, in welchem zwei gleich grosse Würfel einander benachbart auf einer Fläche eines dritten grösseren so stehen, dass sie längs einer aufrechten Kante mit einander im Contact sind, beide wiederum überdeckt von einem vierten grösseren Würfel. Durch

Vereinigung der Räume aller vier Würfel zu einem polyedrischen Körper, indem man in Gedanken die gemeinsamen Verbindungsflächen oder Flächenstücke entfernt, entsteht ein polyedrische offenbar nicht durchbrochener Raum, der aber nichts desto weniger einfach cyklodisch ist, ohne dass das Amplexum eine entsprechend Cyklose besitzt. Hier ist also die Zahl $\varkappa'=1$ und die vorhin erwähnte Differenz ist 1 statt 0. Sie würde sich durch Vervielfältigung solcher Polyederkanten, wo nicht nur einer, sondern zwei oder beliebig viele demselben Polyederraum angehörige diedrische Winkelraumtheile ihre gemeinsame Grenze finden, auf jede beliebige, mit der Lhuilier'schen Regel unvereinbare Zahl bringen lassen. Oder es stehen zwei oder mehrere Pyramiden lediglich mit ihren Spitzen unter einander in Contact, während nach Wegnahme der Basisflächen der Pyramiden der ihre Spitzen umgebende Raum durch leicht erdenkbare Anordnung der anderweitigen Grenzflächen dem erwachsenden polyedrischen Körper angehört. Auch hier lässt sich der Ueberschuss der Cyklose des Polyederraumes über den des übrigen oder der übrigen durch die Grenzflächen desselben ausgeschlossenen Räume auf 1 oder 2, 3 u.s.w. bringen. Gehören anderenfalls die in einem Punkte zusammenstossenden Ecken dem Polyeder statt dem Amplexum an, so wird das Amplexum beliebig vielfach cyklodisch werden können, während das Polyeder acyklodisch sein kann. Weiter können Theile desselben Polyederraums zu beiden Seiten einer und derselben Fläche liegen, welche, falls man der Allgemeinheit des Begriffes polyedrischer Begrenzung keinerlei Eintrag thun will, als Grenzfläche wird statuirt werden müssen. In einem Oktaeder ziehe man zwei einander kreuzende, je durch vier Kanten gehende Hauptschnitte. Das Oktaeder zerfällt dadurch in vier tetraedrische Theile und hört also auf, einen einzigen Polyederraum darzustellen. Führt man aber die beiden Schnittebenen nur bis zur Hälfte so, dass jede derselben diejenige Diagonale, welche zur andern senkrecht steht, zur neuen Grenzlinie erhält, so fährt der Innenraum fort ein einziger zu bleiben und ist, jenachdem die halben Schnitte in derselben oder in verschiedenen Hälften des Oktaeders liegen, acyklodisch oder einfach cyklodisch, in beiden Fällen ohne Einfluss auf den acyklodischen Zustand des Amplexums. Im ersten Falle der gedachten Alternative fügt sich das Polyeder annoch dem Euler'schen Satze, im zweiten bildet es eine im Lhuilier'schen Satze nicht vorgesehene Ausnahme. Man hat nämlich dort $a=7$, $b=17$, $c=12$, folglich $a+c=b+2$; hier aber, wo von einer Durchbohrung des Polyeders offenbar nicht die Rede sein kann, $a=S=7$, $b=A=16$, $c=F=10$, welche Werthe mit der Lhuilier'schen Regel, da unzweifelhaft $i=0$ und $\Sigma p=0$, nur durch

den unzulässigen Werth $\frac{1}{2}$ für o vereinbar sein würden. Nach dem Census-Satze dagegen hat man:

$$\begin{aligned}
&a = 7,\\
&b = 16, \quad \varkappa = 0,\\
&c = 10, \quad \varkappa' = 0, \quad \pi = 0,\\
&d = 2, \quad \varkappa'' = 1, \quad \pi' = 1, \quad \omega = 1,
\end{aligned}$$

und somit $A - B + C - D = 0$. Es verdient bemerkt zu werden, dass unter Einräumung der eben erwähnten Allgemeinheit die längs der Oktaederdiagonale verlaufende Grenze jedes der beiden Halbschnitte als Polyederkante anzusehen ist, wo das Mass des diedrischen Winkels an der Kante vier rechte Winkel beträgt.

Diese Beispiele genügen darzuthun, dass sich die Evaluation von o im Lhuilier'schen Satze in manchen Fällen als unausführbar, in anderen als irrig erweist. Auf der ihm zukommenden Stufe von Allgemeinheit und ausser dem Gebiete dieser Schwierigkeit oder Unzuträglichkeit aber hat man $2o = \varkappa''$ zu setzen.

Bei der in der Lhuilier'schen Relation enthaltenen Zahl i endlich sind die Bedenken denen ähnlich, mit welchen das Aggregat Σp umgeben war, obwohl minder erheblich als die auf o bezüglichen. Unter i wird die Zahl der im Innern des polyedrischen Raums vorkommenden eingeschlossenen und polyedrisch abgegrenzten Hohlräume verstanden. *Un corps*, heisst es, *peut être compris entre i surfaces polyèdres fermées, extérieures les unes aux autres, et une surface polyèdre fermée qui les renferme toutes.*

Offenbar ist i einerseits die Ordnungszahl der Periphraxis in der vierten Curie, andererseits aber ein Theil des Numerus dieser Curie, zu welchem der Polyederraum selbst und das Amplexum mit dem Beitrag 2 den übrigen Theil liefern. Man wird also zu setzen haben $\pi' = i + 1$ (wo der Zusatz 1 aus der Periphraxis des amplexen Raumes entspringt) und $d = i + 2$. Die Fälle, wo zwischen zweien oder mehreren der i Einschlüsse Berührung statt findet, sei es in Ecken oder Kanten, oder wo solche Contacte zwischen den Einschlüssen und der übrigen Grenzfläche des polyedrischen Raumes vorkommen, sind von Lhuilier nicht berücksichtigt worden. Die günstige Interpretation ist allerdings die, dass man unter i nicht die Zahl der Innenräume schlechthin, sondern die Zahl der gegen einander isolirten Innenräume oder Gruppen von Innenräumen zu verstehen hat, um darin die dem Polyederraume selbst zukommende periphraktische Ordnungszahl

zu gewinnen. Dagegen ist andererseits unter i die Zahl säm
licher **geschlossenen** Innenräume, gleichviel ob sie in Con
stehen oder nicht, zu verstehen um den richtigen Numerus
in der vierten Curie zu erhalten, so dass im Falle eines über
Lhuilier'sche Stufe hinausgehenden Masses von Allgemein
$2i$ durch $i+i'$ ersetzt werden müsste, wo i und i' unglei
Werthe annehmen können. Noch weniger aber sind in Lhuili
Gleichung solche Fälle berücksichtigt, wo aus mehrfachem C
tact zwischen Innenräumen und der einschliessenden Polyed
grenze, sowie zwischen Innengrenzen untereinander statt räumlic
Pheriphraxis räumliche Cyklose erwächst, und i also nicht
die Werthe von d und π', sondern auch von $\varkappa''$ bestimmt o
sofern $\varkappa''$ schon von o abhing, bestimmen hilft.

Stellen wir uns also auf den von Lhuilier bei seinen Ar
mentationen eingenommenen Standpunkt, welcher, wie das Bis
rige hinreichend dargelegt haben mag, in mehrfacher Hinsi
gegen die im Censustheorem zur Geltung gebrachten Stufe
Allgemeinheit zurückbleibt, so haben wir, um die Lhuilier'sc
Gleichung in die des Census zu übertragen, den vorstehend
Erörterungen gemäss zu setzen:

$$\begin{array}{llll} a = S, & & & \\ b = A, & \varkappa = 0, & & \\ c = F, & \varkappa' = \Sigma p, & \pi = 0, & \\ d = i+2, & \varkappa'' = 2o, & \pi' = i+1, & \omega = 1. \end{array}$$

Aus der Gleichung des Census $A-B+C-D=0$ ergibt s
dann sofort:

$$S-A+F-\Sigma p-(i+2)+2o-(i+1)+1=0,$$

oder die Lhuilier'sche Gleichung:

$$F+S=A+2(i-o+1)+\Sigma p.$$

Die hiermit nachgewiesene Gültigkeit der Lhuilier'schen Gl
chung, welche alle sog. Ausnahmefälle des Euler'schen Satz
zu umfassen vermeint*) beruht aber, wie wir nunmehr sehen,
Voraussetzungen, welche der bei einem polyedrisch gestaltet

---

*) M. Lhuilier (sagt Gergonne) termine par observer que les tr
sortes d'exceptions qu'il vient de considérer, *et qui paraissent é
les seules auxquelles le théorème d'Euler puisse être s
jet*, pouvant se trouver réunis dans un même polyèdre, et s'y trou
chacune indéfiniment, etc.

chlossenen Raume zu statuirenden Allgemeinheit nur theilweise sprechen, und glaube ich somit das in der Einleitung zu der handlung über den Census räumlicher Complexe (S. 2.) nur gedeutete Urtheil im Vorstehenden hinreichend substanziirt haben.

Die von Lhuilier gestellte naheliegende Frage, unter welcher dingung ein Polyeder — gleichsam durch Compensation der verhiedenen Ausnahme-Modificationen — den Euler'schen Satz $+S=A+2$ verificirt, wird von ihm, seinen Unterstellungen gemäss, richtig durch die Forderung, dass:

$$2i+\Sigma p=2o$$

ein müsse, beantwortet.

Vom Standpunkte des Censustheorems dagegen, wo bei einem schlossenen, polyedrisch gestalteten, sonst irgendwie beschaffenen Körperraum stets $\omega=1$, $\varkappa=0$, $\pi=0$ ist, lautet die fragliche Bedingung:

$$\varkappa''-\varkappa'=d+\pi'-3.$$

Dieselbe kann noch in eine andere Form gebracht werden, wenn wir die Zahl der abgeschlossenen Innenräume durch (d), die Zahl der isolirten Innenräume durch (π') bezeichnen, so dass also $d=(d)+2$, $\pi'=(\pi')+1$. Wir erhalten dadurch für die Compensations-Bedingung den Ausdruck:

$$\varkappa''-\varkappa'=(d)+(\pi'),$$

d. h. der Ueberschuss der räumlichen Cyklosen über die Flächen-Cyklosen muss gleich der Summe der abgeschlossenen Innenräume und der isolirten Innenräume (oder Gruppen von Innenräumen) sein. Sind wie nach der Lhuilier'schen stillschweigenden Annahme sämmtliche abgeschlossenen Innenräume zugleich auch isolirt, so wird $(d)=(\pi')=i$ und in diesem Falle, sowie unter den früher besprochenen Lhuilier'schen Voraussetzungen, für welche $\varkappa''=2o$, $\varkappa'=\Sigma p$ gesetzt werden darf, geht unser Ausdruck der in Rede stehenden Bedingung in den Lhuilier'schen über. Die Werthe von (d) und (π') können Null oder jede (positive) ganze Zahl sein, nur kann (d) nicht kleiner als (π') werden. Im Falle der polyedrische Körper keine abgeschlossenen Innen- oder Hohlräume besitzt, wo also $(d)=(\pi')=0$, lautet die Bedingung:

$$\varkappa''-\varkappa'=0,$$

und in diesem Falle müssen also gleichviel Cyklosen in den Cu-

rien der Flächen und Räume vorhanden sein. Der einfach (Euler'sche) dem vorliegenden subordinirte Fall ist der, wo aus der Zahl der Hohlräume auch die Zahl der Cyklosen von R men und Flächen Null ist. Zugleich aber ist einleuchtend, d Compensation der Ausnahmen von dem Euler'schen Satze dann möglich wird, wenn der polyedrische Complex mit Cyklo ausgestattet ist.

Beispiele der verschiedenen eben gedachten Fälle zu besp chen, würde ohne Beihülfe von Figuren nur in sehr beschränk Weise thunlich sein und soll, so wie die Unterscheidung cens verschiedener Arten polyedrischer Körper, einer andern Geleg heit vorbehalten bleiben *).

[Nachr. v. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1867 Nov. 13.]

XVI.

Der Sternschnuppenfall auf der Sonne.

Von

Herrn Professor Dr. *H. Schramm*,

in Wiener-Neustadt.

---

1. **Die Sternschnuppen der Erde.** Die neueste Theorie d Sternschnuppen von Dir. Schiaparelli hat uns einen eige thümlichen Einblick in das Getriebe des Weltalls eröffnet. D genannte Astronom hatte nachgewiesen, dass die Sternschnupp Feuerkugeln und ähnliche Meteore, ebenso zu den Weltkörp

---

*) Modelle, welche die Betrachtung solcher wie anderer allgem nerer Fälle von Complexen besonders erleichtern, werden nach mei Angabe bei dem hiesigen Universitätsmechanicus Apel angefertigt.

gehören, wie die Planeten und Kometen, und dass sie sich, ebenso wie diese in elliptischen und parabolischen Bahnen um die Sonne bewegen.

Professor Newton in New-Haven hat aus den bisher gemachten Sternschnuppen-Beobachtungen berechnet, dass auf der ganzen Erde stündlich circa

$$30 \times 10460 = 313800$$

mit freiem Auge sichtbare Sternschnuppen fallen, welche einen scheinbaren Weg von 16° in einer mittleren Entfernung von 140 bis 232 Kilometer vom Beobachter beschreiben. Die mittlere Dauer der Lichterscheinung ist nach Beobachtungen von Wartmann in Genf 0·45 Zeitsekunden.

Mit einem starken Fernrohre kann man eine noch weit grössere Zahl derselben erblicken, die man, nach Beobachtungen von Pape und Winnecke in Göttingen (1854) *), auf etwa:

$$1500 \times 10460 = 15690000$$

per Stunde angeben kann. Um also auch auf diese teleskopischen Sternschnuppen Rücksicht zu nehmen, wollen wir die Zahl der mit freiem Auge sichtbaren auf das Doppelte anschlagen, so dass man sagen kann: Es fallen auf einer Hemisphäre der Erde in einer halben Stunde circa

43 Sternschnuppen.

Ein Beobachter sieht die Sternschnuppen als einen glänzenden Streifen, durchnittlich von der Lichtstärke eines Fixsternes 3ter bis 4ter Grösse.

Bedenkt man aber, dass ein glänzender Gegenstand, infolge der Irradiazion, dem Auge immer grösser scheint, als ein nur beleuchtetes Objekt, und dass Letzteres erst dann sichtbar wird, wenn es sich dem Auge unter einem Gesichtswinkel von circa 2 Bogenminuten zeigt, so kann man wohl auch annehmen, dass eine Sternschnuppe dem Auge unter einem scheinbaren Gesichtswinkel von 2′ erscheinen muss.

In der That könnte man einen blos beleuchteten Körper von der Grösse einer Sternschnuppe in einer Entfernung von 150 Kilometer gar nicht wahrnehmen. — Professor Newton berechnet

---

*) Diese Daten sind einer Abhandlung von C. v. Littrow entnommen, welche in dessen Kalender für 1868 veröffentlicht ist.

das mittlere Gewicht einer Sternschnuppe auf 0·36 Gramm; aber selbst wenn man dieses auf 1 Gramm schätzt und dasselbe nur 3mal dichter als das Wasser annimmt, so wäre der wahre Durchmesser einer Sternschnuppe:

0·0086 Meter.

Wäre dieselbe also nur beleuchtet, so könnten wir sie höchstens in einer Entfernung von 15 Metern sehen; da wir aber dieselbe noch in der Entfernung von 150 Kilometer wahrnehmen, in der sie nur einen scheinbaren Durchmesser von 0·012 Bogensekunden besitzt, so muss diese Sternschnuppe wenigstens einen 100 Millionenmal grösseren Lichtglanz besitzen als ein günstig beleuchtetes Objekt von 2′ scheinbarem Durchmesser.

Wir wollen den folgenden Berechnungen die Lichtstärke L einer Sternschnuppe mittlerer Grösse, und in der Entfernung $e = 150$ Kilometer, als Masseinheit zu Grunde legen; es wird dann die Lichtstärke derselben, in der Entfernung e_1, gemessen werden durch den Ausdruck:

$$L_1 = \left(\frac{e}{e_1}\right)^2 \cdot L.$$

Ebenso wird man zugeben müssen, dass a Sternschnuppen, unter denselben Verhältnissen, auch eine $a$mal grössere Leuchtkraft besitzen, als eine einzelne.

Könnte ein Beobachter unsere Erde von der Entfernung

$$e_1 = 1{,}500000 \text{ Kilometer}$$

sehen, in welcher sie ihm nahezu in der Grösse der Sonnenscheibe erscheinen müsste, so würde er auf der ihm zugekehrten Hälfte während 0·5 Sekunden etwa 43 Sternschnuppen fallen sehen. Diese Sternschnuppen würden der Erde eine Leuchtkraft verleihen, welche mehr als 2 Millionenmal schwächer ist als jene einer Sternschnuppe in der Entfernung $e = 150$ Kilom.

Selbst wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dass jede Sternschnuppe während ihrer Bewegung einen glänzenden Streifen von 16° Länge und 2′ scheinbarer Breite zeigt, wodurch deren Glanzfläche etwa 600mal vergrössert wird, so geben jene 43 Sternschnuppen der Erdscheibe immer nur einen 4000mal geringeren Lichtglanz als jener eines Fixsternes 3ter oder 4ter Grösse ist.

2. **Die Sternschnuppen der Sonne.** Sehen wir nun nach, welchen Lichteffekt diese Meteore auf der Sonne hervorbringen müss-

n. Um dies zu erfahren, ist es vor allem nöthig, die Zahl der-nigen Sternschnuppen zu kennen, welche während 0·5 Sekunden die Sonnenatmosphäre gelangen.

Zu diesem Zwecke müssen wir die Sternschnuppen, ebenso ie die Kometen, eintheilen: in sporadische, welche sich in Parabeln, und in periodische, welche sich in Ellipsen um die Sonne bewegen. Von diesen wollen wir nur die sporadischen Weltkörper in Rechnung ziehen und annehmen, dass dieselben m Raume nach allen Richtungen gleich vertheilt sind.

Angenommen also, es ziehen durch einen Kugelraum von der Grösse unserer Erde zu gleicher Zeit a Sternschnuppen nach allen möglichen Richtungen, so werden davon nur jene in die Sonnenatmosphäre gelangen, welche eine Parabel beschreiben, deren Parameter kleiner ist als der Sonnendurchmesser.

Die Umhüllungsfläche aller dieser Parabeln, welche in Taf. IV. Fig. 6. durch den Punkt E gehen, ist ein Kreiskegel, der durch Rotation der Tangente ET um die Zentrallinie ES entsteht. Den Winkel α, den diese Tangente an die äusserste Parabel mit der Zentrallinie ES einschliesst, kann man aber aus der Polargleichung einer Parabel vom Parameter D berechnen:

$$\varrho = \frac{D}{1 + \cos\omega}.$$

Bekanntlich ist:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varrho}{\varrho'}$$

und:

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{D\sin\omega}{(1+\cos\omega)^2} = \frac{\varrho^2}{D}\sqrt{\frac{D}{\varrho}\left(2-\frac{D}{\varrho}\right)},$$

daher:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{D}{\varrho}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{D}{\varrho}\left(2-\frac{D}{\varrho}\right)}} = \sqrt{\frac{D}{2\varrho - D}}.$$

Nehmen wir nun den Radius $r = 1$ an, so ist:

$$D = 224,$$
$$\varrho = 24100;$$

daher:

$$\alpha = 3^0\,54'\,30'' = 234{\cdot}5 \text{ Bogenminuten.}$$

Bezeichnet aber (α'') einen sehr kleinen Winkel in Sek
ausgedrückt, so lässt sich die innerhalb eines Kegelraumes
Radius α'' enthaltene Anzahl a_1 aus der Anzahl a der nach
Seiten des Kugelraumes ziehenden Sternschnuppen aus der
mel berechnen:

$$a_1 = \left(\frac{\alpha''.\pi}{360.60.60}\right)^2.a = 0{\cdot}001163.a,$$

d. h. mit anderen Worten: von 860 durch einen Punkt
Raumes nach allen Richtungen ziehenden Sternsch
pen wird nur eine in die Sonnenatmosphäre gelan

Da man aber annehmen kann, dass dieses auch von
ganzen übrigen Raume gilt, der unsere Sonne umgibt, so w
alle Sternschnuppen, welche während 0·5 Sekunden durch
Kugelschale vom Radius $\varrho = 24100$ Erdhalb. mit gleicher Gesc
digkeit zur Sonne ziehen, auch nahezu in derselben Zeit b
Sonne zusammentreffen. Die Verschiedenheit in der Gesc
digkeit derselben wird sich im Ganzen dadurch ausgleichen,
die in einem Zeitintervalle zurückgebliebenen Körper von
der vorhergehenden ersetzt werden, — und ebenso umgeke

Die Erde beschreibt während 0·5 Sekunden einen Weg
15 Kilometern. Dieses ist jedoch gegenüber dem Erdhalbm

$$r = 6370 \text{ Kilometer}$$

eine so kleine Zahl, dass wir immerhin annehmen können
Erde stehe während dieser Zeit stille und werde von der S
aus — sammt Atmosphäre — als runde Scheibe von 6420
meter wahrem und 8·6″ scheinbarem Halbmesser gesehen. D
Raum verhält sich aber zu dem Gesammtraume um die S
herum wie die Zahlen:

$$\left(\frac{8.6.\pi}{180.60.60}\right)^2.\pi : 4\pi,$$

und es wird daher die Anzahl A der in 0·5 Sekunden in die
nenatmosphäre fallenden Sternschnuppen gleich sein:

$$A = \left(\frac{360.60.60}{8{\cdot}6.\pi}\right)^2 a_1 = \left(\frac{234{\cdot}5 \times 60}{8{\cdot}6}\right)^2.a$$

oder:

$$A = 2677000.a.$$

Während also auf der Erde nur $a{=}43$ Sternsch

pen sichtbar sind, müsste man in derselben Zeit auf der Sonne circa

115 Millionen

Sternschnuppen erblicken.

Die Annahme der gleichmässigen Vertheilung dieser Weltkörper nach allen Richtungen, welche die eigentliche Basis dieser Rechnungen bildet, hat manches für, manches gegen sich.

Dafür spricht z. B. das Vorkommen der Kometen in allen möglichen Richtungen, und wenn auch Bahnen mit geringerem Neigungswinkel gegen die Ekliptik häufiger vorkommen, so kann dies seinen Grund auch darin haben, dass Kometen mit Bahnen dieser Art der Erde viel näher kommen, daher auch länger und deutlicher sichtbar sind als Kometen mit Bahnen von grossem Neigungswinkel.

Dagegen spricht die Annahme von Radiationspunkten, aus denen die Sternschnuppen hervorkommen. Diese Theorie ist noch nicht ganz ausgebildet, obwohl man bisher ziemlich viele Orte des Weltraumes als Radiationspunkte bezeichnet hat.

Wäre aber die Anzahl dieser letzteren sehr gross und dieselben in allen Gegenden des Weltraums zerstreut, so könnten auch die Sternschnuppen nach allen Richtungen — wenn auch nicht gleichmässig vertheilt — vorkommen.

Uebrigens bedingt die Annahme von Radiationspunkten zugleich das Vorkommen sporadischer Meteore in allen Richtungen. Denn so bald wir uns ein System von parallel- oder divergentziehenden Weltkörpern denken, deren gegenseitige Anziehung sehr gering ist, so werden dieselben, an einem Fixsterne vorbeiziehend, nach ihrem Durchgange durch die Fixstern-Nähe bedeutend zerstreut sich im Raume vertheilen. Es müssen daher in unser Sonnensystem von allen Fixsternen zerstreute Meteore gelangen.

3. Grössere Meteore auf der Sonne. Nebst den Sternschnuppen sehen wir von Zeit zu Zeit auch grössere Meteore, in Gestalt von Feuerkugeln, durch unsere Atmosphäre ziehen. Dieselben zeigen sich bisweilen sogar in der Grösse des Mondes, also mit einem scheinbaren Durchmesser von 32 Bogenminuten.

Wir wollen jedoch, um ja nicht zu hoch zu schätzen, deren scheinbaren Durchmesser in der Entfernung von 150 Kilometer (ohne Irradiation) mit 30″ oder 0·5 Minuten annehmen. Ferner nehmen wir an, dass ein aufmerksamer Beobachter jährlich nur

eine solche Feuerkugel sieht, was gewiss nicht übertrieben ist, denn wir lesen in den Jahrbüchern der k. k. meteorologischen Central-Anstalt zu Wien, dass ein Beobachter der Station Kahlenberg (Dr. Billhuber)

im Jahre	1854	5	Feuerkugeln,
„ „	1855	2	„
„ „	1856	3	„

gesehen hat. — Es könnten also auf der ganzen Erdoberfläche jährlich

wenigstens 10460 Feuerkugeln

beobachtet werden. Davon entfallen auf eine Hemisphäre in 0·5 Sekunden etwa 0·000083 Feuerkugeln.

Wenden wir bei diesen Meteoren dasselbe Rechnungsverfahren an, welches wir zur Berechnung der Anzahl der Sonnensternschnuppen benutzt haben, so finden wir, dass in jeder halben Sekunde auf der uns zugekehrten Sonnenscheibe

$$A = 2677000 \times 0{\cdot}000083 = 222 \text{ Feuerkugeln}$$

sichtbar werden.

4. **Lichtglanz dieser Meteore.** Die Feuerkugeln erglühen und schmelzen in Folge der Reibung bei ihrem Durchgange durch die Atmosphäre. Sobald sie aber flüssig werden, zertheilen sie sich in Folge des Widerstandes der Luft in eine Wolke von glühenden Tropfen. Wir bemerken ähnliche Vorgänge auch in unserer Atmosphäre, obwohl diese eine weit geringere Dichte hat und die Meteore auch mit kleinerer Geschwindigkeit durch dieselbe ziehen, als es bei der Sonne der Fall ist. Man lese z. B. die Berichte von Augenzeugen ähnlicher Erscheinungen, welche sich in der Zeitschrift der österr. Gesellsch. für Meteorologie Bd. I. S. 25, 106, 203, 250, 283 und 318 vorfinden. So heisst es z. B. S. 318:

„Am 11. Oktober (1866), halb 11 Uhr Abends, wurde, wie man uns mittheilt, in Totis ein prächtiges Meteor gesehen. Es zog nemlich am nördlichen Himmel, beiläufig 45 Grade über dem Horizonte, eine Leuchtkugel, die so starkes Licht verbreitete, dass 2 bis 3 Sekunden lang der ganze Gesichtskreis hell beleuchtet war; die Feuerkugel zog von Ost gegen West und platzte endlich mit einem prachtvollen Lichteffekte, auf ihrer ganzen Bahn gleich einer Rakete Millionen von Funken umherstreuend.“

Denken wir uns also eine solche Feuerkugel von nur 30 Sekunden scheinbarem Durchmesser in glühende Tropfen von der Grösse einer Sternschnuppe (0·012″ scheinb. Durchmesser) verwandelt, so entstehen daraus

$$\left(\frac{30}{0 \cdot 012}\right)^3 = 15626 \text{ Millionen}$$

solcher Tropfen, welche gleichsam eben so viele Sternschnuppen repräsentiren. Würden die Sonnen-Sternschnuppen denselben Lichtglanz besitzen wie jene unserer Erde, so müssten wir Erdbewohner den Lichtglanz einer derselben, L_1:

$$L_1 = \left(\frac{150}{150000000}\right)^2 . L = \frac{L}{10^{12}},$$

also etwa billionenmal schwächer sehen; da wir aber während 0·5 Sekunden

$$115 . 10^6 \text{ Sternschnuppen}$$

und überdies jene aus den 222 Feuerkugeln enstandenen

$$3468000 . 10^6 \text{ Lichtfunken}$$

auf der Sonne wahrnehmen, so wird diese in einem Lichtglanze erscheinen, welcher **wenigstens** gleich ist:

$$\frac{3468000 . 10^6}{10^{12}} L = 3 \cdot 468 L,$$

d. h. **die Sonne müsste uns wenigstens einen Lichtstrahl zeigen, der 3½mal stärker ist als jener einer Erdsternschnuppe.**

5. Kann das Sonnenlicht von diesen Meteoren allein herrühren? Wir haben bisher nur das Minimum des Lichtglanzes der Sonne berechnet, indem wir überall nur die kleinsten Daten in Rechnung zogen. Namentlich aber ist die Annahme, dass der Lichtglanz eines Sonnenmeteors nicht grösser sei als der eines Meteors auf der Erde, nicht richtig. Die Intensität der ersteren ist gewiss bedeutend grösser.

Zur Berechnung dieser Lichtintensität fehlt uns aber die Kenntniss der Gesetze, welche die Lichtentwickelung als Funktion der Geschwindigkeit und der Dichte des durchdrungenen Mittels darstellen.

Um aber dennoch, wenigstens annähernd, einen Vergleich machen zu können, wollen wir folgende Hypothese aufstellen:

Bezeichnet man mit J und J_1 die Lichtintensitäten zweier Körper, welche sich mit den Geschwindigkeiten v und v_1 durch Atmosphären von der mittleren Dichte d und d_1 bewegen, so sollen sich verhalten:

$$J : J_1 = d^x . v^y : d_1{}^x . v_1{}^y,$$

wobei die Exponenten x und y noch zu bestimmen sind.

Bekanntlich legt eine Flintenkugel in der Sekunde höchstens $\frac{1}{15}$ Meile zurück und erhitzt sich dabei nicht bis zum Erglühen. Aber angenommen, sie leuchte mit der Intensität $= 1$, d. h. man sehe sie gleich einem Sternschnuppen-Streifen, so besitzt die Sternschnuppe, wie wir gleich Anfangs nachgewiesen haben, eine 100 millionenmal stärkere Lichtintensität. Die Geschwindigkeit der letzteren ist aber, nach den Schätzungen der früher genannten Astronomen, höchstens 10 Meilen per Sekunde. Daher ist:

$$(\tfrac{1}{15})^y : (10)^y = 1 : 100000000$$

und daraus:

$$y = 3{\cdot}7.$$

Die Geschwindigkeiten v und v_1, welche diese Weltkörper in den Entfernungen ϱ und ϱ_1 von der Sonne besitzen, bestimmt man aus den Gesetzen der Centralbewegung, und erhält:

$$v : v_1 = \sqrt{\varrho_1} : \sqrt{\varrho},$$

und für $\varrho = 112$, $\varrho_1 = 24100$ Erdhalbmessern ist sehr nahe:

$$v_1 = 15 . v.$$

Ueber die Dichte der Sonnenatmosphäre ist uns auch nichts Näheres bekannt; allein es ist wahrscheinlich, dass die Masse der Luft zu der Gesammtmasse des Weltkörpers in einem konstanten Verhältnisse steht. Denken wir uns daher die Luftmasse der Erde repräsentirt durch eine Quecksilberschichte von der Höhe b, und ebenso jene der Sonne durch die Quecksilberschichte von der Höhe B, so erhalten wir, abgesehen von dem verschiedenen Gewichte auf beiden Himmelskörpern:

$$4r^2\pi b : 4R^2\pi B = m : M,$$

wobei r und R die Radien, m und M die Massen derselben bedeuten. Es ist daher:

$$B = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{M}{m} . b = 28{\cdot}4 . b.$$

Da aber das Gewicht eines Sonnenkörpers 28·4mal schwerer ist

s jenes eines Körpers auf der Erde, so wird die unterste Luftchichte der Sonnenatmosphäre einen 28·4mal grösseren Druck rtragen müssen als unter gleichen Verhältnissen auf der Erde; s wird daher die Dichte der untersten Luftschichte gleich sein:

$$d_1 = (28{\cdot}4)^2 . d = 806{\cdot}56 . d,$$

d. h. der unterste Theil der Sonnenatmosphäre hat nahezu die Dichte des Wassers. (Diese Atmosphäre müsste dann höchstens um 27 Kilometer höher sein, als jene unserer Erde.). In Ermangelung anderer Anhaltepunkte wollen wir den Exponenten $x = 1$ setzen; dann ist aber:

$$J : J_1 = v^{3{\cdot}7} . 1 : (15 . v)^{3{\cdot}7} . 806,$$
$$J_1 = 18000000 . J.$$

Ferner wollen wir noch annehmen, dass ein aufmerksamer Erdbewohner jährlich 2 Meteore sehen kann, welche in der Entfernung von 150 Kilometern einen scheinbaren Durchmesser von 2′ zeigen und 3 Sekunden lang sichtbar bleiben. Dann ist die Lichtintensität dieser Meteore der Sonne, von der Erde aus gesehen:

$$J_1 = 3{\cdot}468 \times 2 \times 4^3 . 6 \times 18000000 J,$$
$$J_1 = 47941000000 . J,$$

also nahezu 48000millionenmal stärker als das Licht eines Fixsternes dritter Grösse. — Würde man noch in Betracht ziehen, dass die sichtbare Glanzfläche dieser Meteore, durch deren Bewegung, circa 600mal vergrössert wird, so müsste man auch obige Intensität J_1 600mal vergrössern. Da es aber wahrscheinlich ist, dass die von Newton auf 140 bis 232 Kilometer geschätzte Entfernung derselben zu gross angenommen ist, und vielleicht nur auf das Drittel (50 Kilometer) zu reduziren wäre, wodurch auch das obige Resultat circa 300mal grösser ausgefallen ist, so kann man von jener Vergrösserung der Glanzfläche absehen.

Nach Messungen von Wollaston ist das Licht der Sonne, von der Erde aus gesehen, 20000millionenmal stärker als das Licht des Sirius. Vergleicht man diese Zahl mit der eben gefundenen Intensität J_1, so sieht man, **dass der Glanz unserer Sonne wirklich von den in ihre Atmosphäre fallenden Meteoren entstehen kann.**

6. Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese. Eine Hypothese hat dann die grösste Wahrscheinlichkeit für sich, wenn man mit deren Hilfe alle darauf bezüglichen Erscheinungen erklären kann.

In Littrow's „Wunder des Himmels“ (4. Aufl. S. 262.)

an nur als Wolken ansehen; denn auch auf unserer Erde kom-
en grössere Wolkenmassen vor, die sich 8 bis 14 Tage lang
ber demselben Orte erhalten. Ein Tag ist aber gleichbedeutend
it einer Rotation um die Axe, welche auf der Sonne circa 25
age dauert, daher könnten sich ähnliche Wolkenflecke auf der
Sonne 8 × 25 Tage halten. Uebrigens ist die Sonne keiner so
ungleichmässigen Erwärmung ausgesetzt, weshalb sie auch keine
so ausgebreiteten Luftströmungen besitzen dürfte, wie die Erde.
Nebst dieser **Photosphäre** hat man bei der Sonne auch die
Existenz einer Atmosphäre, also einer Lufthülle, welche über die Photosphäre hinausreicht, nachgewie-
sen. Auch dieses stimmt mit der obigen Hypothese vollkommen
überein. Die Meteore erhalten erst dann das Maximum ihres
Lichtglanzes, wenn sie bis zu einer gewissen Tiefe in die Atmo-
sphäre eingedrungen sind. Der eigentlich leuchtende Theil der
Sonne liegt also innerhalb der Atmosphäre, während diese den
Abschluss nach Aussen bildet.

Zum Schlusse noch die Frage, welche **Vergrösserung** der
Sonnenradius durch einen derartigen Meteorfall erfährt und nach
welchem Zeitraume dieselbe von der Erde aus bemerkt werden
könnte?

Denkt man sich diese Meteore auf der Sonnenoberfläche gleich-
mässig vertheilt, so ergiebt sich durch einfache Rechnung, dass
der jährliche Zuwachs des Sonnenhalbmessers etwa 3 Millimeter
beträgt, so dass wir erst nach

120 Millionen Jahren

im Stande wären, eine Vergrösserung desselben (um 0·5 Bogen-
sekunden) von der Erde aus wahrzunehmen.

XVII.

Ueber die Gewichtsverminderung, welche ein Körper an der Oberfläche der Erde durch die Anziehung des Mondes und der Sonne erfährt.

Von

Herrn Professor Dr. *E. Segnitz*

an der staats- und landwirthschaftlichen Akademie in Eldena bei Greifswald.

In diesem Archiv ist vor einiger Zeit (Theil XLVII. Seite 78 u. f.) von Herrn Professor H. Schramm die Frage erörtert worden, ob es möglich sei, die Zunahme der Schwere mit der geographischen Breite, und deren Abnahme mit wachsender Höhe über dem Meeresspiegel, sowie in Folge der Anziehung des Mondes und der Sonne, durch die Differenz zwischen den Angaben des Aneroïds und des Quecksilber-Barometers zu messen. Der Verfasser gelangt zu dem Resultat, dass der betreffende Vorschlag zwar auf einem an sich richtigen Gedanken beruht, dass aber das Aneroïd — wenigstens in seiner gegenwärtigen Beschaffenheit — nicht geeignet ist, so kleine Differenzen mit der erforderlichen Genauigkeit anzuzeigen.

Ich ertheile diesem Ausspruche gern meine Zustimmung und bin um so weniger gesonnen, in der Hauptsache einen Einwand dagegen zu erheben, als ich vielmehr glaube, dass die Gewichtsverminderung des Quecksilbers durch die Anziehung der genannten Himmelskörper an der betreffenden Stelle noch merklich zu hoch berechnet ist. Ich habe früher einmal bei Gelegenheit eines öffentlichen Vortrages auf diesen Gegenstand bezügliche Zahlen-Resultate mitgetheilt, welche auf einer wesentlich verschiedenen Anschauungsweise der Sache beruhen und daher auch von den Rechnungs-Ergebnissen des Herrn Professor Schramm erheb-

h abweichen. Dieser Umstand veranlasst mich, das gedachte
roblem hier nochmals zur Sprache zu bringen, und die Art und
eise, wie ich dasselbe zu lösen versucht habe, dem sachver-
ändigen Publikum zur geneigten Prüfung vorzulegen. Meine
echnung ist nämlich folgende, wobei ich, wie dies auch der
ehrgedachte Verfasser gethan hat, von gewissen Nebenumstän-
en abgesehen habe, welche — wie die Umdrehungsbewegung
r Erde — das Endresultat um eine so geringe Grösse ändern
ürden, dass letztere, der fraglichen Differenz gegenüber, hier
ohl nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Bezeichnen wir durch

, m, μ beziehentlich die Masse der Erde, des Mondes und eines Körpers an der Oberfläche der Erde;

die Entfernung des Mondes von der Erde, von Mittelpunkt zu Mittelpunkt gerechnet;

den Halbmesser der Erde, welche wir der Einfachheit wegen als vollkommen kugelförmig voraussetzen, und durch

die Anziehung, welche die Einheit der Masse in der Entfernung Eins auf die Masseneinheit ausübt;

ist die Beschleunigung des Körpers μ gegen den Mond, wenn
eser im Zenith steht,

$$G_\mu^m = \frac{Km}{(E-R)^2},$$

nd die absolute Beschleunigung desselben Körpers gegen den
Mittelpunkt der Erde:

$$G_\mu^M = \frac{KM}{R^2}.$$

Nun ist das fragliche Gewicht p des betrachteten Körpers
enbar nichts Anderes als der Druck, welchen derselbe gegen
e feste und mit der Erde festverbundene horizontale Ebene
sübt, also nicht einfach der Differenz der vorhergefundenen
schleunigungen proportional zu setzen, sondern gleich dem Pro-
ct aus der Masse μ und der Beschleunigung g der relativen
schwindigkeit, womit der Körper gegen den Mittelpunkt der
de fallen würde, wenn die feste Unterlage nicht vorhanden
re. Der Körper μ und die Erde als fester Körper, also auch
gedrückte Unterlage, erfahren aber im Allgemeinen verschie-
ne Beschleunigungen durch die Anziehung des Mondes; die
schleunigung der Erde gegen den Mond ist nämlich:

$$G^m_M = \frac{Km}{E^2},$$

und die gesuchte relative Beschleunigung:

$$(1) \ldots\ldots \quad g = G^M_\mu - (G^m_\mu - G^m_M),$$

woraus sich — für einen Ort, in dessen Zenith der Mond ste das Gewicht eines Körpers von der Masse μ:

$$(2) \ldots \quad p = \mu g = K\mu \left\{ \frac{M}{R^2} - \frac{m}{(E-R^2)} + \frac{m}{E^2} \right\}$$

ergiebt, während beim Auf- und Untergange des Mondes Gewicht desselben Körpers:

$$(3) \ldots\ldots \quad P = \mu G^M_\mu = K\mu \frac{M}{R^2}$$

sein wird. Hieraus findet man das Verhältniss der Gewichts minderung durch die Anziehung des im Zenith stehenden Mon zu dem unverminderten, aus der alleinigen Anziehung der E hervorgehenden Gewichte:

$$(4) \ldots\ldots \quad \frac{P-p}{P} = \frac{m}{M} \left\{ \frac{R^2}{(E-R)^2} - \frac{R^2}{E^2} \right\},$$

oder, indem wir von der unendlichen, ziemlich schnell co girenden Reihe

$$\frac{R^2}{(E-R)^2} = \frac{R^2}{E^2} + 2\frac{R^3}{E^3} + 3\frac{R^4}{E^4} + \ldots + (n-1)\frac{R^n}{E^n} + \ldots$$

nur die ersten drei Glieder beibehalten, näherungsweise:

$$(4') \ldots\ldots \quad \frac{P-p}{P} = \frac{m}{M}(2\frac{R^3}{E^3} + 3\frac{R^4}{E^4} + \ldots).$$

Auf einen Körper μ', welcher sich in dem entgegengese Punkte der Erdoberfläche befindet, wirken die Anziehung Erde und des Mondes in derselben Richtung; auf den e Anblick kann es daher scheinen, als müsse letztere eine wichtsvermehrung des fraglichen Körpers zur Folge ha Andererseits darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, in diesem Falle die feste Unterlage dem, von dem aufliege Körper ausgeübten Drucke ausweicht und daraus eine Verr derung des Druckes hervorgeht. Die Beschleunigung der gegen den Mond, sowie die absolute Beschleunigung des in's gefassten Körpers gegen den Mittelpunkt der Erde bleiben n

licher Weise dieselben, wie in dem vorher betrachteten Falle; agegen ist die Beschleunigung des Körpers μ' gegen den Mond iessmal

$$G^m_{\mu'} = \frac{Km}{(E+R)^2},$$

nd seine **relative** Beschleunigung gegen den Mittelpunkt der rde:

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad g' = G^M_{\mu'} + G^m_{\mu'} - G^m_M,$$

lso sein Gewicht:

$$(6) \quad . \; . \; . \quad p' = \mu' g' = K\mu' \left\{ \frac{M}{R^2} + \frac{m}{(E+R)^2} - \frac{m}{E^2} \right\},$$

und das Verhältniss der Gewichtsverminderung durch die Anziehung des Mondes zu dem ursprünglichen Gewicht:

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{P'-p'}{P'} = \frac{m}{M} \left\{ \frac{R^2}{E^2} - \frac{R^2}{(E+R)^2} \right\},$$

oder, wenn wir von der Reihe

$$\frac{R^2}{(E+R)^2} = \frac{R^2}{E^2} - 2\frac{R^3}{E^3} + 3\frac{R^4}{E^4} - 4\frac{R^5}{E^5} + \dots$$

wiederum nur die ersten drei Glieder beibehalten, annähernd:

$$(7') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{P'-p'}{P'} = \frac{m}{M} \left\{ 2\frac{R^3}{E^3} - 3\frac{R^4}{E^4} + \dots \right\}.$$

Es geht daraus hervor, dass der Mond *sowohl* bei seiner beren Culmination, als auch bei seinem tiefsten Stande unter em Horizont eine (beinahe gleiche) Gewichtsverminderung er Körper an der Oberfläche der Erde bewirkt. Die von dem errn Professor Schramm vorgenommene Verdoppelung der ursprünglich gefundenen, schon an sich etwa 30mal zu grossen ifferenz erscheint hiernach nicht gerechtfertigt, und reducirt sich ieselbe auf ohngefähr $^1/_{30}$ des von ihm berechneten Werthes.

Was nämlich die numerischen Werthe der hier in Frage komenden Grössen anlangt, so ist nach Littrow, Kalender für lle Stände, 1866, Seite 125:

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{79{,}467}, \quad \frac{R}{E} = \frac{1}{60{,}2778};$$

iglich:

$$2\frac{m}{M}\frac{R^3}{E^3}=0{,}000000'114625,$$

$$3\frac{m}{M}\frac{R^4}{E^4}=0{,}000000'002852,$$

$$\frac{P-p}{P}=0{,}000000'117477,$$

$$\frac{P'-p'}{P'}=0{,}000000'111773.$$

Handelt es sich um einen Körper μ'' an der Oberfläch Mondes, und zwar in einem Punkte, in dessen Zenith sic Erde augenblicklich befindet, so ist, wenn wir den Halbn des Mondes durch r bezeichnen, die Beschleunigung des lichen Körpers gegen die Erde:

$$G_{\mu''}^{M}=\frac{KM}{(E-r)^2},$$

seine absolute Beschleunigung gegen den Mond:

$$G_{\mu''}^{m}=\frac{Km}{r^2},$$

die Beschleunigung des Mondes gegen die Erde:

$$G_{m}^{M}=\frac{KM}{E^2},$$

also die relative Beschleunigung des Körpers μ'' gege Mittelpunkt des Mondes:

$$(8)\ldots g''=G_{\mu''}^{m}-(G_{\mu''}^{M}-G_{m}^{M})=K\left(\frac{m}{r^2}-\frac{M}{(E-r)^2}+\frac{M}{E^2}\right).$$

Denken wir uns nun einmal irgend zwei andere Himme per und die Masse M des einen so gross, dass

$$\frac{M}{(E-r)^2}=\frac{m}{r^2}$$

sei, so wird ein Körper μ'' an der Oberfläche des anderen neren, bei fehlender Unterstützung, immer noch mit der Bes nigung

$$g''=K\frac{M}{E^2}$$

gegen den Mittelpunkt von m fallen, während sein Gewicht der von mir bekämpften Anschauungsweise verschwinden n — ein offenbar unzulässiges Resultat! Der Körper μ'' wird

lings, da er von beiden Seiten gleich starke Anziehungen erfährt, in absoluter Ruhe verharren oder sich in der Richtung der Tangente der von ihm bisher beschriebenen Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, und seine Annäherung an den Mittelpunkt von m rührt nur daher, dass m gegen M fällt. Befindet sich nun der Körper μ'' in Berührung mit einer festen Unterlage, so wird er durch diese gegen M fortgeschoben; man wird jedoch hieraus nicht den Schluss ziehen wollen, dass nur die feste Unterlage einen Druck gegen den gedachten Körper ausübe, aber nicht dieser gegen die Unterlage, da eine solche Annahme dem Axiom von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung widersprechen würde; dieser gegenseitige Druck ist nun eben die Grösse, welche ein Beobachter an der Oberfläche von m mit dem Namen des dem Körper μ'' zukommenden „Gewichtes" belegt. Das Gewicht desselben kann mithin unter der zuletzt gemachten Voraussetzung keineswegs verschwinden, sondern ist gleich der Anziehung, welche die Massen μ'' und M in der Entfernung E auf einander ausüben.

Auch die Theorie der Ebbe und Fluth gründet sich bekanntlich auf Betrachtungen, welche den vorstehend in Anwendung gebrachten vollkommen analog sind. Wäre die entgegenstehende Ansicht die richtige, so könnten wir täglich nur einmal Fluth und nur einmal Ebbe haben, während beide Erscheinungen doch zweimal des Tages eintreten.

Endlich wollen wir noch die Gewichtsverminderung in Betracht ziehen, welche die Anziehung der im Zenith stehenden Sonne bei einem an der Oberfläche der Erde befindlichen Körper hervorbringt. Bezeichnen wir zu diesem Behufe die Masse der Sonne durch S, die Entfernung der Erde von der Sonne durch F und behalten im Uebrigen die früher benutzten Bezeichnungen bei, so erhalten wir als genäherten Ausdruck für das Verhältniss dieser Gewichtsverminderung zu dem unverminderten, von der Anziehung der Erde allein herrührenden Gewicht:

$$(9) \quad \frac{P-p'''}{P} = 2\frac{S}{M}\frac{R^3}{F^3},$$

oder unter Benutzung der Relationen

$$\frac{S}{M} = 354020; \quad \frac{R}{F} = \frac{859{,}5}{20'680000}:$$

$$(9') \quad \frac{P-p'''}{P} = 0{,}000000'050833.$$

Die durch die Anziehung der Sonne bewirkte Gewichtsverminderung ist mithin nicht grösser, sondern merklich kleiner als diejenige, welche der Anziehung des Mondes ihre Entstehung verdankt. In dem Falle, wo Sonne und Mond gleichzeitig culminiren, ihre Wirkungen sich also summiren, beträgt die gefundene Gewichtsverminderung:

$$\frac{P-p}{P} = 0{,}000000'117477\,,$$

$$+\ \frac{P-p'''}{P} = 0{,}000000'050833\,,$$

$$= 0{,}000000'168310\,,$$

d. i. wenig mehr als $\frac{1}{6'000000}$, und bei einer Barometerhöhe von 760 Millimeter die von dem Aneroïd und Quecksilberbarometer anzuzeigende Differenz:

$$760 . 0{,}000000'16831 = 0{,}000127'915 \text{ Millimeter.}$$

In dem vorstehend besprochenen Conflict der Ansichten über eine interessante Frage der Mechanik erblicke ich einen neuen Beleg für die schon längst von mir gehegte Meinung, dass es nicht nur rationeller, sondern auch in didaktischer Beziehung empfehlenswerther sei, die Lehrsätze der Mechanik unmittelbar aus der Natur der Bewegung herzuleiten, als sie auf die Statik zu basiren, welche doch nichts weiter als besondere Fälle für die allgemeinen Principien der Bewegungslehre darbietet.

XVIII.

Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya.

Von

Herrn *Franz Schmidt*

in Temesvár.

Die biographische Skizze, welche ich hier mittheile, ist noch sehr unvollständig; da aber wenig Aussicht vorhanden, dass in nächster Zeit eine ausführliche Lebensgeschichte über einen der Genannten erscheint, veröffentliche ich diejenigen Daten, welche mir aus gedruckten, mündlichen und schriftlichen Mittheilungen bekannt wurden, in der Hoffnung, dass Jene, welche Mehr und Genaueres mitzutheilen in der Lage sind, veranlasst werden, das hier Gegebene recht bald zu ergänzen. — Beide, Vater und Sohn, ihre Geisteskraft einer Wissenschaft weihend, die in ihrer Heimath fast gar nicht gewürdigt wurde, in einem schönen, aber entfernt von jeder buchhändlerischen Thätigkeit gelegenen Winkel Siebenbürgens lebend, waren sie ausser Stande, ihren Arbeiten eine Verbreitung und Anerkennung zu verschaffen, die ihnen gegenwärtig, fast zehn Jahre nach ihrem Tode, von den Männern der Wissenschaft aller Culturvölker Europas immer mehr und mehr zu Theil wird. Die Namen von Baltzer, Gauss, Gerling, Grunert in Deutschland, Hoüel und Battaglini in Frankreich und Italien sind Bürgen, dass die Werke Bolyai's der Vergessenheit entrissen werden, und ich bin überzeugt, dass der Ausspruch Baltzer's: dass der Name Bolyai's in Zukunft mit Ehren genannt werden wird, schon heute sich erfüllt hat.

Wolfgang (ungarisch Farkas) Bolyai de Bolya *) wurde

---

*) Wurzbach, Bibliographisches Lexicon. II. Thl. Wien 1857.

den 9. Februar 1775 zu Bolya im Szekler-Land in Siebenbürgen geboren; in seiner Jugend, von einem längeren Augenleiden befallen, gab er schon Proben von seinem ausserordentlichen Gedächtnisse, indem er ganze Bogen nach einmaligem Ueberlesen fehlerfrei herzusagen im Stande war. Seine ersten Studien machte er in Enyed und später in Klausenburg. Mit einem Sohne des Baron Simon Kemény besuchte er zur weiteren Ausbildung Deutschland, und zwar zuerst 1797 Jena, später Göttingen, wo B. sich philosophisch-mathematischen Wissenschaften widmete. Das Geheimniss der Geldwirthschaft hatten aber die Freunde noch nicht gefunden, so dass B., während Kemény in die Heimath ging, um Geld nachzusenden, als Unterpfand zurückbleiben musste. — In Göttingen wurde B. mit C. F. Gauss bekannt und schloss mit ihm einen Freundschaftsbund, der durch das ganze Leben hindurch währte und die mit Entbehrung und Entäuschung so reich gewürzten Tage B's. erheiterte. Ob der Briefwechsel zwischen Gauss in den hinterlassenen Papieren B's. sich befindet, konnte bis heute nicht mit Bestimmtheit ermittelt werden; jedoch soll nach einer Mittheilung des Herrn Professor Szabó in Maros Vásárhely der alte Bolyai alle Briefe, welche von Gauss's Hand waren, um das Jahr 1855 dem Herrn Professor Sartorius von Waltershausen, als derselbe sich mit der Herausgabe seiner bekannten Lebensbeschreibung von Gauss beschäftigte, nach Göttingen gesandt haben, und es wäre daher im Interesse der Wissenschaft gewiss sehr zu wünschen, dass Herr Professor Sartorius von Waltershausen diese Briefe, wenn sie sich noch in seinen Händen befinden, im Interesse der Wissenschaft jetzt bekannt machte *). — Der Umgang mit Gauss förderte B's. mathematisches Wissen nicht wenig. Gauss schätzte B's. Wissen hoch und hielt überhaupt grosse Stücke auf ihn. So berichtet Sartorius von Waltershausen **): „B. ist ein Mann von hervorragendem Geiste, über den Gauss in früheren Jahren gesagt haben soll, dass er der Einzige gewesen sei, der in seine methaphysischen Ansichten über Mathematik einzugehen verstanden habe.“ Aus den wenigen schriftlichen Mittheilun genzu schliessen, welche uns über B. vorliegen, war derselbe ein Mann von grosser Tiefe und Reinheit des Gemüthes und besass eine eigenthümliche Ausdrucksweise, welche mitunter an Jean Paul's

---

*) In Ermangelung einer anderen, Herrn Sartorius von Waltershausen vielleicht passender scheinenden Gelegenheit, würde der Herausgeber des Archivs der Mathem. u. Phys. sehr gern seine Zeitschrift dazu anbieten. G.

**) Gauss zum Gedächtnisse. Leipzig 1856.

chriften erinnert. An einem entfernten Winkel der Erde lebend, etrennt von verwandten Seelen, in seinem hohen Alter umtost on den Wirren einer vernichtenden Revolution (1849), von dem Mord und dem Gräuel eines wüthenden Bürgerkrieges, blickt er wischen den Trümmern seiner Habe mit edler Ruhe und einem einen Gewissen durch den Thränenschleier unserer selbst verschuldeten Leiden auf die Wogen der Ewigkeit. B. klagt an einer Stelle, dass ihm nicht das Glück zu Theil geworden, sich selbst lie Wege zu bahnen, da ihm mit wenigen Ausnahmen Alles entegen gewesen sei. Und wieder in einem andern Briefe äussert r sich: ich finde mich auf der Erde gleichberechtigt mit meinen Wurmkollegen, deren Jeder an seinem Gewebe beflissen ist, bis ch bald in einem namenlosen Grabe, mit meinem Schicksale ausesöhnt, ruhen werde. Auch Benzenberg in einem Briefe an Gauss spricht sich schon damals mit folgenden Worten über enselben aus: B. gehört zu den seltensten Menschen, die ich esehen habe etc. — Endlich schreibt ein junger Ide *) am 3. Mai 1799 an Gauss: B. wird dem hiesigen nahen Schützenfeste sicher beiwohnen, aber nur als Philosoph, der bei solchen Gelegenheiten Stoff findet, über die Thorheiten der Menschen Betrachtungen anzustellen. Diess ist so seine Maxime, wie ich us mehreren Fällen abstrahirt habe, er versäumt von dergleichen weltlichen Angelegenheiten so leicht keine, nicht etwa, um mit zu geniessen, sondern um seine Seelenruhe zu befestigen. — Nach dem Tode Gauss's (1855) wurde an B. auf Anordnung des Königs von Hannover die grosse silberne und bronzene Medaille übersendet, welche zum Andenken an Gauss geprägt wurde. Auch standen die Göttinger Gelehrten bis in die neueste Zeit in fortwährender Verbindung mit B. und setzten ihn von Allem in Kenntniss, was in der wissenschaftlichen Welt, anlässlich des Todes seines Freundes erschien.

In die Heimath zurückgekehrt, wurde B. im Jahre 1802 als Professor der Mathematik, Physik und Chemie am reformirten Collegium zu Maros-Vásárhely angestellt, in welcher Stelle er fast ein halbes Jahrhundert als Lehrer thätig war und in derselben die meisten der siebenbürgischen Lehrer nebst einem grossen Theile des Adels zu seinen dankbaren Schülern zählte. — Ausser

*) J. J. A. Ide ist Verfasser mehrerer geschätzter Schriften; besonders werthvoll ist immer noch: System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Von J. J. A. Ide, Doctor der Philosophie und Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Göttingen. Zwei Theile. Berlin. 1802. G.

seinen Berufsgeschäften, die er mit grösster Gewissenhaftigkeit und einer besonderen Liebe erfüllte, beschäftigte B. sich in der ersten Zeit nebenbei mit Poesie. Er liess fünf Trauerspiele in Prosa, ohne Angabe des Verfassers, 1817 in ungarischer Sprache drucken, und zwar: 1) Pausanias, 2) Mohamed, 3) Simon Kemény, 4) Der Triumpf der Tugend über die Liebe, 5) Der Liebe Sieg über die Tugend; von welchen die ersteren wahrhaft poetischen Werth besitzen sollen. Später (1818) erschien „Der Pariser Prozess“, ein Drama in fünf Aufzügen. Er übersetzte (1819) Pope's „Versuch über die Menschen“ in das Ungarische, einen Anhang zu diesem Buche bilden die Uebersetzungen auserlesener Gedichte aus dem Englischen und Deutschen.

Sein dichterisches Gemüth und seine besonders lebhafte Phantasie hat sich in seinen mathematischen Werken auffallend ausgeprägt. Später wendete sich sein schöpferischer Trieb auch dem Gebiete der Musik zu, und die Geige, sein Lieblingsinstrument, half ihm, seine Gefühle und Gedanken in Tönen auszusprechen. Dabei vernachlässigte er keineswegs die Wissenschaft, und seine schriftstellerische Thätigkeit wendete sich zumeist dennoch dem Studium der Mathematik zu. B's. Werke erschienen in der nachstehenden Reihenfolge, alle ohne Namen des Verfassers, und zwar:

a) Az arithmetica eleje (ar elö-szoban irt módón) B. B. F. Mathesist és Physicát tanito P által. Maros Vásárhelyt 1830 Nyomtatott a reformál Kollégyom betüivel Felsö Visti Kali Josef által. (Die Elemente der Arithmetik [nach den in der Vorrede bezeichneten Grundsätzen] vom Professor der Mathematik und Physik. M.-Vásárhely 1830, gedruckt mit den Lettern des reformirten Collegium durch Josef Kali von Felsö Vist in 8⁰-Format mit I.—XVIII. Vorrede, eine Seite Druckfehler, 162 Seiten Text und ein Tableau, den Baum der Wissenschaft darstellend). Dieses Buch ist ganz vergriffen, das Exemplar der reformirten Collegial-Bibliothek ist mit Randbemerkungen Johann B's. versehen. Das auf fünf Abtheilungen berechnet gewesene Lehrbuch der Mathematik, welches, wie die meisten der Werke B's., im Wege der Subscription die Druckkosten aufbringen sollte (wo aber gewöhnlich immer mehr versprochen, als wirklich geleistet wird), hat folgenden Inhalt: Einleitung und Erklärung der Zeichen, Gleichheit, Theil, Zahl, Raum, die Eintheilung der Arithmetik in reine und angewandte. — Addition. Subtraktion. Erklärung von positiv und negativ mit vielen Beispielen und graphischen Darstellungen. — Von den Gränzen. — Brüche. — Multiplikation und Division, geometrische Proportionen. — Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. — Einleitung in die Differenzial-, Integral- und Variationsrechnung,

mit zum Theil eigenthümlichen Bezeichnungen, von denen wir auf Taf. IV. Fig. 7. einige Beispiele mitgetheilt haben. Den Schluss bilden die Regeldetri, Decimalbrüche, Theilbarkeit der Zahlen. — Die Progressionen. — Die übrigen Abtheilungen sind wegen nicht Einhaltens der Subscribenten leider nicht erschienen.

b) Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentique huic propria, introducendi. Cum Appendicae triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices, Chemiaeque Pupl. ordinario. Tomus Primus. Maros Vasarhelyini 1832. 8⁰. Typis Collegii Reformatorum per Josephum et Simeonem Kali de Felsö Vist. Mit 4 Kupfertafeln.

c) Tentamen Juventutem etc. Tomus Secundus, ibidem 1833. Mit 10 Kupfertafeln. Die sub b) et c) bezeichneten Werke B's. wurden gleichfalls auf dem Wege der Subscription gedruckt und sind die Hauptarbeit W. B's., auf welche er sich in seinen späteren Schriften besonders bezieht. Der erste Band enthält:

Einen Folio-Bogen: Explicatio signorum. — Arbor arithmeticae geometriaeque coradicata coronisque confluentibus. — Ordo quo Geometria tractabitur, primo in Plano. — Sodann zwei Seiten Lectori salutem. — Index rerum I.—XXXII. — Errata XXXIII.—LXXIV. — Errores recentius detecti LXXV—XCVIII. — Hierauf 1–502 Seiten Text. Diesem folgt mit besonderer Paginirung und Schmutztitel der Appendix von Johann Bolyai, dem Sohne Wolfgangs, mit folgendem Titel: Appendix, scientia spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo, enthaltend 26 Seiten Text und 2 Seiten Errata. — Endlich I.—XVI. Seiten in ungarischer Sprache. Die Namen der Subscribenten, mathematische Nomenclatur und Zusätze zu diesem Bande von W. B. Von den 4 Kupfern gehören 3 zum Hauptwerke und 1 zu dem Appendix. — Der erste Band enthält im Wesentlichen Folgendes: eine Eintheilung sämmtlicher Wissenschaften und eine Einleitung mit der Ueberschrift „Radix“; sodann folgen die Axiome, Addition, Subtraktion, incommensurable Grössen, Gränzen veränderlicher Grössen, Brüche, Multiplikation, Division, geometrische Proportionen, Zeichenregel bei der Multiplikation und Division, Vertauschen der Faktoren, Multiplikation gleicher Faktoren, Entstehung der Potenz, Wurzel, Logarithmus. — „Truncus“: Uebertragen der Grössen auf Zeit-

räume, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Brüche; Proportionen, Gränzen, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, imaginäre Grössen in sehr grosser Ausführlichkeit. — Das Binomial-Theorem, logarithmische Reihen, deren Convergenz, Modulus der Logarithmen, imaginäre Logarithmen. — „Corona": von Pagina 178—442. Funktionen, Eintheilung derselben, Differenzial der Funktion einer Variabeln, die Elemente der Integralrechnung, partielle Differenziale, Beispiele aus der Geometrie und Mechanik, Differenziale einer convergenten Reihe — $\frac{0}{0}$, ∞, Quadratur der Kegelschnitte, Rectification, Beispiele aus der Dynamik, Cubatur der Körper, Differenziale der trigonometrischen und Kreisfunktionen, Tangenten, Länge eines Bogens, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, $\frac{\infty}{\infty}$, Taylor's Theorem nebst der Restbestimmung, Entwickelung von $(1+x)^e$, $(1+z)^{-1}$, Taylor's Theorem für mehrere Variablen, Maxima et Minima, geometrische Anwendungen, Elemente der Variationsrechnung. — „Ramorum coronae arboris": Theorie der Gleichungen, $x^{17}-1=0$ und geometrische Construction derselben, Transformation der Gleichungen, Auflösung der numerischen Gleichungen (nach Newton und Lagrange), Bezout'sche Methode der Elimination, unbestimmte Gleichungen, Kettenbrüche und Anwendungen auf Gleichungen, Gaussens Beweis (1799). — Sodann von 443 bis Ende: Allgemeine Uebersicht der Geometrie. — Hierauf folgt Johann B's. Appendix, für dessen Zustandekommen der Verfasser selbst 104 fl. 54 kr. beigetragen hat; er enthält jene neue und rationelle Darstellung der Parallelen-Theorie, welche mit ähnlichen Arbeiten Lobatschewsky's*) in Kasan zusammentraf, ohne dass Einer von den Arbeiten des Anderen das Geringste wusste. Gauss**) hatte sich gleichfalls in seiner Jugend und auch später mit diesem Gegenstande befasst, aber niemals etwas hierüber veröffentlicht. Ungeachtet dessen sind über 40 Jahre verflossen, ehe diese ausgezeichneten Gedanken der Vergessenheit entrissen wurden, und in dieser Beziehung hat vor Allen Dr. R. Baltzer in Dresden den Dank aller Freunde der Mathematik in hohem Grade sich erworben, indem in seinem ausgezeichneten Werke: Elemente der Mathematik. 2. Auflage. 1866 und 1867 zuerst auf die Arbeiten B's. aufmerksam gemacht wurde. Angeregt durch Baltzer hat nun auch Professor Hoüel zu Bordeaux in seiner neuesten Schrift: Essai critique sur les principes Fondamentaux de la

---

*) Lobatschewsky, Geometrische Untersuchungen. 1840. Berlin. — Hoüel, Théorie des Parallèles. Paris 1866.

**) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. 6 Bände. 1860—66. Hamburg.

Geometrie élementaire etc. Par Hoüel. Paris 1867. 8⁰. Auszüge aus dem Appendix gegeben, welche gewiss sehr viel dazu beitragen werden, diesen neuen Ansichten jene Anerkennung zu verschaffen, welche dieselben mit Recht verdienen, — um so mehr, als die Werke B's. gänzlich vergriffen sind. — Die Zusätze zu diesem ersten Bande, wenigstens ein Theil derselben, LVIII.—XCVIII., scheinen mehrere Jahre später gedruckt zu sein; sie enthalten Beiträge über Convergenz der Reihen.

Der zweite Band des Tentamen enthält: Eine weitere Ausführung der Geometrie, die Trigonometrie, Kegelschnitte, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Ferner drei Appendices: Elemente der Perspektive, Gnomonik und Chronologie; ferner abermals Zusätze zum ersten Bande: die Combinations-Lehre, Zinsenrechnung, Anwendung der Logarithmen, endlich einen Zusatz zum Appendix des ersten Bandes. — Von diesem zweiten Bande sind noch einige Exemplare vorhanden.

d) Az Arithmetikának, Geometriának és Physikának eleje, a M. Vásárhelyi Kollégyombéli alsobb Tauülók-számára a helybéli Professor által. Elsö Kötet. M. Vásárhelyen 1834. Die Elemente der Arithmetik, Geometrie und Physik für die Schüler des M.-Vásárhelyer untern Gymnasiums, durch den dortigen Professor. Erster Theil, 1834, in 8⁰. I.—X. Seiten Vorrede und Inhalt. 1—90 Seiten Text. — Von diesem, auf fünf Theile bestimmt gewesenen Lehrbuche ist bloss dieser erste Theil erschienen und enthält, mit Weglassung der Einleitung in die Differenzial-, Integral- und Variations-Rechnung, denselben Inhalt, wie das sub a) angegebene Buch. — Noch eine kleine Anzahl von Exemplaren sind vorhanden.

e) A marosvásárhelyt 1829 ben nyomtatott Arithmetika elejének részint röviditett részint bövitett, általán jobbitott, s tisztálttabb Kiadása. — A szerzö által M.-Vásárhelyt 1843. Die zu M.-Vásárhely 1829 gedruckten Anfangsgründe der Arithmetik, zum Theil verkürzte, zum Theil erweiterte, durchgesehene, verbesserte und gereinigte Ausgabe durch den Verfasser. M.-Vásárhely 1834, in 8⁰. I.—XLIV. Vorrede und Inhalt, 1—386 Seiten Text und zwei Kupfertafeln. Wie der Titel besagt, ist das Buch eine vermehrte und verbesserte Ausgabe des sub a) angeführten Werkes. Der Verfasser spricht sich in der Vorrede über diese Ausgabe wie folgt aus: *„Erstens wollte er in seinem Alter in gereinigter Darstellung jene Gedanken wieder geben, auf die er in seiner Jugend durch blosses Denken gekommen ist; aber nur dann kann man im Herbste von einer Traube Ziweben erwarten, wenn im Sommer kein Hagel sie getroffen hat. Zweitens wollte er als Lehrer die erste Ausgabe zum Theil erleichtern, erweitern und*

wenigstens dem ersten Bande das lateinische Tentamen entbehrlich machen. Wenn aber ausser dem System noch manches ungewöhnlich erscheint, so ist eine längere Augenkrankheit und Unwissenheit die Ursache; durch erstere wurde ihm eine Lebensweise angeordnet, wozu man keine Augen braucht, somit war der Verfasser gezwungen, bei seinem wenigen mathematischen Wissen, bis seine Augen wieder gestärkt waren, bloss in Gedanken zu lernen.“ Dieses Buch ist keine wörtliche Uebersetzung des Tentamen, es enthält mit Abkürzungen und Zusätzen versehen bloss den arithmetischen Theil desselben. So z. B. fehlt der Gauss'sche Beweis, die Variations-Rechnung u. s. w., dafür sind die Kriterien über Convergenz der Reihen erweitert; an sehr vielen Stellen wird auf das Tentamen verwiesen. — Auch von diesem Werke B's. sind noch Exemplare vorhanden.

f) Arithmetica eleje Kezdönek (Elemente der Arithmetik für Anfänger) ohne Titel und Jahreszahl. Nach einer Randbemerkung des Verfassers ist dasselbe im Jahre 1845 gedruckt worden. Es enthält auf 40 Seiten 8⁰ die vier Grundoperationen, Regeldetri, Gesellschaftsrechnung, Dezimalbrüche, die Elemente der Buchstabenrechnung, als: Addition, Subtraction, Potenzen, Wurzeln, geometrische Progressionen und Anwendung auf Interessenrechnung.

g) Ürtan elemei Kezdöknek (Elemente der Raumlehre für Anfänger). Ebenfalls ohne Titel und Jahreszahl, nach einer Bemerkung 1846 gedruckt; enthält 42 Seiten Text in 8⁰. Zu diesem Werkchen gehören 5 Figurentafeln, die aber nie gedruckt wurden. Zu zwei Exemplaren hat der Verfasser dieselben eigenhändig gezeichnet. Bezüglich derselben bemerkt der Verfasser in seinem Testamente: *„Diese Tafeln können von jenen, welche sie benöthigen, leicht selbst nachgemacht werden, indem Kinder die vorhandenen gezeichnet haben.“* Diese Aeusserung bezieht sich auf ein drittes Exemplar mit Figurentafeln, welche von einem Enkel (Sohne von Johann B.) Wolfgang B's. gezeichnet sind. Alle drei Exemplare sind Eigenthum des reformirten Collegiums zu M.-Vásárhely. Der Inhalt ist folgender: Erklärung vom Raume, Fläche, Linie und Punkt, von zwei geraden Linien, von den Parallelen mit Hinweisung auf den Appendix, von den Winkeln und Dreiecken, Congruenz und Aehnlichkeit derselben, von den Vierecken und dem Flächeninhalt derselben, der Pythagoräische Lehrsatz, vom Kreise, Erklärung von Abscisse und Ordinate, Berechnung des Flächeninhaltes der Vielecke und des Kreises; Anwendungen auf praktische Geometrie: Höhenmessen, Nivelliren, Berechnung von Grundstücken; Einleitung in die Trigonometrie.

— Vier Seiten enthaltend: die Erklärung von Sinus, Cosinus, tang., sec., Formel für $\sin(a \pm b)$. Sodann zwei Seiten Berichtigungen und Zusätze.

Das letzte und einzige in deutscher Sprache verfasste Werk W. B's. ist:

h) Kurzer Grundriss eines Versuches, I) die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen. II) In der Geometrie die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. dgl. nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da die Frage, ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summa der inneren Winkel nicht $=2R$, sich schneiden oder nicht? Niemand auf der Erde ohne ein Axiom, wie Euclid das XI., aufzustellen beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern, und eine auf die Ja-Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, dass die Formeln der letzten auf einen Wink auch in der ersten gültig seien. — Nach einem lateinischen Werke von 1829, Maros-Vásárhely, und eben daselbst gedrucktem ungarischen, Maros-Vásárhely 1851, in 8°, mit 88 Seiten Text. — Es enthält auf Seite 1.—42. in gedrängter Kürze die Haupt-Definitionen der Arithmetik mit Einschluss der Differenzial- und Integralrechnung, nach derselben Darstellungsweise wie im Tentamen. Seite 43.: Von den Gründen der Geometrie (so viel als kurz und ohne Figuren sein kann). Es wird die schon erwähnte Arbeit Nic. Lobatschewsky, Berlin 1840, besprochen und mit jener Johann B's. verglichen; von letzterer sagt B.: „Von Hiesigen sind Einige nach Wien, Berlin, Göttingen.... noch dazumal hinausgeschickt worden. Aus Göttingen schrieb der mathematische Riese, welcher aus erhabenen Thürmen, von den Sternen bis auf die tiefen Gründe mit gleichem Auge sieht, dass er überrascht war, gethan zu sehen, was er begonnen hat, um es unter seinen Papieren zu hinterlassen." — Ferner giebt der Verfasser einen kurzen Auszug der geometrischen Grundbegriffe aus dem 1. Bande des Tentamen. Die Ausdrucksweise ist eine sehr eigenthümliche, oft schwer verständlich.

Als das sub b) und c) bezeichnete Werk in die Hände Gauss's fiel, erkannte dieser sogleich den Autor. — Im Jahre 1832 den 9. März wurde B. zum correspondirenden Mitgliede der mathematischen Abtheilung der ungarischen Akademie gewählt. Als Lehrer wirkte B. durch seinen Feuereifer sehr anregend. In sei-

nem Privatleben war er das Prototyp genialer Originalität, und kursiren über dasselbe, wie überhaupt über seine Zerstreutheit, viele Anekdoten. Einen eigenen Zeitvertreib für ihn bildete die Verfertigung von Ofenmodellen und Heitzungs-Apparaten. Er hatte die Freude erlebt, dass ein Modell — der nach der Röhrentheorie construirte Daniel-Ofen — in der Hauswirthschaft Siebenbürgens eine ganze Reform hervorbrachte. Sein Wagen war mit Schindeln eingedeckt. Die Zierden seiner alterthümlichen Wohnung waren seine Geige und die Ofenmodelle; an der russigen Wand hingen die Bilder seines Freundes **Gauss**, **Shakespeares**, den B. „den Sohn der Natur", und **Schillers**, den er „ihren Enkel" nannte. Vor einem einfachen Tische sass ein alter Herr in schwarzen groben ungarischen Hosen, mit hohen Csismen (Stiefeln), einer weissen Flanelljacke, einem eingedrückten, breitkrämpigen Hut auf dem Kopfe, das war **Wolfgang Bolyai**.

Im Jahre 1849 wurde B. pensionirt. Nun schrieb er seinen Partezettel und liess ihn im Jahre 1855 drucken (Jelentés *), 8 Seiten in 8°, 1855). In seinem Testamente ordnete er an, dass sein Leichenbegängniss so einfach als möglich sei und höchstens nur der Schulglöckner ihm ausläute zum Zeichen, dass man zur letzten, grossen Lection aufzubrechen habe. Der Glaube an die Unsterblichkeit der Seele stand in B. unerschütterlich fest. Er hielt die Erde für eine Pfütze, in welcher der gefesselte Geist wate; den Tod für den befreienden Engel, der die gefangen gewesene Seele in glücklichere Regionen geleitet. Für seinen edeln Charakter spricht zuerst seine Freigebigkeit, worin er keine Gränzen kannte, und seine masslose Bescheidenheit. Sein Grab durfte kein Denkmal zieren. Einem seiner Freunde möge es bloss vergönnt sein, einen Apfelbaum auf den Rasen zu pflanzen, unter dem er ruhe, zur Erinnerung an jene drei Aepfel, von denen jener der Eva und des Paris die Erde zur Hölle gemacht, und jenen **Newton's**, der dieselbe wieder in die Reihe der Himmelskörper erhoben habe. — Am Sterbetage B's. hat das reformirte Collegium das obenbenannte Jelentés 1855 mit folgendem Zusatze veröffentlicht: „Der Vorstand des reformirten Collegiums giebt die traurige Nachricht, dass der durch 47 Jahre treu und unermüdet dienende, fünf Jahre in Ruhestand versetzte Lehrer und korrespondirendes Mitglied der ungarischen Academie:

Bolyai Farkas (Wolfgang)

am 20. November 1856, Abends halbzehn Uhr, nachdem er fast

*) Jelentés = Anzeige.

2 Jahre alt wurde, zu leben aufgehört hat. Die irdischen Ueber-
este werden am 23. um 2 Uhr Nachmittag zur Erde bestattet. Den Willen des Verstorbenen ehrend, wird dies Begräbniss in der oben beschriebenen Weise stattfinden."

B. hinterliess zwei Söhne, von denen der Eine, Namens Johann, als pensionirter k. k. Hauptmann im Geniecorps 1860 verstorben, der Andere, Gregor, als Landwirth bei Hermanstadt noch gegenwärtig lebt. In den Papieren Johann B's. finden sich Notizen über die hinterlassenen Arbeiten seines Vaters, sie bestehen in einer Anzahl von Trauergedichten — sechs lateinischen Hexametern zum Andenken an seinen Freund Gauss, mehreren unleserlichen, für eigenen Gebrauch geschriebenen Heften, einer mathematischen Geographie, der Bearbeitung des Wilsonschen Theorems und einer Abhandlung über Kettenbrüche, Alles in ungarischer Sprache. Diese Schriften, wie auch alle gedruckten Werke W. B's. sind laut Testament des Verfassers Eigenthum des reformirten Collegiums in Maros-Vásárhely.

Johann Bolyai de Bolya, Sohn des Vorigen, wurde zu Klausenburg in Siebenbürgen den 15. December 1802 geboren. Er kam auf einen der siebenbürgischen Stiftungsplätze der k. k. Ingenieur-Academie nach Wien, von wo er den 7. September 1822 als Corps-Cadet austrat. Am 1. September 1823 wurde er zum Unterlieutenant befördert und den 16. Juni 1833 als Hauptmann pensionirt. — J. B. war ein tiefdenkender Mathematiker, dabei ein leidenschaftlicher Violinspieler und ein äusserst geschickter Fechter. Seine frühe Pensionirung stand in irgend welcher Beziehung zu diesem letzteren Talente*). Ausser dem oben sub b) angegebenen Appendix zum ersten Bande des Tentamen ist nichts von J. B. im Drucke erschienen. Doch dieses Wenige berechtigt zu der Vermuthung, dass in den hinterlassenen Schriften noch manche Perle mathematischer Genialität verborgen ist. Es würde der Wissenschaft ein grosser Dienst erwiesen, wenn die Besitzer der Schriften B's. sich entschliessen möchten, dieselben der Durchsicht eines Mannes anzuvertrauen, welcher Kenntniss und Neigung für den Gegenstand besitzt. Im Jahre 1860 (der Todestag war trotz mehrfacher Anfragen zu ermitteln unmöglich) starb J. B. zu M. Vásárhely. Seine Schriften wurden in Folge einer militä-

*) In einer Garnison mit Cavalleristen wurde B. von dreizehn Offizieren gefordert, welche Forderung er mit der Bedingung annahm, dass ihm nach jedem Duelle gestattet sei, ein Stück auf seiner Geige zu spielen. Mit allen dreizehn seiner Gegner ist er aus diesen Duellen siegreich hervorgegangen.

rischen Verordnung, durcheinander geworfen, in zwei Kisten
gesperrt aufbewahrt, bis es endlich gelang, Kraft einer testam
tarischen Aeusserung des Vaters — mit Ausnahme einiger m
tärischen Werke — Alles in das Deposit des reformirten Collegi
zu übergeben, allwo sich dessen literarischer Nachlass auch n
gegenwärtig befindet. — Oberflächlich beurtheilt sollen diese Sch
ten über 1000 Bogen ausfüllen. Ein Theil derselben befindet
auf allerlei kleinen Papierstücken geschrieben und ist in ganz
geordnetem Zustande. J. B. beschäftigte sich in seinen letz
Jahren fast ausschliesslich mit Sprachstudien. Er hatte die ko
sale Idee, eine allgemeine Weltsprache begründen zu wollen,
sie in der Musik dargestellt ist. — Er führte ein zurückgezo
nes menschenscheues Leben und lebte ganz seiner Idee. N
allen Schilderungen war derselbe ein ganz eigenthümlicher, bi
rer, aber doch genialer Charakter. Im Jahre 1853 wollte er ei
Theil seiner mathematischen Arbeiten drucken lassen, denn u
seinen Papieren findet sich der Titel und Fragmente einer
handlung: Principie doctrinae novae quantitatum immaginari
perfectae uniceque satis facientis, alioque disquisitiones analiti
et analiticae-geometricae cardinales gravissimaeque, auctore J
hann Bolyai de eodem C. R. austriaco Castrensium capita
pensionato (?) Vindobonae vel Maros Vásárhelyini 1853.

So weit reichen die uns gewordenen Mittheilungen über z
Männer, deren Geistesgaben leider in ihrem Vaterlande nicht
Anerkennung und Würdigung gelangen konnten. Von der Fe
sind es heute die Männer der Wissenschaft, welche den Na
Bolyai's diejenige Anerkennung zu Theil werden lassen, wel
derselbe bis zum heutigen Tage noch nicht gefunden hat.
der Academie der Wissenschaften in Pest würde es liegen, H
anzulegen, damit die Werke und der Nachlass B's. nicht der
und Nachwelt verloren ginge. Die Bolyai gehören vornehm
ihrem engeren Vaterlande an, es hat die Pflicht, seinen Söh
gerecht zu werden, und der Wissenschaft, dem ganzen gebilde
Europa, das nicht zu Grunde gehen zu lassen, was geniale G
ster gedacht, geschaffen und gewirkt haben.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die Verfasser von Le
büchern über die Elemente der Geometrie in Ungarn bei et
eintretenden neuen Auflagen sich veranlasst fühlten, die Sä
über Parallelen im Geiste der beiden Bolyai zu bearbeiten,
mit wenigstens die nächste Generation erfahre, dass auch Ung
ein mathematisches Talent erster Grösse besessen hat.

XIX.

Ueber die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problems von der Duplication des Würfels verwenden lassen.

Von

Herrn Doctor ***Ludwig Matthiessen***
in Husum.

---

1. Wenn man die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

unter der Voraussetzung $a+b=c$ (const.) nach a differenzirt und die Ableitung gleich Null setzt, so erhält man:

$$a^3 = cx^2.$$

Der Sinn dieser Formel lässt sich folgendermassen entwickeln. Sei YOX (Taf. V. Fig. 1.) ein rechtwinkliges Coordinatensystem und denke man sich die Linie AB von constanter Länge c nacheinander alle möglichen Lagen AB, $A'B'$, $A''B''$ einnehmen, so ist der geometrische Ort irgend eines Punktes P eine Ellipse, deren Axen AP und BP sind. Es ist nämlich:

$$y = b\sin\alpha,\quad x = a\cos\alpha,\quad \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1,$$

folglich:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Je nach der Anzahl der Punkte P würde man eben so viel verschiedene elliptische Quadranten zwischen YOX construiren kön-

2. Zweite Lösung. Das Verhältniss $a^2 : x^2 = c : a$ läs
sich auch auf folgende Art mechanisch construiren. Denkt m
sich ξ in Taf. V. Fig. 4. constant, $c = AB$ variabel, so ist $\xi = c\cos$
Soll alsdann $a = c\cos\alpha^2$ sein, so ist nothwendig $a = \xi\cos\alpha$. Di
wird dadurch herbeigeführt, dass man in dem Lineal einen Schli
anfertigt, der über den Pflock in B schleift, während man A i
der senkrechten Axe herauf führt. Führt man alsdann den Halb
kreis AC von A so aufwärts, dass $AC \perp OA$ bleibt, so ist P ei
Punkt der gesuchten Trajectorie und $a^3 = cx^2$. Bei irgend eine
Stellung und zwar bei nicht grossem α wird $x = \frac{1}{2}c$ sein, dan
ist zugleich $a^3 = 2x^3$. Macht man $\varphi = \operatorname{arc}\tan 2$, so ist $y = 2x$
und $(\xi - x)^3 = 4x^3$. Man kann einen Würfel mittelst der Trajec
torie beliebig multipliciren oder dividiren. Macht man z. B.
$\varphi = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{2}$, so ist $x = 2y$ und $(\xi - x)^3 = 2y^3$. Um die Natu
der Curve etwas genauer zu betrachten, resp. ihre Gleichung zu
bestimmen, so ist:

$$x\tan\alpha + y = \xi\tan\alpha \quad \text{oder} \quad \tan\alpha = \frac{y}{\xi - x}.$$

Ferner ist $a = \xi\cos\alpha = x : \cos\alpha$, mithin $\cos\alpha^2 = x : \xi$,

$$\tan\alpha^2 = \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2} = \frac{1 - \frac{x}{\xi}}{\frac{x}{\xi}} = \frac{\xi - x}{x} = \frac{y^2}{(\xi - x)^2},$$

also ist $(\xi - x)^3 = xy^2$. (Cissoide des Diocles.)

Die Fläche F der Curve lässt sich hier ebenfalls leichter dur
den Contingenzwinkel bestimmen. Am Einfachsten ist die Rec
nung mittelst Bestimmung von a oder die Summirung der von
überstrichenen Flächenelemente, also:

$$F = \int_0^{\xi} y\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\alpha\,d\eta \left\{ \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\frac{(c-a)^2}{c} \right\},$$

worin $a = \xi\cos\alpha$, $\eta = \xi\tan\alpha$ zu setzen ist. Durch Substitutio
dieser Werthe erhält die Gleichung die Form:

$$F = \xi^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\cos\alpha^2)\,d\alpha = \xi^2 \left\{ \alpha - \tfrac{1}{4}(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha) \right\}_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{1}{2}\pi},$$

$$F = \frac{3\pi}{8} \cdot \xi^2.$$

Construirt man die Cissoide und den Paracykel über derselbe
Basis, so schneiden sich dieselben nicht; denn wenn man di
Ordinaten η und y gleich setzt, ist:

$$(\xi - x)^3 : x = c^2(1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{c^2}})^3,$$

$$\xi - x = \sqrt[3]{xc^2} - x \quad \text{oder} \quad \xi = \sqrt[3]{xc^2},$$

nd $x = \xi = c$, d. h. die Curven vereinigen sich nur in ihrem emeinschaftlichen Ausgangspunkte B.

Der Flächeninhalt der Cissoide beträgt das Vierfache des aracykel. Aus der Formel $\xi^3 = xc^2$ geht hervor, dass bei verhiedenen Basen ξ und c der Durchschnitt erfolgt bei $x = \xi^3 : c^2$.

Nimmt man endlich a als constant, dagegen ξ als variabel , so erhält man die Gleichungen einer neuen Curve, durch elche das vorgestellte Problem gleichfalls gelöst werden kann.

3. Setzt man in der vorigen Gleichung $\xi = a^2 : x$, so erhält an die Curve (Taf. V. Fig. 5.):

$$x^2 y = \sqrt{a^2 - x^2}^3.$$

inige berechnete Coordinaten sind:

$$\begin{array}{llll} x = a, & y = 0; & x = \frac{1}{4}a, & y = 14{,}26a; \\ x = \frac{3}{4}a, & y = 0{,}50a; & x = \frac{1}{8}a, & y = 62{,}79a; \\ x = \frac{1}{2}a, & y = 2{,}54a; & x = 0, & y = \infty. \end{array}$$

Das Problem der Duplication des Kubus kann hier gelöst weren, indem man $\varphi = \text{arc tan } 2$ macht und $\sqrt{a^2 - x^2} = c$ setzt. Es ist alsdann $c^3 = 2x^3$. Um obige Curve mechanisch zu construiren, muss man die in Taf. V. Fig. 6. dargestellte Vorrichtung anwenden. Sei FOG ein rechtwinkliges festes System zweier Stäbe, auf denen die Hülsen F und G verschiebbar sind: GF ist ein in G an der Hülse festes drehbares Lineal, welches ausserdem in F drehbar und durch F verschiebbar ist, wenn die Hülsen F und G sich verschieben. Es sei ferner OR ein um O drehbarer Stab, welcher durch eine in der Entfernung a von G angebrachte Hülse M dergestalt gleitet, dass OMG stets einen rechten Winkel bildet. Wenn nun in F ein Faden FP von der Länge befestigt ist, so dass der Stift P fortwährend durch den Schlitz G gleitet, beschreibt der Stift die gedachte Curve. Der Punkt M beschreibt dabei eine andere Curve OM von der Gleichung

$$y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}.$$

iese Curve hat eine Asymptote, deren Gleichung $y = a$ ist.

Wir wollen nunmehr die Flächen dieser beiden Trajectorien estimmen.

Das Flächenelement der ersteren wird ausgedrückt durch von FP beschriebene Fläche. Man findet leicht:

$$dF = \frac{a}{2}(\cos\alpha d\eta + d\gamma) = a(\cos\alpha\left[1-\frac{a}{2c}\right]d\eta + \sin\alpha\frac{a}{2c}d\xi)$$

Nun ist:

$$\eta = a\tan\alpha:\cos\alpha, \quad d\eta = a d\alpha:\cos\alpha^3, \quad c = a:\cos\alpha^2,$$

$$\xi = a:\cos\alpha, \quad d\xi = a\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}d\alpha, \quad \tan\alpha = \sqrt{a^2-x^2}:x.$$

Mithin:

$$dF = a^2\left(\frac{1}{\cos\alpha^2} - \frac{\cos\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

$$F = a^2\tan\alpha - \tfrac{1}{4}a^2(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha).$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird $F = \infty . a^2$.

Um $\int_a^x x dy$ zu bestimmen, so ist $F' = F - \frac{ax}{2}\sin\alpha$, al

$$F' = a^2\left\{\frac{xy}{a^2-x^2} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} - \arccos\frac{x}{a}\right)\right\},$$

und wegen $y = \frac{a^2-x^2}{x^2}\sqrt{a^2-x^2}$:

$$F' = a^2\left\{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} - \arccos\frac{x}{a}\right)\right\}.$$

Man kann noch die Complanation der Curve $y^2 = x\sqrt{a^2-}$ finden. Es ist:

$$\int y dx = \int\frac{2a^2y^2dy}{\sqrt{(a^2-y^2)^3}},$$

und, wenn man substituirt, $a^2 - y^2 = z^2$, $2ydy = -2zdz$;

$$\int y dx = 2a^2\left\{\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} - \arcsin\frac{y}{a}\right\} + \text{const.}$$

$$= 2a^2\left\{\frac{x}{y} - \arcsin\frac{y}{a}\right\} + C.$$

Da die Fläche in Null übergeht für $x = y = 0$, so ist die C stante $C = 0$.

4. Mechanische Construction der Neil'schen P rabel. (Taf. V. Fig. 7.). Die Duplication des Cubus wird ebenfa

gelöst durch die Neil'sche Parabel, deren Gleichung $y^3=cx^2$ ist. Ein Lineal OM von der Länge c drehe sich um O, mit M bewege sich ein Winkelmaass NL normal zu OX und mit L auf OX, mit L ebenso durch die drehbare Hülse L verschiebbar das Winkelmaass QR normal zu OM, mit A endlich ein drittes BC normal OX. Nun nehme man einen Faden $=2c$, befestige ihn in A, führe ihn um M zurück um A nach B und wieder zurück bis P um P herum, bis das eine Ende das andere in A wieder erreicht. Dadurch wird die Lage P eines Punktes der Neil-schen Parabel bestimmt. Bewegt man das Lineal OM aufwärts, um den Punkt O gedreht, so werden AB und AP kürzer. In P kann ein Schreibstift den Faden in einem Schlitz des Winkelmaasses BC anziehen und die Curve beschreiben. Auf diese Art bleibt BP stets gleich AO. Es ist aber AO^3 stets gleich $c.OB^2$, folglich $BP^3=c.OB^2$, wodurch das Problem gelöst wird. Macht man $c=2x$, so ist $y^3=2x^3$.

Berichtigung zu Tafel V.

In Fig. 3. müssen sich in N die drei Linien in einem Punkte kreuzen. Die Linie OM fällt weg. In Fig. 6. fehlt unten (ganz rechts) an dem durch O gehenden horizontalen Schenkel des rechten Winkels der Buchstabe G.

XX.

Merkwürdige Eigenschaft derjenigen Curve, welche vom Brennpunkte einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf einer Geraden rollt.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor am Polytechnikum in Wien.

Bestimmen wir vorerst die Gleichung der Curve, welche der Brennpunkt einer auf einer Geraden rollenden Ellipse beschreibt.

Seien F und F_1 (Taf. IV. Fig. 5.) die beiden Brennpunkte der Ellipse, A der Berührungspunkt mit der x-Axe, FA und F_1A die beiden Leitstrahlen, AB die Normale im Punkte A der Ellipse,

welche bekanntlich den Winkel der zwei Leitstrahlen, de
2α nennen wollen, halbirt.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes F mit x u
so ist:

$$OK = x, \quad FK = y;$$

seien ferner die Coordinaten des zweiten Brennpunktes F_1
η, so ist:

$$OL = \xi, \quad F_1L = \eta;$$

und man hat:

$$y = FK = AF.\cos\alpha,$$
$$\eta = F_1L = AF_1.\cos\alpha;$$

demnach ist:

$$y + \eta = (AF + AF_1)\cos\alpha$$

oder, da die Summe der zwei Leitstrahlen der Ellipse $2a$ i

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y + \eta = 2a\cos\alpha.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y\eta = b^2,$$

woselbst b die halbe kleine Axe der Ellipse bezeichnet. A
und (2) ergibt sich nun durch Elimination von η folgende Gleic

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^2 + b^2 = 2ay\cos\alpha.$$

Eine blosse Betrachtung der Figur lehrt, dass FA eine
male und folglich die darauf senkrecht stehende FN eine
gente der zu suchenden Curve ist; demnach hat man:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\alpha = y'.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

folglich ist die Gleichung der verlangten Curve:

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^2 + b^2 = \frac{2ay}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung der ersten Ord
Aus ihr folgt successive:

$$(y^2 + b^2)^2 = \frac{4a^2y^2}{1 + y'^2},$$

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + y'^2 = \frac{4a^2y^2}{(y^2 + b^2)^2},$$

$$y'^2 = \frac{4a^2y^2 - (y^2+b^2)^2}{(y^2+b^2)^2},$$

$$y' = \frac{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2+b^2)^2}}{y^2+b^2},$$

und endlich:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad dx = \frac{(y^2+b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}},$$

woraus x durch Integration zu ermitteln wäre. Einfacher aber ist es, ds als Function von dy zu ermitteln. Es ist aus der Gleichung (6) ersichtlich, dass

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2ay}{y^2+b^2}, \quad \text{somit} \quad ds = \frac{2ay\,dx}{y^2+b^2},$$

und vermöge der Gleichung (7):

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad ds = \frac{2ay\,dy}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}}$$

ist. Nun gibt diese Gleichung integrirt:

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad s = a \arcsin \frac{y^2-2a^2+b^2}{2a\sqrt{a^2-b^2}} + s_1,$$

woselbst s_1 eine willkührliche Constante bezeichnet. Setzt man der Einfachheit halber

$$b^2 = a^2(1-e^2),$$

woselbst e die Excentricität der Ellipse bzeichnet, so ist:

$$s = a \arcsin \frac{y^2-a^2(1+e^2)}{2a^2e} + s_1,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{y^2-a^2(1+e^2)}{2a^2e} = \sin\frac{s-s_1}{a}$$

oder

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad y^2 = a^2\left(1+2e\sin\frac{s-s_1}{a}+e^2\right)$$

als Gleichung der verlangten Curve. (Man sehe hierüber die „Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral" von Moigno, 4ter Band 1stes Fascikel Seite 218 und 219.)

Aus der Gleichung (10) folgt zunächst, dass, so oft s um $2a\pi$ wächst, y unverändert bleibt, und hieraus schliesse ich, dass,

so oft die Ellipse sich einmal auf die Axe der x abgerollt hat, der Brennpunkt eine Curve von der Länge $2a\pi$ durchlaufen hat. Diese Curvenlänge ist, wie man sieht, unabhängig von b, also beschreibt der Brennpunkt einer jeden Ellipse, deren grosse Axe $2a$ ist, bei jedesmaligem Abrollen der Ellipse, eine Curve von derselben Länge.

XXI.

Problema geometricum,

propositum a

Dre. *Christiano Fr. Lindman*,
Lect. Strengnesensi.

Invenire rectam, quae segmentum parabolicum chorda ad axem principalem perpendiculari terminatum in duas partes aequales dividat.

Aequatio rectae quaesitae sit

$$\frac{y}{u}+\frac{x}{z}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et aequatio rectae parabolam $y^2=2px$ secantis $x=a$. Recta (1) parabolam secat in duobus punctis, quorum coordinatae sunt

$$y=-\frac{pz}{u}\pm\sqrt{\frac{p^2z^2}{u^2}+2pz},\quad x=z(1-\frac{y}{u})=z(1+\frac{pz}{u^2}\mp\frac{1}{u}\sqrt{\frac{p^2z^2}{u^2}+2pz},$$

quae posthac, servato ordine, brevitatis caussa y_1, y_2, x_1, x_2 nominentur. E theoremate notissimo sequitur, ut segmentum, quod dividendum est, sit $=\frac{4}{3}a\sqrt{2ap}$. Superficie segmenti, quod recta (1) abscindit, $=s$ posita, ex eodem theoremate colligitur, esse

$$s = \tfrac{1}{6}(x_1 y_1 - x_2 y_2) + \tfrac{1}{2}z(y_1 - y_2)$$
$$= \tfrac{1}{6}z\left[y_1\left(1 - \frac{y_1}{u}\right) - y_2\left(1 - \frac{y_2}{u}\right) + 3(y_1 - y_2)\right],$$

uoniam est $x = z\left(1 - \frac{y}{u}\right)$.

Facillimo jam negotio invenitur:

$$s = \tfrac{1}{6}z(y_1 - y_2)\left(4 - \frac{y_1 + y_2}{u}\right),$$

el introductis valoribus:

$$s = \frac{2z}{3}\left(2 + \frac{pz}{u^2}\right)\sqrt{\frac{p^2 z^2}{u^2} + 2pz}.$$

Quum vero problema postulet, ut sit $s = \tfrac{2}{3}a\sqrt{2ap}$, invenitur, actore communi $\tfrac{2}{3}\sqrt{p}$ divisione remoto,

$$\left(\frac{pz^2}{u^2} + 2z\right)^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{2a},$$

unde denique prodit:

$$\left(\frac{pz^2}{u^2} + 2z\right)^3 = 2a^3, \text{ vel } \frac{pz^2}{u^2} + 2z = a\sqrt[3]{2}. \quad . \; . \; . \; (2)$$

Ex hac aequatione videre licet, innumerabiles dari tales rectas, ales quaerimus. Facile patet, quantitatem u ejus modi esse portere, ut sit $\sqrt{2ap} \geqq u \geqq -\sqrt{2ap}$. Posita $u = \pm\sqrt{2ap}$, invenitur $z = a(-2 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt[3]{2}})$, ubi tamen signo inferiore uti non ossumus, quia z, ut facile elucet, hoc problemate negativa esse equit. Jam litteris ξ, η designemus coordinatas puncti, ubi recta uaesita dimidiata est, et inveniemus:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = z\left(1 + \frac{pz}{u}\right), \quad \eta = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{pz}{u},$$

nde reperimus:

$$z = \xi - \frac{\eta^2}{p}, \quad u = \eta - \frac{p\xi}{\eta}, \quad \frac{z}{u} = -\frac{\eta}{p}. \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

ii valores in (2) substituti dant:

$$\eta^2 = 2p\xi - ap\sqrt[3]{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

uae est aequatio parabolae nulla alia re a data discrepantis nisi

ea, quod abscissa verticis est $=\frac{1}{2}a\sqrt[3]{2}$. Aequatio rectae, quae hanc parabolam puncto ξ, η tangit, est

$$y-\eta=\frac{p}{\eta}(x-\xi). \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Quod si valores quantitatum u, z ex (3) in (1) substituuntur, eadem ipsa aequatio (5) prodit, unde liquet, rectam quaesitam esse tangentem parabolae (4). Ut problema propositum solvatur, scribenda igitur est alia parabola ejusdem parametri atque datae, cujus tamen vertex in puncto $x=\frac{1}{2}a\sqrt[3]{2}$, $y=0$ situs sit, ejusmodi tangens hujus parabolae ducenda, quae non intra parabolam datam secet rectam segmentum datum terminantem.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

1. Wenn, wie Taf. IV. Fig. 3. zeigt, zwei mit den Halbmessern a und b um die Mittelpunkte A' und B' beschriebene Kreise einen dritten mit dem Halbmesser r um den Mittelpunkt O beschriebenen Kreis in den Punkten P und Q von Aussen berühren, und die Länge der gemeinschaftlichen äusseren Berührenden der beiden um A' und B' beschriebenen Kreise durch (AB) bezeichnet wird, so ist:

$$(AB)=\frac{\sqrt{(r+a)(r+b)}}{r}.PQ.$$

(R. Townsend.)

Aus diesem Satze lässt sich mittelst des Ptolemäischen Satzes leicht der folgende Satz ableiten:

2. Wenn, wie Taf. IV. Fig. 4. zeigt, vier um die Mittelpunkte A', B', C', D' beschriebene Kreise einen fünften, um den Mit-

telpunkt O beschriebenen Kreis von Aussen berühren, und die Längen der äusseren Berührenden der um die Mittelpunkte

$$A', B';\ A', C';\ A', D';\ B', C';\ B', D';\ C', D'$$

respective durch

$$(AB),\ (AC),\ (AD),\ (BC),\ (BD),\ (CD)$$

bezeichnet werden, so ist:

$$(AC).(BD) = (AB).(CD) + (BC).(AD).$$

(Casey.)

Wie gestalten sich diese Sätze, wenn an die Stelle äusserer Berührungen innere Berührungen, an die Stelle äusserer gemeinschaftlicher Berührenden innere gemeinschaftliche Berührende gesetzt werden? Eine ganz allgemeine und auf allgemeine Ausdrücke gebrachte Behandlung scheint wünschenswerth, so wie die Betrachtung besonderer Fälle, wenn Halbmesser der betreffenden Kreise verschwinden u. s. w.

Wenn in Taf. IV. Fig. 2. auf den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC die Punkte C', A', B' so liegen, dass

$$AC':BC' = BA':CA' = CB':AB' = \lambda:\mu$$

ist, wo das Verhältniss $\lambda:\mu$ als gegeben betrachtet wird: so soll man den Flächeninhalt des von den Linien AA', BB', CC' gebildeten Dreiecks $A''B''C''$ finden (sein Verhältniss zu dem Flächeninhalte des Dreiecks ABC angeben).

(H. M. Taylor.)

Wenn vier Punkte A, B, C, D auf dem Umfange eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises liegen, so liegen die Schwerpunkte der vier Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC auf dem Umfange eines mit dem Halbmesser $\frac{1}{3}r$ beschriebenen Kreises, dessen Mittelpunkt seiner Lage nach weiter zu bestimmen ist.

(J. Griffiths.)

Wie ist die folgende allgemein gültige Gleichung:

$$x^8 + y^8 + (x+y)^8 = 2(x^2 + xy + y^2)^4 + 8x^2y^2(x+y)^2(x^2 + xy + y^2)$$

möglichst kurz zu beweisen?

N. Peterson in Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Un-

dervisningen, utgifven af G. Dillner, F. Hultman, T. R. Thalén. Häftet I. Januari 1 p. 25.

XXIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

In der in jeder Beziehung, namentlich aber auch von a Lehrern der Mathematik sehr zu beachtenden „Tidskrift Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elem tar-Undervisningen, utgifven af G. Dillner, F. W. H man, T. R. Thalén“, auf die wir noch oft zurückzukom hoffen, findet sich u. A. der von Herrn **Lars Phragmén** Häftet I. Januari 1868. p. 14. unter der Ueberschrift: G metriskt bevis af formlerna för tredje händelsen snedvinkliga trianglars beräkning nach „**Lindma** Trigonometri. s. 73.“ mitgetheilte folgende überaus elegante zierliche geometrische Beweis der Formeln zur trigonometrisc Berechnung eines ebenen Dreiecks aus zwei Seiten und dem geschlossenen Winkel, der gewiss sehr verdient, bei'm trigo metrischen Elementar-Unterrichte benutzt zu werden:

In Taf. IV. Fig. 1. sei ABC das gegebene Dreieck, in welc wir die Stücke a, b, C als gegeben betrachten. Man halbire gegebenen Winkel ACB durch die Gerade CD, fälle auf selbe von A und B die Perpendikel AE und BD, und auf letztere über D hinaus verlängerte Perpendikel von A das pendikel AF. Dann ist:

$$\angle CBD = 90^0 - \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$\angle ABF = \tfrac{1}{2}(A+B) - B = \tfrac{1}{2}(A-B);$$
$$AF = CD - CE \quad \text{und} \quad BF = BD + DF.$$

iernach ist nun:

$$AF = c \sin \tfrac{1}{2}(A-B),\quad CD = a \cos \tfrac{1}{2}C,\quad CE = b \cos \tfrac{1}{2}C;$$
$$BF = c \cos \tfrac{1}{2}(A-B),\quad BD = a \sin \tfrac{1}{2}C,\quad DF = b \sin \tfrac{1}{2}C;$$

lglich nach dem Obigen:

$$c \sin \tfrac{1}{2}(A-B) = (a-b) \cos \tfrac{1}{2}C,$$
$$c \cos \tfrac{1}{2}(A-B) = (a+b) \sin \tfrac{1}{2}C;$$

so:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}C;$$

$$c = \frac{(a-b)\cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \quad \text{und} \quad c = \frac{(a+b)\sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)},$$

elches die bekannten wichtigen Formeln sind, zu denen man lso auf diesem Wege ungemein einfach und leicht gelangt.

Wir wünschen nochmals, dass die neue schwedische Zeitchrift namentlich auch bei deutschen Lehrern der Mathemaik und Physik die sorgfältigste Beachtung finden möge.

Von dem Herausgeber.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Gymnasiallehrers Julius Michaelis in Freiberg im Königreich Sachsen an den Herausgeber.

Herr Gymnasiallehrer J. Michaelis in Freiberg im Königreich Sachsen schreibt mir unter dem 24. März 1868:

„In Ihrem Archiv der Mathem. und Physik Thl. XLVII. eft 3. S. 355. fand ich kürzlich drei interessante Aufgaben, von nen die zweite und dritte Druckfehler enthalten dürften u. s. w."

Indem ich Herrn J. Michaelis für diese ganz richtige Miteilung, welcher zugleich weitere Bemerkungen zur nothwendigen erichtigung beigefügt waren, recht sehr und verbindlichst danke, eile ich nachstehend die erforderlichen Berichtigungen der in ede stehenden Aufgaben mit. Die Aufgaben waren hauptsächh ihrer Form wegen im Archiv mitgetheilt worden, und die ehler sind jedenfalls durch die ganz veraltete Gestalt des Miuszeichens in dem alten Buche von Paul Halcken entstanden. h bitte wegen dieses Versehens die geehrten Leser recht sehr m Verzeihung und theile nachstehend die nothwendigen Berichungen mit.

In der Aufgabe a. a. O. Nr. 2. müssen statt der Gleichungen:

$$x^2+ax+b=0,\quad y^2+cy+d=0$$

gesetzt werden die Gleichungen:

$$x^2-ax-b=0,\quad y^2+cy-d=0;$$

und statt der Gleichungen:

$$x^2+8x+9=0,\quad y^2+10y+11=0$$

sind zu setzen die Gleichungen:

$$x^2-8x-9=0,\quad y^2+10y-11=0;$$

was auch Alles schon Herr J. Michaelis in seinem gütigen
bemerkt und durch eigene Rechnungen herausgebracht hat.

In der Aufgabe a. a. O. Nr. 3. müssen statt der Gleichu

$$x^2+ax+b=0,\quad y^2+cy+d=0$$

wie vorher gesetzt werden die Gleichungen:

$$x^2-ax-b=0,\quad y^2+cy-d=0;$$

und statt der Gleichungen:

$$x^2+10x+24=0,\quad y^2+4y+32=0$$

sind zu setzen die Gleichungen:

$$x^2-10x-24=0,\quad y^2+4y-32=0.$$

Es sind also nur Minuszeichen für einige Pluszeichen zu se
welche Verwechselung auf die oben angegebene Weise leide
standen ist. Andere Berichtigungen dürften nicht nöthig
insbesondere ist es auch in der Aufgabe Nr. 3. ganz richtig,
„die Summa beyder *Radicum* $x+y$ so viel thut als das Qu
von c". Denn die Wurzeln der Gleichungen $x^2-10x-2$
und $y^2+4y-32=0$ sind beziehungsweise:

$$x=5\pm7=\begin{cases}12\\-2\end{cases}\text{ und } y=-2\pm6=\begin{cases}4\\-8\end{cases},$$

also $x+y=12+4=16=4^2$, folglich, weil $c=4$ ist, wir
$x+y=c^2$, wie P. Halcken sagt; dass derselbe nur die p
tiven Wurzeln in Betracht zieht, ist im Sinne der alten A
metiker bekanntlich ganz in der Ordnung.

Ich theile noch folgende Aufgabe nach P. Halcken mit,
in den jetzt gewöhnlichen Zeichen:

Es sind abermahl zwo quadratische *aequationes*:

$$x^2+\alpha x-a=0,\quad y^2-\beta y-b=0.$$

Wann man die beyden wahren *radices* zusammen *addiret*,
men $\alpha+\beta+1$, davon thut β 2 mehr als α, und a 3 mehr a
b aber ist 2 mahl so viel $+1$ dann x. Was sind es für *ae
tiones*? Fac.

$$x^2+2x-8=0,\quad y^2-4y-5=0.$$

XXIV.

Propriétés nouvelles du quadrilatère en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles, etc.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,

Docteur ès sciences mathématiques,

Professeur au Lycée impérial de la Réunion. (Mer des Indes.)

---

§. I. Définitions préliminaires.

1. Toute ligne brisée qui se ferme, est un quadrilatère, lorsqu' elle est composée de quatre droites; ces droites sont les côtés du quadrilatère, et les intersections des côtés consécutifs sont les sommets du quadrilatère; les droites qui joignent les sommets opposés, sont les diagonales du quadrilatère.

Un quadrilatère est donc une figure formée de six droites qui se coupent trois à trois en quatre points différents.

2. On distingue trois espèces de quadrilatères:

1° le quadrilatère convexe $ABCD$ (*) qui est situé d'un même côté de chacun de ses quatre côtés. Nous représenterons par a, b, c, d les quatre côtés consécutifs DA, AB, BC, CD de ce quadrilatère; par x, y les diagonales AC, BD. Nous désignerons par E, F les points de rencontre des côtés opposés AD et BC, AB et DC; et nous nommerons z la distance EF. Nous supposerons que l'angle A du quadrilatère soit plus petit que l'angle opposé C, de sorte que ce dernier se trouve enveloppé par l'angle A.

2° le quadrilatère à angle rentrant $AECF$, dont deux côtés consécutifs CE, CF rentrent dans l'angle EAF formé par les deux autres côtés AE, AF. Les deux diagonales de ce quadrilatère sont $AC = x$, $EF = z$.

(*) Le Lecteur est prié de faire la figure Lui-même.

3° le quadrilatère étoilé $BEDF$, dont deux côtés B DF se croisent entre les deux autres côtés DE, BF. Les d diagonales de ce quadrilatère sont $DB = y$, $EF = z$.

3. Dans chacun de ces trois quadrilatères, nous donner le nom de troisième diagonale à la droite, qui joint points d'intersection des côtés du quadrilatère.

Les trois diagonales x, y, z se coupent: x et y en G, x z en H, z et y en K: elles forment entre elles le triangle GH dont nous supposerons le sommet K situé du même côté que A

§. II. Généralisation de théorèmes connus.

4. Toutes les propriétés du quadrilatère convexe, qui reposent pas essentiellement sur la convexité de cette figu appartiennent aussi aux deux autres quadrilatères, l'un à an rentrant et l'autre étoilé. Les plus importantes de ces propriét sont les suivantes:

5. **Théorème I.** Dans tout quadrilatère, convexe, angle rentrant ou étoilé, les droites qui joignent l milieux des côtés opposés et la droite qui joint les m lieux des deux diagonales, passent par un même poi et y sont divisées chacune en deux parties égales.

6. **Théorème II.** Dans tout quadrilatère, convexe, angle rentrant ou étoilé, la somme des carrés d quatre côtés est égale à la somme des carrés des de diagonales, augmentée du quadruple carré de la droi qui joint les milieux de ces diagonales.

7. La surface du quadrilatère convexe $ABCD$ est égale la somme des deux triangles ABD, CBD qui s'appuient s la diagonale BD; ou égale à la somme des deux triangles AC ACB qui reposent sur la diagonale AC.

Dans le quadrilatère à angle rentrant $AECF$, la surface e égale à la somme des deux triangles ACE, ACF qui repose sur la diagonale AC; ou égale à la différence des deux tria gles AEF, CEF qui s'appuient sur la diagonale EF.

Quant au quadrilatère étoilé $BEDF$, sa surface devra ét considérée comme égale à la différence des deux triangl DEF, BEF qui s'appuient sur la diagonale EF, ou égale à différence des deux triangles BDE, BDF qui reposent s la diagonale BD.

Cela posé, il est aisé de démontrer les trois théorèmes sui-
:

Théorème III. Dans tout quadrilatère, convexe,
gle rentrant ou étoilé, les droites qui joignent les
s milieux des côtés adjacents, forment un paral-
ramme, dont la surface est la moitié de celle du
rilatère.

Théorème IV. Dans tout quadrilatère, convexe,
gle rentrant ou étoilé, les droites menées par les
nets parallèlement aux diagonales, forment un
llélogramme, dont la surface est double de celle
uadrilatère.

0. Théorème V. L'aire d'un quadrilatère quelcon-
convexe, à angle rentrant ou étoilé, est égale au
-produit des diagonales multiplié par le sinus
angle compris.

§. III. Propriétés nouvelles du quadrilatère.

1. Théorème I. Dans tout quadrilatère, convexe, à
e rentrant ou étoilé, le double produit des diago-
s multiplié par le cosinus de l'angle compris, est
à la somme des carrés des deux côtés non oppo-
à l'angle, diminuée de la somme des carrés des
x autres côtés.

Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, projetons la ligne bri-
BDC sur la diagonale AC; nous avons

$$AC = AB\cos BAC + BD\cos AGB + CD\cos ACD,$$

n posant l'angle $AGB = \varphi$,

$$x = b\cos BAC + y\cos\varphi + d\cos ACD;$$

en multipliant par $2x$,

$$2x^2 = 2bx\cos BAC + 2xy\cos\varphi + 2dx\cos ACD.$$

s deux triangles ABC, ACD donnent

$$2bx\cos BAC = b^2 + x^2 - c^2,$$

$$2dx\cos ACD = d^2 + x^2 - a^2;$$

btient donc, en substituant,

$$2x^2 = b^2 + x^2 - c^2 + 2xy\cos\varphi + d^2 + x^2 - a^2,$$

d'où on tire

$$2xy\cos\varphi = a^2 - b^2 + c^2 - d^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

La démonstration serait analogue pour le quadrilatère à
rentrant et pour le quadrilatère étoilé.

12. **Théorème II.** Dans tout quadrilatère, con
à angle rentrant ou étoilé, le double produit de
côtés opposés multiplié par le cosinus de l'angle
pris, est égal à la somme des carrés des diagon
diminuée de la somme des carrés des deux autres c

En effet, le quadrilatère convexe $ABCD$ peut être con
comme un quadrilatère étoilé $ABDCA$, dont les côtés cons
sont

$$AB = b, \quad BD = y, \quad DC = d, \quad CA = x,$$

et dont les deux diagonales sont

$$AD = a, \quad BC = c;$$

nous avons donc, d'après le théorème précédent,

$$2ac\cos(a, c) = x^2 + y^2 - b^2 - d^2. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nous trouverions de même

$$2bd\cos(b, d) = x^2 + y^2 - a^2 - c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

13. **Théorème III.** Dans tout quadrilatère, con
à angle rentrant ou étoilé, le produit des diago
multiplié par le cosinus de l'angle compris, est é
la différence des produits des côtés opposés, multi
chacun par le cosinus de l'angle compris.

En effet, considérons les trois relations (I), (II) et (II
nous retranchons la troisième de la seconde et que nous a
rions le résultat à la premiére, nous obtiendrons l'égalité

$$xy\cos(x, y) = ac\cos(a, c) - bd\cos(b, d). \quad . \quad .$$

14. **Théorème IV.** Dans tout quadrilatère, con
à angle rentrant ou étoilé, le quadruple carré
droite qui joint les milieux des diagonales, est é
la somme des carrés de deux côtés opposés, dim
du double produit de ces côtés multiplié par le co
de l'angle compris.

Nous savons (n° 6) que

$$4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 - y^2,$$

ésignant la droite qui joint les milieux des deux diagonales t y; or nous avons trouvé (n° 12) que

$$x^2 + y^2 - b^2 - d^2 = 2ac\cos(a,\ c);$$

anchant cette seconde égalité de la première et réduisant, on ient

$$4r^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(a,\ c). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

On aurait de même

$$4r^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos(b,\ d). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

15. **Corollaire.** Ces deux dernières égalités donnent

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos(a,\ c) = b^2 + d^2 - 2bd\cos(b,\ d). \quad \ldots \quad \text{(VII)}$$

16. **Théorème V.** **Dans tout quadrilatère, convexe, ngle rentrant ou étoilé, le quadruple carré de la oite qui joint les milieux de deux côtés opposés, t égal à la somme des carrés des diagonales, plus moins le double produit de ces diagonales multi- lé par le cosinus de l'angle compris, suivant que cet gle est ou non opposé aux deux côtés considérés.**

Soient p la droite qui joint les milieux des deux *côtés oppo- s* a et c; et q celle qui joint les milieux des deux autres *côtés* et d. Nous avons (n° 6)

$$4p^2 = x^2 + y^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2;$$

comme (n° 11)

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = -2xy\cos\varphi,$$

vient de suite

$$4p^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

On trouverait de même que

$$4q^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

17. **Corollaire I.** Les égalités

$$2bd\cos(b,\ d) = x^2 + y^2 - a^2 - c^2,$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2xy\cos\varphi$$

donnent, par soustraction,

$$b^2+d^2+2bd\cos(b,\ d)=x^2+y^2-2xy\cos\varphi.$$

On a donc aussi

$$4p^2=b^2+d^2+2bd\cos(b,\ d), \quad \ldots\ldots$$

et pareillement,

$$4q^2=a^2+c^2+2ac\cos(a,\ c). \quad \ldots\ldots$$

Ces relations expriment que

Dans tout quadrilatère, convexe, à angle rentr ou étoilé, le quadruple carré de la droite qui joint milieux de deux côtés opposés, est égal à la som des carrés des deux autres côtés, augmentée du dou produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus l'angle compris.

18. **Théorème VI.** L'aire d'un quadrilatère quelc que, convexe, à angle rentrant ou étoilé, est égale quart de la différence des carrés des diagonales, m tipliée par la tangente de l'angle compris entre droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

En effet, les droites p, q sont les diagonales d'un paral gramme, dont les côtés adjacents $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ comprennent entr l'angle φ des diagonales; l'aire de ce parallélogramme est suite, exprimée par chacune des quantités

$$\tfrac{1}{4}xy\sin(x,\ y),\ \tfrac{1}{2}pq\sin(p,\ q),$$

de sorte qu'on a l'aire du quadrilatère

$$Q=\tfrac{1}{2}xy\sin(x,\ y)=pq\sin(p,\ q);$$

mais on a aussi

$$2pq\cos(p,\ q)=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4},$$

ou

$$pq\cos(p,\ q)=\tfrac{1}{4}(x^2-y^2);$$

on obtient ainsi, en multipliant membre à membre,

$$Q\times\cos(p,\ q)=\tfrac{1}{4}(x^2-y^2)\sin(p,\ q),$$

d'où on tire

$$Q=\tfrac{1}{4}(x^2-y^2)\,\text{tang}\,(p,\ q). \quad \ldots\ldots$$

19. Corollaire. Cette dernière formule donne

$$\operatorname{tang}(p,\ q) = \frac{2xy\sin(x,\ y)}{x^2-y^2} \; \ldots\ldots \; \text{(XIII)}$$

On trouve pareillement que

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(q,\ r) &= \frac{2ac\sin(a,\ c)}{a^2-c^2}, \\ \operatorname{tang}(r,\ p) &= \frac{2bd\sin(b,\ d)}{b^2-d^2}. \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots \; \text{(XIV)}$$

20. Théorème VII. Dans tout quadrilatère, convexe, angle rentrant ou étoilé, où a, b, c, d désignent les uatre côtés consécutifs et φ l'angle des deux diagoales x, y; la surface Q est exprimée par la formule

$$Q = \tfrac{1}{4}(a^2-b^2+c^2-d^2)\operatorname{tang}\varphi.$$

En effet, nous savons (n° 10) que

$$Q = \tfrac{1}{2}xy\sin\varphi,$$

et, comme nous avons trouvé (n° 11) que

$$2xy\cos\varphi = a^2-b^2+c^2-d^2,$$

vient, en multipliant membre à membre,

$$2\cos\varphi . Q = \tfrac{1}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2)\sin\varphi,$$

où on tire

$$Q = \tfrac{1}{4}(a^2-b^2+c^2-d^2)\operatorname{tang}\varphi. \; \ldots\ldots \; \text{(XV)}$$

21. Théorème VIII. L'aire du quadrilatère est aussi xprimée par la formule

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}\,(*). \; \ldots \; \text{(XVI)}$$

Car, puisque

$$Q = \tfrac{1}{2}xy\sin\varphi = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-4x^2y^2\cos^2\varphi},$$

n voit de suite, en ayant égard à la formule (I), qu'on a l'expression (XVI), qui peut aussi s'écrire

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2xy+a^2-b^2+c^2-d^2)(2xy-a^2+b^2-c^2+d^2)}. \text{(XVII)}$$

(*) Nous avons déjà fait connaitre cette expression dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Tome VII, page 67, 1848.

22. **Relation de Carnot.** Dans sa Géométrie de position, **Carnot** a établi la relation générale qui existe entre les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère; cette relation exprime que le quadrilatère n'est pas une figure gauche, c'est-à-dire, que les côtés et les diagonales sont situés dans un même plan. Nous allons déterminer cette formule par le procédé suivant, qui conduit de suite à une relation symétrique.

Soient α, β, γ les angles que font entre elles les droites p, q, r qui joignent les milieux des côtés opposés et ceux des diagonales. Puisque $\alpha=\beta+\gamma$, nous avons

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1;$$

or $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ étant les côtés d'un parallélogramme dont p et q sont les diagonales, il vient

$$2p^2+2q^2=x^2+y^2,\quad 4pq\cos\alpha=x^2-y^2;$$

et de même

$$2q^2+2r^2=a^2+c^2,\quad 4qr\cos\beta=a^2-c^2;$$

$$2r^2+2p^2=b^2+d^2,\quad 4rp\cos\gamma=b^2-d^2;$$

nous obtenons par suite, en substituant,

$$2r^2(x^2-y^2)^2+2p^2(a^2-c^2)^2+2q^2(b^2-d^2)^2-(x^2-y^2)(a^2-c^2)(b^2-d^2)$$
$$=32p^2q^2r^2;$$

mais on a

$$2r^2(x^2-y^2)^2=2r^2(x^2+y^2)^2-8r^2x^2y^2=8r^2(p^2+q^2)^2-8x^2y^2r^2,$$

de sorte que l'égalité précédente devient, en changeant les signes et en transposant,

$$8x^2y^2r^2+8a^2c^2p^2+8b^2d^2q^2$$
$$=8r^2(p^2+q^2)^2+8p^2(q^2+r^2)^2+8q^2(r^2+p^2)^2-(x^2-y^2)(a^2-c^2)(b^2-d^2)$$
$$-32p^2q^2r^2.$$

Les quatre premiers termes du second membre se réduisent à

$$(2p^2+2q^2)(2q^2+2r^2)(2r^2+2p^2)=(x^2+y^2)(a^2+c^2)(b^2+d^2);$$

et, comme

$$4r^2=a^2+b^2+c^2+d^2-x^2-y^2,\ \text{etc.}$$

on a en définitive

$$2x^2y^2(a^2+b^2+c^2+d^2-x^2-y^2)+2a^2c^2(x^2+y^2+b^2+d^2-a^2-c^2)$$
$$+2b^2d^2(x^2+y^2+a^2+c^2-b^2-d^2)$$
$$=(x^2+y^2)(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(x^2-y^2)(a^2-c^2)(b^2-d^2)$$
$$=2(a^2d^2+b^2c^2)x^2+2(a^2b^2+c^2d^2)y^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

Cette équation peut encore se mettre sous l'une quelconque des quatre formes suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} xy(a^2+c^2+b^2+d^2-x^2-y^2) \\ +ac(b^2+d^2+x^2+y^2-a^2-c^2) \\ +bd(x^2+y^2+a^2+c^2-b^2-d^2) \end{array}\right\} = \frac{[x(ad+bc)+y(ab+cd)]^2}{xy+ac+bd}, \quad \text{(XIX)}$$

$$\left.\begin{array}{l} -xy(a^2+c^2+b^2+d^2-x^2-y^2) \\ +ac(b^2+d^2+x^2+y^2-a^2-c^2) \\ +bd(x^2+y^2+a^2+c^2-b^2-d^2) \end{array}\right\} = \frac{[x(ad+bc)-y(ab+cd)]^2}{-xy+ac+bd}, \quad \text{(XX)}$$

$$\left.\begin{array}{l} xy(a^2+c^2+b^2+d^2-x^2-y^2) \\ -ac(b^2+d^2+x^2+y^2-a^2-c^2) \\ +bd(x^2+y^2+a^2+c^2-b^2-d^2) \end{array}\right\} = \frac{[x(ad-bc)+y(ab-cd)]^2}{xy-ac+bd}, \quad \text{(XXI)}$$

$$\left.\begin{array}{l} xy(a^2+c^2+b^2+d^2-x^2-y^2) \\ +ac(b^2+d^2+x^2+y^2-a^2-c^2) \\ -bd(x^2+y^2+a^2+c^2-b^2-d^2) \end{array}\right\} = \frac{[x(ad-bc)-y(ab-cd)]^2}{xy+ac-bd}. \quad \text{(XXII)}$$

§. IV. Quadrilatère inscriptible convexe.

23. Nous distinguerons quatre espèces de quadrilatères inscriptibles:

1° le quadrilatère inscriptible convexe *ABCD*, dont nous poserons toujours les côtés

$$DA=a, \quad AB=b, \quad BC=c, \quad CD=d;$$

2° le quadrilatère inscriptible étoilé *DACBD*, dont les côtés consécutifs sont *DA*, *AC*, *CB* et *BD*;

3° le quadrilatère ex-inscriptible à angle rentrant *EAFCE*, ayant pour côtés consécutifs les droites *EA*, *AF*, *FC* et *CE*;

4° le quadrilatère ex-inscriptible étoilé *EBFDE*, qui est formé par les côtés consécutifs *EB*, *BF*, *FD*, *DE*.

Nous qualifions chacun de ces deux derniers de l'épithète

d'**ex-inscriptible**, parceque la circonférence passe par d sommets opposés du quadrilatère et par les deux points de c cours des côtés opposés.

Nous nous occuperons d'abord du quadrilatère inscriptible vexe.

24. Diagonales intérieures. Dans le quadrilatère inscript convexe, les angles opposés étant supplémentaires, on a les lations

$$x^2 = a^2 + d^2 + 2ad\cos B,$$
$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B,$$

qui, par l'élimination de l'angle B, donnent la valeur de x. trouve ainsi pour les deux diagonales intérieures

$$x^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc},\quad y^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd};\ (\text{XX}$$

d'où on tire

$$xy = ac+bd,\quad \frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc}.\ .\ .\ .\ .\ (\text{XXI}$$

24 bis. Différence des carrés des diagonales. Si nous retr chons membre à membre les égalités (XXIII), nous obtiendr

$$x^2-y^2 = (ac+bd)\left[\frac{ab+cd}{ad+bc} - \frac{ad+bc}{ab+cd}\right]$$
$$= \frac{(ac+bd)[(ab+cd)^2-(ad+bc)^2]}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

et en effectuant,

$$x^2-y^2 = \frac{(ac+bd)(a^2-c^2)(b^2-d^2)}{(ad+bc)(ab+cd)};\ .\ .\ (\text{XXIV}$$

d'où on tire

$$\frac{x^2-y^2}{xy} = \frac{a^2-c^2}{ad+bc} \times \frac{b^2-d^2}{ab+cd}.\ .\ .\ .\ (\text{XXIV}$$

25. Segments des deux diagonales intérieures. Les d triangles ABD, BCD ont les angles en A et C supplémenta en même temps qu'ils ont même base; il vient, par conséqu

$$\frac{ABD}{BCD} = \frac{AD.AB}{CD.CB} = \frac{ab}{cd},$$
$$\frac{ABD}{BCD} = \frac{AG}{CG} = \frac{x'}{x''},$$

où x', x'' désignent les deux segments additifs AG, CG de la diagonale $AC = x$; on en tire

$$\frac{x'}{ab} = \frac{x''}{cd} = \frac{x'+x''}{ab+cd} = \frac{x}{ab+cd}. \quad \ldots \ldots (1)$$

On trouverait de même que

$$\frac{y'}{ad} = \frac{y''}{bc} = \frac{y}{ad+bc}, \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

où $y' = DG$, $y'' = BG$.

Par suite, on a, en ayant égard aux valeurs (XXIII),

$$\left.\begin{aligned} x'^2 &= \frac{a^2b^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}, \quad x''^2 = \frac{c^2d^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}; \\ y'^2 &= \frac{a^2d^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}, \quad y''^2 = \frac{b^2c^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXV)}$$

Ces égalités donnent

$$\frac{x'}{ab} = \frac{y'}{bc} = \frac{x''}{cd} = \frac{y''}{da}, \quad \ldots \ldots \text{(XXVI)}$$

et expriment que

Dans tout quadrilatère inscriptible convexe, les segments additifs des deux diagonales intérieures sont entre eux comme les produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de ces segments.

Ce théorème a été donné par **Carnot** dans sa **Géométrie de position.**

Pour avoir les segments soustractifs des mêmes diagonales, il suffit de se rappeler que les trois diagonales d'un quadrilatère se divisent en parties harmoniques, c'est-à-dire que

$$\frac{x'}{x''} = \frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{y'}{y''} = \frac{y_1}{y_2},$$

où

$$x_1 = AH, \; x_2 = CH, \; y_1 = DK, \; y_2 = BK;$$

il vient ainsi

$$\frac{x_1}{ab} = \frac{x_2}{cd} = \frac{x_1 - x_2}{ab - cd} = \frac{x}{ab - cd}; \quad \ldots \ldots (3)$$

$$\frac{y_1}{ad} = \frac{y_2}{bc} = \frac{y_1 - y_2}{ad - bc} = \frac{y}{ad - bc}; \quad \ldots \ldots (4)$$

mettant à la place de x, y leurs valeurs (XXIII), on obtient

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{a^2b^2}{(ab-cd)^2}\cdot\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}, \\ x_2^2 &= \frac{c^2d^2}{(ab-cd)^2}\cdot\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}; \\ y_1^2 &= \frac{a^2d^2}{(ad-bc)^2}\cdot\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}, \\ y_2^2 &= \frac{b^2c^2}{(ad-bc)^2}\cdot\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}. \end{aligned}\right\}\ldots \text{(XXVII)}$$

Au moyen des valeurs précédentes on trouve

$$\frac{x_1(ab-cd)}{ab(ab+cd)} = \frac{x_2(ab-cd)}{cd(ab+cd)} = \frac{y_1(ad-bc)}{ad(ad+bc)} = \frac{y_2(ad-bc)}{bc(ad+bc)}. \text{(XXVIII)}$$

26. **Angle des diagonales.** Dans la formule générale

$$2xy\cos\varphi = a^2-b^2+c^2-d^2$$

remplaçons xy par sa valeur $ac+bd$; nous obtenons

$$\cos\varphi = \frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2(ac+bd)}, \ldots\ldots \text{(XXIX)}$$

d'où nous tirons, en posant $a+b+c+d=2p$,

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\varphi &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac+bd}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}\varphi &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{ac+bd}}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(XXX)}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-c)}}; \ldots\ldots \text{(XXXI)}$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ac+bd}. \ldots \text{(XXXII)}$$

Cette dernière expression étant divisée par (XXIX), donne

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{a^2-b^2+c^2-d^2}. \ldots \text{(XXXIII)}$$

Ces expressions ont été données en partie par M. **Sturm** dans les Annales de Mathématiques de Gergonne, Tome XIII (1822—23), page 314.

27. **Angles des côtés adjacents.** Les valeurs de ces angles

en fonction des côtés sont connues en grande partie. Pour l'un d'eux, l'angle A, par exemple, elles sont:

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\text{XXXIV})$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}, \\ \sin A &= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}, \\ \operatorname{tang} A &= \frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{a^2+b^2-c^2-d^2}. \end{aligned}\right\} \ldots (\text{XXXV})$$

28. **Angles compris entre les côtés opposés.** L'angle E formé par les côtés a et c, est le supplément de la somme des angles A et B; par conséquent, nous avons

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B;$$

remplaçant les facteurs du second membre par leurs valeurs, on obtient

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{(p-a)(p-c)(p-d)^2} - \sqrt{(p-a)(p-c)(p-b)^2}}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}E = (b-d)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(ab+cd)(ad+bc)}}. \quad . \; . \, (\text{XXXVI})$$

On trouverait pareillement que

$$\sin\tfrac{1}{2}F = (a-c)\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(ab+cd)(ad+bc)}}; \ldots (\text{XXXVII})$$

puis

$$\left.\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}E &= (b+d)\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(ab+cd)(ad+bc)}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}F &= (a+c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(ab+cd)(ad+bc)}}; \end{aligned}\right\} \quad (\text{XXXVIII})$$

d'où on tire

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E&=\frac{b-d}{b+d}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}},\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F&=\frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (\text{XXXIX})$$

Ces valeurs donnent

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\cos\frac{1}{2}F}&=\frac{b-d}{a+c},\\ \frac{\sin\frac{1}{2}F}{\cos\frac{1}{2}E}&=\frac{a-c}{b+d};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (\text{XL})$$

et

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{b+d}{b-d}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E=\frac{a-c}{a+c}\cot\tfrac{1}{2}F.\quad\ldots\ (\text{XLI})$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}F=\frac{(a-c)(b-d)}{(a+c)(b+d)}=\frac{x-y}{x+y}.\quad\ldots\ (\text{XLII})$$

Cette dernière égalité prouve que

Théorème I. La différence des diagonales divisée par leur somme, est égale au produit des tangentes des demi-angles compris entre les côtés opposés.

Au moyen des valeurs précédentes il est aisé de trouver que

$$\left.\begin{aligned}\sin E&=\frac{2(b^2-d^2)}{(ab+cd)(ad+bc)}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\\ \sin F&=\frac{2(a^2-c^2)}{(ab+cd)(ad+bc)}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};\end{aligned}\right\}(\text{XLII}')$$

$$\left.\begin{aligned}\cos E&=\frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)(b^2+d^2)+4(ac+bd)bd}{2(ab+cd)(ad+bc)},\\ \cos F&=\frac{-(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2+c^2)+4(ac+bd)ac}{2(ab+cd)(ad+bc)};\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (\text{XLIII})$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}E&=\frac{4(b^2-d^2)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{(a^2-b^2+c^2-d^2)(b^2+d^2)+4(ac+bd)bd},\\ \operatorname{tang}F&=\frac{4(a^2-c^2)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2+c^2)+4(ac+bd)ac}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (\text{XLIV})$$

Les formules (XLII) donnent

$$\frac{\sin E}{\sin F}=\frac{b^2-d^2}{a^2-c^2},\quad\ldots\ldots\ldots\ (\text{XLV})$$

d'où on déduit

$$\frac{\sin E}{b^2-d^2}=\frac{\sin F}{a^2-c^2}=\frac{\sin E+\sin F}{a^2+b^2-c^2-d^2}=\frac{\sin E-\sin F}{-a^2+b^2+c^2-d^2};$$

or on a, d'après (XXXV),

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos A,$$
$$-a^2+b^2+c^2-d^2=2(ad+bc)\cos D;$$

il vient donc, en substituant,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin E+\sin F}{ab+cd}&=\frac{2\sin E\cos A}{b^2-d^2},\\ \frac{\sin E-\sin F}{ad+bc}&=\frac{2\sin F\cos D}{a^2-c^2}.\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ (\text{XLVI})$$

28 bis. **Angles formés par les côtés et les diagonales.** Le triangle AGD nous donne

$$\frac{\sin DAG}{y_1}=\frac{\sin ADG}{x_1}=\frac{\sin AGD}{a},$$

d'où nous tirons, par substitution,

$$\left.\begin{aligned}\sin DAC=\sin DBC&=2d\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}},\\ \sin ADB=\sin ACB&=2b\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}.\end{aligned}\right\}(\text{XLVII})$$

De ces valeurs on déduit

$$\left.\begin{aligned}\cos DAC=\cos DBC&=\frac{d(a^2+b^2+c^2-d^2)+2abc}{2\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}},\\ \cos ADB=\cos ACB&=\frac{b(a^2+c^2+d^2-b^2)+2acd}{2\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}};\end{aligned}\right\}(\text{XLVIII})$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned}\tan DAC=\tan DBC&=\frac{4d\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{d(a^2+b^2+c^2-d^2)+2abc},\\ \tan ADB=\tan ACB&=\frac{4b\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{b(a^2+c^2+d^2-b^2)+2acd}.\end{aligned}\right\}(\text{XLIX})$$

29. **Segments des côtés.** La similitude des deux triangles ABE, CDE donne immédiatement

$$\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD},$$

ou

$$\frac{a'}{c'} = \frac{c'+c}{a'-a} = \frac{b}{d},$$

en posant $AE = a'$, $CE = c'$; on en déduit les deux équati

$$da' - bc' = 0,$$

$$ba' - dc' = ab + cd;$$

dont la résolution donne

$$a' = \frac{b(ab+cd)}{b^2-d^2}, \quad c' = \frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2}. \quad \ldots\ldots$$

En posant

$$AF = b', \quad CF = d';$$

$$DE = a'', \quad BE = c'';$$

$$BF = b'', \quad DF = d'';$$

on trouverait semblablement

$$b' = \frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}, \quad d' = \frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2}; \quad \ldots\ldots (\mathrm{I}$$

$$\left.\begin{aligned} a'' &= \frac{d(ad+bc)}{b^2-d^2}, \quad c'' = \frac{b(ad+bc)}{b^2-d^2}; \\ b'' &= \frac{c(ad+bc)}{a^2-c^2}, \quad d'' = \frac{a(ad+bc)}{a^2-c^2}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{L}$$

30. Relations entre les côtés et leurs segments. Si nous co binons entre elles les quatre premières valeurs, nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} a'b'+c'd' &= \frac{(ab+cd)^3}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}, \\ a'b'-c'd' &= \frac{(ab-cd)(ab+cd)^2}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}; \\ a'd'+b'c' &= \frac{(ab+cd)^2(ad+bc)}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}, \\ a'd'-b'c' &= \frac{-(ad-bc)(ab+cd)^2}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}; \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{LI}$$

$$\left.\begin{aligned} a'c'+b'd' &= (ab+cd)^2\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right], \\ a'c'-b'd' &= -(ab+cd)^2\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} - \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]; \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{LI}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a'+c' = \dfrac{ab+cd}{b-d}, & a'-c' = \dfrac{ab+cd}{b+d}, \\ b'+d' = \dfrac{ab+cd}{a-c}, & b'-d' = \dfrac{ab+cd}{a+c}; \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(LV)}$$

en posant $a'+b'+c'+d' = 2p'$,

$$\left.\begin{array}{ll} a' = \dfrac{ab+cd}{(a-c)(b+d)}(p-a), & p'-c' = \dfrac{ab+cd}{(a-c)(b+d)}(p-c), \\ b' = \dfrac{ab+cd}{(a+c)(b-d)}(p-b), & p'-d' = \dfrac{ab+cd}{(a+c)(b-d)}(p-d); \end{array}\right\} \text{(LVI)}$$

$$\left.\begin{array}{l} p' = \dfrac{ab+cd}{(a-c)(b-d)}(p-c-d), \\ p'-b'-d' = \dfrac{ab+cd}{(a-c)(b-d)}(p-b-c), \\ p'-b'-c' = \dfrac{ab+cd}{(a+c)(b+d)}(p-b-d), \\ p'-c'-d' = \dfrac{ab+cd}{(a+c)(b+d)}p. \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(LVII)}$$

Les quatre dernières valeurs fournissent de même les rela-

$$\left.\begin{array}{l} a''b''+c''d'' = \dfrac{(ab+cd)(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}, \\ a''b''-c''d'' = -\dfrac{(ab-cd)(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}, \\ a''d''+b''c'' = \dfrac{(ad+bc)^3}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}, \\ a''d''-b''c'' = \dfrac{(ad-bc)(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}; \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(LVIII)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a''c''+b''d'' = (ad+bc)^2\left[\dfrac{ac}{(a^2-c^2)^2}+\dfrac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right], \\ a''c''-b''d'' = -(ad+bc)^2\left[\dfrac{ac}{(a^2-c^2)^2}-\dfrac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]; \end{array}\right\} \text{(LIX)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a''+c'' = \dfrac{ad+bc}{b-d}, & a''-c'' = -\dfrac{ad+bc}{b+d}, \\ b''+d'' = \dfrac{ad+bc}{a-c}, & b''-d'' = -\dfrac{ad+bc}{a+c}; \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(LX)}$$

$$\left.\begin{aligned} p''-a''&=\frac{ad+bc}{(a-c)(b+d)}(p-c), \quad p''-c''=\frac{ad+bc}{(a-c)(b+d)}(p-a),\\ p''-b''&=\frac{ad+bc}{(a+c)(b-d)}(p-d), \quad p''-d''=\frac{ad+bc}{(a+c)(b-d)}(p-b);\end{aligned}\right\}\text{(L}$$

$$\left.\begin{aligned} p''&=\frac{ad+bc}{(a-c)(b-d)}(p-c-d),\\ p''-c''-d''&=-\frac{ad+bc}{(a-c)(b-d)}p,\\ p''-b''-c''&=\frac{ad+bc}{(a+c)(b+d)}(p-a-c),\\ p''-b''-d''&=\frac{ad+bc}{(a+c)(b+d)}(p-b-c),\end{aligned}\right\}\ldots\text{(L}$$

où

$$2p''=a''+b''+c''+d''.$$

La comparaison de ces relations fournit les égalités

$$\left.\begin{aligned} \frac{ab+cd}{ad+bc}&=\frac{a'b'+c'd'}{a'd'+b'c'}=\frac{a''b''+c''d''}{a''d''+b''c''},\\ \frac{ab-cd}{ad-bc}&=-\frac{a'b'-c'd'}{a'd'-b'c'}=-\frac{a''b''-c''d''}{a''d''-b''c''},\\ \frac{a'c'+b'd'}{a'c'-b'd'}&=\frac{a''c''+b''d''}{a''c''-b''d''}.\end{aligned}\right\}\ldots\text{(LX}$$

31. Droite qui joint les milieux des diagonales. Cette dr[oite] est fournie par l'égalité

$$x^2+y^2+4r^2=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Or, si nous mettons en évidence la somme des carrés des cô[tés] dans la valeur de x^2 et que nous ajoutions au résultat la val[eur] de y^2, nous trouvons

$$x^2+y^2=a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}{(ab+cd)(ad+bc)}.\ \text{(LX}$$

Il vient donc

$$4r^2=\frac{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}{(ab+cd)(ad+bc)}.\ \ldots\ \text{(L}$$

32. Troisième diagonale. Le triangle AEF donne

$$z^2=AE^2+AF^2-2AE.AF.\cos EAF$$

ou

$$z^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos A;$$

or nous avons trouvé (nº 29)

$$a' = \frac{b(ab+cd)}{b^2-d^2}, \quad b' = \frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2},$$

et (nº 27)

$$2\cos A = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ab+cd};$$

si donc nous substituons dans l'equation précédente, nous obtenons

$$\frac{z^2}{(ab+cd)^2} = \frac{b^2}{(b^2-d^2)^2} + \frac{a^2}{(a^2-c^2)^2} - \frac{ab(a^2+b^2+c^2+d^2)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)(ab+cd)}$$

et, en réduisant,

$$\frac{z^2}{(ab+cd)(ad+bc)} = \frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}, \quad . \quad (\text{LXVI})$$

ce qu'on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{[(ab+cd)^2-(ad+bc)^2]^2}{(ab+cd)(ad+bc)} = \frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{z^2}. \quad (\text{LXVII})$$

33. Segments de la troisième diagonale. Les deux triangles AEH, AFH ayant même hauteur et un côté commun AH, donnent

$$\frac{EH}{FH} = \frac{AEH}{AFH} = \frac{AE.\sin EAH}{AF.\sin FAH} = \frac{a'\sin(a,\ x)}{b'\sin(b,\ x)};$$

mais on a par les formules (L) et (LI), (XLVII)

$$\frac{a'}{b'} = \frac{b(a^2-c^2)}{a(b^2-d^2)}, \quad \frac{\sin(a,\ x)}{\sin(b,\ x)} = \frac{d}{c};$$

il vient donc

$$\frac{z'}{z''} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{bd(a^2-c^2)}{ac(b^2-d^2)},$$

en posant $EH = z'$, $FH = z''$, $EK = z_1$, $FK = z_2$.

De ces égalités on tire

$$\frac{z'}{bd(a^2-c^2)} = \frac{z''}{ac(b^2-d^2)} = \frac{z'+z''}{bd(a^2-c^2)+ac(b^2-d^2)}$$

$$= \frac{z}{bd(a^2-c^2)+ac(b^2-d^2)},$$

$$\frac{z_1}{bd(a^2-c^2)}=\frac{z_2}{ac(b^2-d^2)}=\frac{z_1-z_2}{bd(a^2-c^2)-ac(b^2-d^2)}$$
$$=\frac{z}{bd(a^2-c^2)-ac(b^2-d^2)}.$$

Si, dans ces valeurs, nous remplaçons z par sa valeur (LXVI), nous trouverons

$$\left.\begin{aligned} z'^2&=\frac{ab+cd}{ad+bc}\times\frac{b^2d^2}{(b^2-d^2)^2}\times\frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{(ab-cd)^2},\\ z''^2&=\frac{ab+cd}{ad+bc}\times\frac{a^2c^2}{(a^2-c^2)^2}\times\frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{(ab-cd)^2};\end{aligned}\right\}\text{(LXVIII)}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1^2&=\frac{ad+bc}{ab+cd}\times\frac{b^2d^2}{(b^2-d^2)^2}\times\frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{(ad-bc)^2},\\ z_2^2&=\frac{ad+bc}{ab+cd}\times\frac{a^2c^2}{(a^2-c^2)^2}\times\frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{(ad-bc)^2}.\end{aligned}\right\}\text{(LXIX)}$$

34. Côtés du triangle formé par les trois diagonales. Les trois côtés du triangle GHK sont

$$X=x_1-x'=\frac{abx}{ab-cd}-\frac{abx}{ab+cd}=\frac{2abcdx}{a^2b^2-c^2d^2},$$

$$Y=y_1-y'=\frac{ady}{ad-bc}-\frac{ady}{ad+bc}=\frac{2abcdy}{a^2d^2-b^2c^2},$$

$$Z=z_1-z'=\frac{bd(a^2-c^2)z}{(ab+cd)(ad-bc)}-\frac{bd(a^2-c^2)z}{(ad+bc)(ab-cd)}$$
$$=\frac{2abcd(a^2-c^2)(b^2-d^2)z}{(a^2b^2-c^2d^2)(a^2d^2-b^2c^2)};$$

remplaçant x, y, z par leurs valeurs (XXIII), (LXVI), on obtient

$$\left.\begin{aligned} X^2&=\frac{4a^2b^2c^2d^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}\times\frac{1}{(ab-cd)^2},\\ Y^2&=\frac{4a^2b^2c^2d^2(ac+bd)}{(ab+cd)(ad+bc)}\times\frac{1}{(ad-bc)^2},\\ Z^2&=\frac{4a^2b^2c^2d^2}{(ab+cd)(ad+bc)}\times\frac{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2}{(ab-cd)^2(ad-bc)^2}.\end{aligned}\right\}\text{(LXX)}$$

Ces valeurs donnent

$$\left.\begin{aligned}\frac{X}{x}&=\frac{2abcd}{(ab+cd)(ab-cd)},\\ \frac{Y}{y}&=\frac{2abcd}{(ad+bc)(ad-bc)},\\ \frac{Z}{2r}&=\frac{2abcd}{(ab-cd)(ad-bc)}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\text{(LXX bis)}$$

35. Angles du triangle formé par les diagonales. Nous connaissons déjà l'angle φ; il nous reste à calculer les deux angles $GHK=\psi$, $GKH=\chi$.

Nous obtiendrons ces deux angles à l'aide de la formule (I) appliquée aux quadrilatères, l'un à angle rentrant et l'autre étoilé; nous avons donc

$$2xz\cos\psi=a'^2-b'^2+d'^2-c'^2,$$

$$2yz\cos\chi=c''^2-a''^2+b''^2-d''^2;$$

mettant, dans les seconds membres, à la place des termes, leurs valeurs tirées du n° 29, nous obtenons

$$2xz\cos\psi=\frac{(ab+cd)^2(a^2-b^2+d^2-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)},$$

$$2yz\cos\chi=\frac{(ad+bc)^2(a^2-b^2+d^2-c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)};$$

or on trouve facilement que

$$xz=\frac{ab+cd}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}\sqrt{(ac+bd)[bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2]},$$

$$yz=\frac{ad+bc}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}\sqrt{(ac+bd)[bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2]};$$

il vient donc

$$\left.\begin{aligned}\cos\psi&=\frac{ab+cd}{2\sqrt{ac+bd}}\times\frac{a^2-b^2+d^2-c^2}{\sqrt{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}},\\ \cos\chi&=\frac{ad+bc}{2\sqrt{ac+bd}}\times\frac{a^2-b^2+d^2-c^2}{\sqrt{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}.\end{aligned}\right\}\text{(LXXI)}$$

Ces deux formules donnent

$$y\cos\psi=x\cos\chi=\frac{a^2-b^2+d^2-c^2}{4r}\quad\ldots\text{(LXXI bis)}$$

c'est-à-dire que

Théorème II. **Les deux diagonales intérieures sont entre elles comme les cosinus de leurs inclinaisons sur la diagonale extérieure.**

Pour avoir les sinus de ces angles, il est plus avantageux d'avoir recours directement au triangle formé par les diagonales. Il donne

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}=\frac{Y}{Z}=\frac{(ab-cd)\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}},$$

$$\frac{\sin\chi}{\sin\varphi}=\frac{X}{Z}=\frac{(ad-bc)\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}};$$

en remplaçant $\sin\varphi$ par sa valeur (XXXII) du n° 26, on obtient

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi&=\frac{2(ab-cd)}{\sqrt{ac+bd}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}},\\ \sin\chi&=\frac{2(ad-bc)}{\sqrt{ac+bd}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}.\end{aligned}\right\}\text{(LXXII)}$$

La comparaison de ces valeurs donne

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\psi&=\frac{ab-cd}{ab+cd}\times\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{a^2-b^2+d^2-c^2},\\ \operatorname{tang}\chi&=\frac{ad-bc}{ad+bc}\times\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{a^2-b^2+d^2-c^2};\end{aligned}\right\}\text{(LXXIII)}$$

d'où on tire

$$\frac{\operatorname{tang}\psi}{\operatorname{tang}\chi}=\frac{(ab-cd)(ad+bc)}{(ab+cd)(ad-bc)}=\frac{bd(a^2-c^2)+ac(b^2-d^2)}{bd(a^2-c^2)-ac(b^2-d^2)}.\text{(LXXIV)}$$

36. **Inclinaisons de la diagonale extérieure sur les côtés.** Le triangle AEF donne

$$\frac{\sin AEF}{AF}=\frac{\sin AFE}{AE}=\frac{\sin EAF}{EF},$$

ou

$$\frac{\sin(a,\ z)}{b'}=\frac{\sin(b,\ z)}{a'}=\frac{\sin(a,\ b)}{z};$$

remplaçant les quantités connues par leurs valeurs, et effectuant, on obtient

$$
\left.\begin{aligned}
\text{ı}(a,\ z) &= \frac{2a(b^2-d^2)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}, \\
\text{ı}(b,\ z) &= \frac{2b(a^2-c^2)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (\text{LXXV})
$$

)n aurait de même

$$
\left.\begin{aligned}
\text{ı}(c,\ z) &= \frac{2c(b^2-d^2)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}, \\
\text{ı}(d,\ z) &= \frac{2d(a^2-c^2)}{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{bd(a^2-c^2)^2+ac(b^2-d^2)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (\text{LXXVI})
$$

7. Droites qui joignent les milieux des deux diagonales ures au milieu de la diagonale extérieure. Nous représen- ces deux diagonales par r' et r''. Les deux quadrilatères *FA, BEDFB*, l'un à angle rentrant et l'autre étoilé, nous nt d'abord en vertu du n^0 6

$$x^2+z^2+4r'^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

$$y^2+z^2+4r''^2 = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2; \quad . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

eu égard au n^0 12,

$$
\left.\begin{aligned}
2a'd'\cos(a,\ d) &= x^2+z^2-b'^2-c'^2, \\
2b'c'\cos(b,\ c) &= x^2+z^2-a'^2-d'^2;
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (7)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
-2a''b''\cos(a,\ b) &= y^2+z^2-c''^2-d''^2, \\
-2c''d''\cos(c,\ d) &= y^2+z^2-a''^2-b''^2.
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (8)
$$

djoutons membre à membre l'égalité (5) à chacune des éga- 7); nous obtenons, en réduisant,

$$
\left.\begin{aligned}
4r'^2 &= a'^2+d'^2-2a'd'\cos(a,\ d) \\
4r'^2 &= b'^2+c'^2-2b'c'\cos(b,\ c).
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (9)
$$

Si nous opérons de la même manière sur les égalités (8), nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} 4r''^2 = a''^2 + b''^2 + 2a''b''\cos(a, b), \\ 4r''^2 = c''^2 + d''^2 + 2c''d''\cos(c, d). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Cela posé, dans la première des relations (9) rempl a', d' et $\cos(a, d)$ par leurs valeurs nous trouvons, en effect

$$4r'^2 = \frac{(ab+cd)^3}{ad+bc}\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]. \quad . \text{(LXX}$$

Nous aurions de même, au moyen de l'une ou l'autre égalités (10)

$$4r''^2 = \frac{(ad+bc)^3}{ab+cd}\left[\frac{ac}{(a^2-c)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]. \quad . \text{(LXX}$$

Telles sont les valeurs des deux droites qui joignent les lieux des deux diagonales x, y à la diagonale z.

38. Représentons par $\frac{1}{\lambda^2}$ la fonction

$$\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2};$$

nous aurons pour z, r, r' r'' les expressions

$$z^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{\lambda^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(LX}$$

$$4r^2 = \frac{(a^2-c^2)^2(b^2-d^2)^2}{(ab+cd)(ad+bc)\lambda^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(LX}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4r'^2 = \dfrac{(ab+cd)^3}{(ad+bc)\lambda^2}, \\ 4r''^2 = \dfrac{(ad+bc)^3}{(ab+cd)\lambda^2}, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(LX}$$

Nous tirons de là

$$2r = \frac{(a+c)(a-c)(b+d)(b-d)}{(ab+cd)(ad+bc)} \times z; \quad . \quad . \quad . \text{(LXX}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2r' = \dfrac{ab+cd}{ad+bc} \times z, \\ 2r'' = \dfrac{ad+bc}{ab+cd} \times z. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(LXX}$$

39. Nous savons que

$$\frac{ab+cd}{ad+bc}=\frac{x}{y};$$

n substituant cette valeur dans les deux expressions précédentes, ous obtenons

$$2r'=\frac{xz}{y},\quad 2r''=\frac{yz}{x}\quad \ldots\ldots (\text{LXXXIV})$$

'où nous tirons

$$\frac{r'}{r''}=\frac{x^2}{y^2}.\quad \ldots\ldots\ldots (\text{LXXXV})$$

Donc

Théorème II. **Dans tout quadrilatère inscriptible onvexe les carrés des deux diagonales intérieures ont entre eux comme les droites qui joignent leurs ilieux au milieu de la diagonale extérieure.**

40. L'équation (LXXXII) peut encore s'écrire

$$2r=\frac{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}{(ab+cd)(ad+bc)}\times z,$$

u

$$\frac{2r}{z}=\frac{ab+cd}{ad+bc}-\frac{ad+bc}{ab+cd};\quad \ldots\ldots (\text{LXXXVI})$$

n en déduit

$$\frac{2r}{z}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x},$$

'où

$$z=\frac{2xyr}{x^2-y^2}.\quad \ldots\ldots (\text{LXXXVII})$$

Ainsi

Théorème II. **Dans tout quadrilatère inscriptible onvexe, la diagonale extérieure est égale au proluit des deux diagonales intérieures, multiplié par a double droite qui joint les milieux de ces diagonales, t divisé par la difference des carrés des mêmes diaonales.**

41. Puisque

$$\frac{2r}{z}=\frac{x}{y}-\frac{y}{x},\quad \frac{2r'}{z}=\frac{x}{y},\quad \frac{2r''}{z}=\frac{y}{x},$$

n a

$$r=r'-r'';$$

onc les milieux des trois diagonales sont en ligne droite, ce ui est confirmé par la Géométrie.

42. Les deux valeurs (LXXXIV) donnent encore

$$4r'r'' = z^2, \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{LXXXV}$$

c'est-à-dire que

Théorème III. Dans tout quadrilatère inscripti[ble] convexe la diagonale extérieure est moyenne pr[o]portionelle entre les doubles des deux droites q[ui] joignent son milieu aux points milieux des deux diag[o]nales intérieures.

43. Les équations du n⁰ 38 donnent encore

$$\left.\begin{array}{l} r' = \sqrt{z^2+r^2}+r, \\ r'' = \sqrt{z^2+r^2}-r. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (\mathrm{LXXXI}$$

44. **Aire du quadrilatère inscriptible convexe.** Cette s[ur]face est

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

qui peut s'sécrire

$$Q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad \ldots\ldots (\mathrm{X}$$

Si nous comparons cette expression avec les valeurs (XXX[I]) (XXXII), (XLII), nous obtenons les expressions

$$Q = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin A = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin B = \tfrac{1}{2}(ac+bd)\sin\varphi, \ (\mathrm{X}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}.\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(b+d)(b-c)}\cdot\sin E = \tfrac{1}{2}.\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(a-c)}\cdot\sin F. (\mathrm{XC}$$

45. **Aire du quadrilatère inscriptible étoilé.** Cette surfa[ce] que nous désignerons par q, est donnée par la formule

$$q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(x^2+y^2-b^2-d^2)^2}.$$

Mais on peut y arriver plus rapidement de la manière s[ui]vante. Les égalités

$$\frac{ABG}{x'y''} = \frac{CDG}{y'x''} = \frac{Q}{xy}$$

donnent

$$q = \frac{x'y''-y'x''}{xy}Q;$$

or on a par n⁰ 25

$$\frac{x'}{x} = \frac{ab}{ab+cd}, \quad \frac{x''}{x} = \frac{cd}{ab+cd},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{bc}{ad+bc}, \quad \frac{y''}{y} = \frac{ad}{ad+bc};$$

on tire

$$\frac{x'y''-y'x''}{xy} = \frac{(b^2-d^2)ac}{(ab+cd)(ad+bc)};$$

ient donc

$$q = \frac{(b^2-d^2)ac}{(ab+cd)(ad+bc)}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad \text{(XCIII)}$$

Le quadrilatère inscriptible étoilé, dont les deux diagonales nt b et d, a de même pour expression

$$q' = \frac{(a^2-c^2)bd}{(ab+cd)(ad+bc)}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad \text{(XCIV)}$$

46. Aire du quadrilatère ex-inscriptible à angle rentrant $BCE = Q'$. Nous avons

$$Q' = \tfrac{1}{2}a'b'\sin A - \tfrac{1}{2}c'd'\sin A = \tfrac{1}{2}(a'b'-c'd')\sin A,$$

comme

$$Q = \tfrac{1}{2}ab\sin A + \tfrac{1}{2}cd\sin A = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin A,$$

ient

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{a'b'-c'd'}{ab+cd} = \frac{a^2b^2-c^2d^2}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = \frac{(ab+cd)(ab-cd)}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}.$$

ous trouvons ainsi que

$$Q' = \frac{(ab+cd)(ab-cd)}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad \text{(XCV)}$$

47. Aire du quadrilatère ex-inscriptible étoilé $BEDFB$. La rface de ce quadrilatère est exprimée par la différence des deux iangles DEF, BEF; en la représentant par Q'', nous avons

$$Q = \tfrac{1}{2}a''d''\sin D - \tfrac{1}{2}b''c''\sin D = \tfrac{1}{2}(a''b''-c''d'')\sin D;$$

l'aire du quadrilatère convexe $ABCD$ est

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin D + \tfrac{1}{2}bc\sin D = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin D,$$

ous en tirons donc

$$\frac{Q''}{Q} = \frac{a''d''-b''c''}{ad+bc}.$$

on trouve au n° 25 que

$$a''d''-b''c''=\frac{(ad+bc)^2(ad-bc)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}=\frac{(ad+bc)^2(ad-bc)}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2};$$

il vient donc

$$Q''=\frac{(ad+bc)(ad-bc)}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.\ (X$$

48. **Comparaison des trois dernières formules.** Si nous prochons les valeurs de Q, Q', Q'', nous obtenons les égalit

$$\frac{Q}{(ab+cd)^2-(ad+bc)^2}=\frac{Q'}{(ab+cd)(ab-cd)}=\frac{Q''}{(ad+bc)(ad-bc)}.\ (XC$$

49. **Aire du triangle formé par les diagonales.** Ce trian que nous représenterons par T, est égal à $\frac{1}{2}XY\sin\varphi$, tandis q a $Q=\frac{1}{2}xy\sin\varphi$; nous avons, par conséquent, en ayant égard formules (LXX) et (XXIV),

$$\frac{T}{Q}=\frac{XY}{xy}=\frac{4a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2-c^2d^2)(a^2d^2-b^2c^2)},$$

d'où nous tirons

$$T=\frac{4a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2-c^2d^2)(a^2d^2-b^2c^2)}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.\ (XCV$$

En renversant le rapport précédent, on trouve que

$$\frac{Q}{T}=\frac{a^4b^2d^2+c^4b^2d^2-b^4a^2c^2-d^4a^2c^2}{4a^2b^2c^2d^2},$$

ou

$$\frac{Q}{T}=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{d^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{d^2}{b^2}\right).\ .\ .\ .\ .\ .\ (XC$$

50. Le rapport de Q à T peut aussi s'écrire

$$\frac{Q}{T}=\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{cd}-\frac{cd}{ab}\right)\left(\frac{ad}{bc}-\frac{bc}{ad}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x'}{x''}-\frac{x''}{x'}\right)\left(\frac{y'}{y''}-\frac{y''}{y'}\right)$$

ou

$$\frac{Q}{T}=\frac{xy(x'-x'')(y'-y'')}{4x'x''y'y''}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

51. Soit t le triangle formé par les deux diagonales i rieures x, y et la droite r qui joint leurs points milieux; on

$$t=\frac{1}{2}.\frac{x'-x''}{2}.\frac{y'-y''}{2}.\sin\varphi=\frac{(x'-x'')(y'-y'')}{4}.\frac{1}{2}\sin\varphi;$$

mais on a aussi

$$Q = xy.\tfrac{1}{2}\sin\varphi;$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{4xy}{(x'-x'')(y'-y'')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CI)}$$

On en déduit

$$\frac{Q^2}{Tt} = \frac{x^2y^2}{x'x''y'y''}, \quad \frac{t}{T} = \frac{(x'-x'')^2(y'-y'')^2}{16x'x''y'y''} \quad \ldots \quad \text{(CII)}$$

§. V. Quadrilatère inscriptible étoilé.

52. Considérons le quadrilatère inscriptible étoilé $CABDC$, lequel nous poserons les côtés

$$CA = a, \quad AB = b, \quad BD = c, \quad DC = d,$$

s diagonales

$$AD = x, \quad BC = y.$$

deux diagonales se coupent en E, et les côtés opposés AB D, AC et BD se rencontrent en F et en G, de sorte que $= z$ est la troisième diagonale.

3. Diagonales intérieures. Les deux triangles ADC, ADB uient sur la même base $AD = x$ et ont leurs angles au net ACD, ABD égaux entre eux; ils donnent

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos ACD,$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD.\cos ABD,$$

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos ACD,$$
$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos ACD;$$

nant l'angle ACD, on trouve

$$x^2 = \frac{(ab-cd)(ac-bd)}{bc-ad} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CIII)}$$

On obtiendrait semblablement

$$y^2 = \frac{(bc-ad)(ac-bd)}{ab-cd} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CIV)}$$

es valeurs donnent

$$xy = ac - bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ab-cd}{bc-ad} \quad \ldots\ldots \quad \text{(CV)}$$

ce qui prouve que

Théorème I. Dans tout quadrilatère inscripti[ble] étoilé, 1° le produit des diagonales est égal à la di[ffé]rence des produits des côtés opposés; 2° les deux [dia]gonales sont entre elles comme les différences [des] produits des côtés qui aboutissent aux extrémités [de] ces diagonales.

54. **Différence des carrés des diagonales.** Nous avons

$$x^2-y^2=\frac{(ab-cd)(ac-bd)}{bc-ad}-\frac{(bc-ad)(ac-bd)}{ab-cd}$$

$$=\frac{(ac-bd)[(ab-cd)^2-(bc-ad)^2]}{(ab-cd)(bc-ad)},$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$x^2-y^2=\frac{(ac-bd)(a^2-c^2)(b^2-d^2)}{(ab-cd)(bc-ad)}, \quad \ldots \ldots (C$$

d'où on tire

$$\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{a^2-c^2}{ab-cd}\times\frac{b^2-d^2}{bc-ad}. \quad \ldots \ldots (C$$

55. **Segments des diagonales intérieures.** Des sommets [A et] D supposons menées des perpendiculaires sur le côté BC [et] appelons ces perpendiculaires h' et h''; nous avons évidem[ment]

$$\frac{AE}{DE}=\frac{h'}{h''} \quad \text{ou} \quad \frac{x'}{x''}=\frac{h'}{h''};$$

or h' et h'' sont les hauteurs des deux triangles ABC, BCD [de] même base BC; nous avons par suite aussi

$$\frac{ABC}{BCD}=\frac{h'}{h''};$$

mais ces deux triangles ont leurs angles au sommet égaux[; il] vient donc

$$\frac{ABC}{BCD}=\frac{AC.AB}{BD.CD}=\frac{ab}{cd}.$$

Comparons les égalités précédentes, nous obtenons

$$\frac{x'}{x''}=\frac{ab}{cd};$$

d'où nous tirons

$$\frac{x'}{ab} = \frac{x''}{cd} = \frac{x'-x''}{ab-cd} = \frac{x}{ab-cd}.$$

Nous aurions de même

$$\frac{y'}{bc} = \frac{y''}{ad} = \frac{y'-y''}{bc-ad} = \frac{y}{bc-ad}.$$

Si nous substituons à x et y leurs valeurs (CIII) et (CIV), nous trouverons pour les segments des diagonales

$$\left.\begin{aligned} x'^2 &= \frac{a^2b^2(ac-bd)}{(ab-cd)(bc-ad)}, \\ x''^2 &= \frac{c^2d^2(ac-bd)}{(ab-cd)(bc-ad)}; \\ y'^2 &= \frac{b^2c^2(ac-bd)}{(ab-cd)(bc-ad)}, \\ y''^2 &= \frac{a^2d^2(ac-bd)}{(ab-cd)(bc-ad)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(CVIII)}$$

Ces valeurs démontrent que

Théorème II. **Dans tout quadrilatère inscriptible étoilé, les segments soustractifs des diagonales sont entre eux comme les produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de ces segments.**

Nous trouverons les segments additifs de la diagonale x par la proportion

$$\frac{x_1}{ab} = \frac{x_2}{cd} = \frac{x_1+x_2}{ab+cd} = \frac{x}{ab+cd},$$

qui donne

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{a^2b^2}{(ab+cd)^2} \times \frac{(ab-cd)(ac-bd)}{bc-ad}, \\ x_2^2 &= \frac{c^2d^2}{(ab+cd)^2} \times \frac{(ab-cd)(ac-bd)}{bc-ad}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(CIX)}$$

On aurait de même

$$\left.\begin{aligned} y_1^2 &= \frac{b^2c^2}{(ad+bc)^2} \times \frac{(bc-ad)(ac-bd)}{ab-cd}, \\ y_2^2 &= \frac{a^2d^2}{(ad+bc)^2} \times \frac{(bc-ad)(ac-bd)}{ab-cd}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(CX)}$$

56. Droite qui joint les milieux des diagonales. Dans la va-

leur (CIII) de x^2 mettons en évidence la somme des carrés des côtés; nous avons

$$x^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{bc(b^2+c^2)-ad(a^2+d^2)}{bc-ad},$$

si nous ajoutons la valeur (CIV) de y^2, nous trouverons, en réduisant

$$x^2+y^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{ac(b^2-d^2)^2-bd(a^2-c^2)^2}{(ab-cd)(bc-ad)};$$

il vient donc

$$4r^2 = \frac{ac(b^2-d^2)^2-bd(a^2-c^2)^2}{(ab-cd)(bc-ad)}. \quad \ldots \quad (CXI)$$

57. **Angle des diagonales.** Dans la formule

$$2xy\cos E = a^2-b^2+c^2-d^2$$

mettons à la place de xy sa valeur $ac-bd$; nous avons

$$\cos(x,\ y) = \frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2(ac-bd)}. \quad \ldots \quad (CXII)$$

Si nous posons $a+b+c-d=2p$, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(x,\ y) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac-bd}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(x,\ y) &= \sqrt{\frac{(p-b)(p+d)}{ac-bd}}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x,\ y) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p+d)}}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (CXIII)$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned} \sin(x,\ y) &= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p+d)}}{ac-bd}, \\ \operatorname{tang}(x,\ y) &= \frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p+d)}}{a^2-b^2+c^2-d^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \ (CXIV)$$

58. **Angles des côtés adjacents.** L'angle BAC, compris entre les côtés $AC=a$, $AB=b$, est donné par le triangle ABC, dont on tire

$$\cos(a,\ b) = \frac{a^2+b-y^2}{2ab},$$

et, en remplaçant y^2 par sa valeur (CIV),

$$\cos(a,\ b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}. \quad \ldots\ldots \text{(CXV)}$$

De cette expression on déduit de suite

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(a,\ b) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab-cd}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(a,\ b) &= \sqrt{\frac{(p-c)(p+d)}{ab-cd}}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a,\ b) &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p+d)}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(CXVI)}$$

59. Angles compris entre les côtés opposés. Nous avons 'angle $G = 180^0 - BAC - ABD$, ce qui donne

$$\sin\tfrac{1}{2}(a,\ c) = \cos\tfrac{1}{2}(a,\ b)\cos\tfrac{1}{2}(b,\ c) - \sin\tfrac{1}{2}(a,\ b)\sin\tfrac{1}{2}(b,\ c);$$

mettant dans le second membre les valeurs tirées de (CXVI), on obtient

$$\sin\tfrac{1}{2}(a,\ c) = (b+d)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(ab-cd)(bc-ad)}}. \quad \ldots \text{(CXVII)}$$

On trouverait de la même manière que

$$\cos\tfrac{1}{2}(a,\ c) = (b-d)\sqrt{\frac{(p-b)(p+d)}{(ab-cd)(bc-ad)}}; \quad . \text{(CXVIII)}$$

t, par suite,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a,\ c) = \frac{b+d}{b-d}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p+d)}}. \quad \ldots\ldots \text{(CXIX)}$$

On verrait, par le même procédé, que

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(b,\ d) &= (a-c)\sqrt{\frac{(p-b)(p+d)}{(ab-cd)(bc-ad)}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(b,\ d) &= (a+c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(ab-cd))bc-ad)}}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b,\ d) &= \frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{(p-b)(p+d)}{(p-a)(p-c)}}. \end{aligned}\right\} \quad . \text{(CXX)}$$

Ces valeurs donnent

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x,\ y) = \frac{b-d}{b+d}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a,\ c) = \frac{a-c}{a+c}\cot\tfrac{1}{2}(b,\ d); \quad \text{(CXXI)}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a,\ c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b,\ d) = \frac{(a-c)(b+d)}{(a+c)(b-d)} = \frac{x-y}{x+y}. \quad \text{(CXXII)}$$

Théorème III. Dans tout quadrilatère inscripti étoilé, la différence des diagonales divisée par l somme, est égale au produit des tangentes des de angles compris entre les côtés opposés.

60. Segments des côtés. Les deux triangles semblables *A* *CDG* donnent de suite

$$\frac{AG}{DG}=\frac{BG}{CG}=\frac{b}{d},$$

ou

$$\frac{a'}{c'}=\frac{c''}{a''}=\frac{b}{d},$$

d'où on tire

$$c'=\frac{a'd}{b},\quad c''=\frac{a''b}{d};$$

et, puisque $c'+c''=c$, $a'+a''=a$, il vient

$$a'=\frac{b(ab-cd)}{b^2-d^2},\quad c'=\frac{d(ab-cd)}{b^2-d^2};\ .\ .\ .\ (\text{CX}$$

et, ensuite

$$a''=\frac{d(bc-ad)}{b^2-d^2},\quad c''=\frac{b(bc-ad)}{b^2-d^2}.\ .\ .\ .\ (\text{CXX}$$

On trouverait de la même manière que

$$b'=\frac{a(ab-cd)}{a^2-c^2},\quad d'=\frac{c(ab-cd)}{a^2-c^2};\ .\ .\ .\ (\text{CX}$$

$$b''=\frac{c(bc-ad)}{a^2-c^2},\quad d''=\frac{a(bc-ad)}{a^2-c^2}.\ .\ .\ .\ (\text{CXX}$$

61. Relations entre les côtés et leurs segments. Ces relat s'obtiennent comme celles du n° 30, et sont:

$$\left.\begin{aligned}
a'b'-c'd'&=\frac{(ab-cd)^3}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2},\\
a'b'+c'd'&=\frac{(ab-cd)^2(ab+cd)}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2};\\
b'c'-a'd'&=\frac{(ab-cd)^2(ad-bc)}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2},\\
b'c'+a'd'&=\frac{(ab-cd)^2(ad+bc)}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2};\\
a'c'-b'd'&=\frac{(ab-cd)^2(bd-ac)}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2},\\
a'c'+b'd'&=\frac{(ab-cd)^2(ac+bd)}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2}.
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (\text{CXX}$$

Les autres relations s'obtiennent comme on a eu celles du n° 30.

62. **Troisième diagonale.** Elle est $FG = z$ et s'obtient au moyen du triangle AFG qui donne

$$z^2 = AG^2 + AF^2 - 2AG \cdot AF \cdot \cos(a, b);$$

il vient, par conséquent, en ayant égard aux valeurs (CXXIII), (CXXV) et (CXV),

$$z^2 = \frac{b^2(ab-cd)^2}{(b^2-d^2)^2} + \frac{a^2(ab-cd)^2}{(a^2-c^2)^2} - \frac{ab(ab-cd)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{z^2}{(ab-cd)(bc-ad)} = \frac{ac}{(a^2-c^2)^2} - \frac{bd}{(b^2-d^2)^2}; \quad \text{(CXXVIII)}$$

ce qu'on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{z^2}{(ab-cd)(bc-ad)} = \frac{ac(b^2-d^2)^2 - bd(a^2-c^2)^2}{[(ab-cd)^2-(bc-ad)^2]^2}; \text{(CXXIX)}$$

et en tenant compte de la valeur (CXI) de $4r^2$

$$\frac{z}{(ab-cd)(bc-ad)} = \frac{2r}{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2}. \quad \text{. . (CXXX)}$$

63. Nous laissons au lecteur le soin de calculer lui-même 1° les segments de la troisième diagonale, 2° les côtés du triangle formé par les trois diagonales, 3° les angles des diagonales, 4° les inclinaisons de la troisième diagonale sur les côtés, ainsi que 5° les droites qui joignent le milieu de cette diagonale aux milieux des deux autres; il trouvera des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus pour le quadrilatère inscriptible convexe. Il verra qu'il suffira de changer dans ceux-ci le signe de d, pour en déduire les premiers.

64. La relation (CXXX) pouvant s'écrire

$$\frac{(ab-cd)^2-(bc-ad)^2}{(ab-cd)(bc-ad)} = \frac{2r}{z}$$

ou

$$\frac{ab-cd}{bc-ad} - \frac{bc-ad}{ab-cd} = \frac{2r}{z},$$

on en déduit la relation

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{2r}{z}$$

ou

$$\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{2r}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{CXX}$$

entre les trois diagonales x, y, z et la droite r joint les milieux des deux premières.

65. Les droites r', r'' qui joignent le milieu de la diago z aux points milieux des deux diagonales x, y, sont fournies les relations

$$\left.\begin{aligned} 4r'^2 &= \frac{(ab-cd)^3}{bc-ad}\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2}-\frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right], \\ 4r''^2 &= \frac{(bc-ad)^3}{ab-cd}\left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2}-\frac{bd}{(b^2-d^2)^2}\right]; \end{aligned}\right\} (\text{CXX}$$

nous en tirons de suite, eu égard à la valeur (CXXVIII) de

$$2r'=\frac{ab-cd}{bc-ad}z, \quad 2r''=\frac{bc-ad}{ab-cd}z,$$

ou

$$2r'y=xz, \quad 2r''x=yz$$

et, par suite

$$z^2=4r'r'' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{CXXX}$$

Donc

Théorème IV. Dans tout quadrilatère inscripti étoilé, la demi-diagonale extérieure est moyenne p portionelle entre les droites qui joignent son milieu points milieux des deux autres diagonales.

66. Les deux égalités

$$\frac{x}{y}=\frac{2r'}{z}, \quad \frac{y}{x}=\frac{2r''}{z}$$

donnent

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{r'}{r''}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{CXXX}$$

ce qui prouve que

Théorème V. Dans tout quadrilatère inscripti étoilé, les carrés des deux diagonales intérieures s entre eux comme les droites qui joignent leurs poi milieux au milieu de la diagonale extérieure.

67. **Aire du quadrilatère inscriptible étoilé.** Cette sur est donnée par

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

où il suffira de mettre à la place de xy sa valeur $ac-bd$. Nous obtenons par substitution

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4(ac-bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2+c^2+2ac-b^2-d^2-2bd)(b^2+d^2-2bd-a^2-c^2+2ac)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(b+d)^2][(b-d)^2-(a-c)^2]}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+c-b-d)(b-d+a-c)(b-d-a+c)},$$

ou, en posant $a+b+c-d=2p$,

$$Q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p+d)}. \quad . \quad . \text{(CXXXV)}$$

68. Si le quadrilatère étoilé est en même temps **circonscriptible**, nous aurons l'égalité $a-c=b-d$, qui anéantira le facteur $a-b-c+d$ ou $b-d-a+c$; par conséquent Q deviendra nul, et la différence des deux triangles, s'appuyant sur la même diagonale et circonscrits par deux côtés du quadrilatère, est nulle. Donc

Théorème VI. Lorsqu'un quadrilatère étoilé est à la fois inscriptible et circonscriptible, les côtés et les diagonales comprennent entre eux quatre triangles, qui sont équivalents.

Le quadrilatère, dans ce cas, est nécessairement un rectangle.

§. VI. Quadrilatère ex-inscriptible à angle rentrant.

69. Le quadrilatère que nous considérons ici, est $AFCEA$, en conservant la même figure que précédemment. Nous représenterons par a', b', d', c' les quatre côtés consécutifs de ce quadrilatère et par x, z les deux diagonales, de telle sorte que

$$EA = a',\ AF = b',\ FC = d',\ CE = c';\ AC = x,\ EF = z.$$

Pour mieux rattacher la suite au quadrilatère inscriptible convexe, nous maintiendrons les notations

$$DA = a,\ AB = b,\ BC = c,\ CD = d;\ BD = y.$$

70. Segments des côtés. Les deux systèmes de triangles semblables ABE et CDE, ADF et BCF donnent

$$\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}, \quad \frac{AF}{CF}=\frac{DF}{BF}=\frac{AD}{BC},$$

ou

$$\frac{a'}{c'}=\frac{c'+c}{a'-a}=\frac{b}{d'}, \quad \frac{b'}{d'}=\frac{d'+d}{b'-b}=\frac{a}{c},$$

d'où on tire les deux systèmes d'équations

$$a'a+c'c=a'^2-c'^2, \quad b'b+d'd=b'^2-d'^2,$$

$$d'a-b'c=0; \qquad c'b-a'd=0;$$

entre les inconnues a et c, b et d.

Résolvant ces équations, on trouve

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{b'(a'^2-c'^2)}{a'b'+c'd'}, \quad b=\frac{a'(b'^2-d'^2)}{a'b'+c'd'}, \\ c&=\frac{d'(a'^2-c'^2)}{a'b'+c'd'}, \quad d=\frac{c'(b'^2-d'^2)}{a'b'+c'd'}. \end{aligned}\right\} \text{..(CXXX}$$

On aurait pareillement, en posant

$$ED=a'', \ DF=d'', \ FB=b'', \ BE=c'':$$

$$\left.\begin{aligned} a''&=\frac{c'(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}, \quad b''=\frac{d'(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}, \\ c''&=\frac{a'(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}, \quad d''=\frac{b'(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}. \end{aligned}\right\} \text{(CXXX}$$

71. Relations entre les côtés et leurs segments. Les qu premières valeurs donnent les égalités

$$\left.\begin{aligned} ab+cd&=\frac{(a'b'+c'd')^2-(a'd'+b'c')^2}{a'b'+c'd'}, \\ ab-cd&=\frac{a'b'-c'd'}{a'b'+c'd'}\times\frac{(a'b'+c'd')^2-(a'd'+b'c')^2}{a'b'+c'd'}; \\ ad+bc&=\frac{a'd'+b'c'}{a'b'+c'd'}\times\frac{(a'b'+c'd')^2-(a'd'+b'c')^2}{a'b'+c'd'}, \\ ad-bc&=\frac{b'c'-a'd'}{a'b'+c'd'}\times\frac{(a'b'+c'd')^2-(a'd'+b'c')^2}{a'b'+c'd'}; \\ ac+bd&=\frac{b'd'(a'^2-c'^2)^2+a'c'(b'^2-d'^2)^2}{(a'b'+c'd')^2}, \\ ac-bd&=\frac{b'd'(a'^2-c'^2)^2-a'c'(b'^2-d'^2)^2}{(a'b'+c'd')^2}; \end{aligned}\right\} \text{(CXXX}$$

$$\left.\begin{aligned} p-a &= \frac{(a'+c')(b'-d')}{a'b'+c'd'}(p'-a'), \\ p-b &= \frac{(a'-c')(b'+d')}{a'b'+c'd'}(p'-b'), \\ p-c &= \frac{(a'+c')(b'-d')}{a'b'+c'd'}(p'-c'), \\ p-d &= \frac{(a'-c')(b'+d')}{a'b'+c'd'}(p'-d'). \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CXXXVII}')$$

Les quatre dernières valeurs fournissent de même les relations

$$\left.\begin{aligned} a''b''+c''d'' &= \frac{(a'd'+b'c')^2}{a'b'+c'd'}, \\ a''b''-c''d'' &= \frac{(a'd'+b'c')^2}{(a'b'+c'd')^2}(c'd'-a'b'); \\ a''d''+b''c'' &= \frac{(a'd'+b'c')^3}{(a'b'+c'd')^2}, \\ a''d''-b''c'' &= \frac{(a'd'+b'c')^2}{(a'b'+c'd')^2}(b'c'-a'd'); \\ a''c''+b''d'' &= \frac{(a'd'+b'c')^2}{(a'b'+c'd')^2}(a'c'+b'd'), \\ a''c''-b''d'' &= \frac{(a'd'+b'c')^2}{(a'b'+c'd')^2}(a'c'-b'd'). \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CXXVIII})$$

$$\frac{p''-a''}{p'-c'} = \frac{p''-c''}{p'-a'} = \frac{p''-b''}{p'-d'} = \frac{p''-d''}{p'-b'} = \frac{p''}{p'} \ldots (\text{CXXXIX})$$

72. Calcul des diagonales x et z. Dans les expressions XIII) de x^2 et (LXVII) de z^2, substituons, au lieu des facteurs a, b, c, d, leurs valeurs en fonction de a', b', d', c'; nous ob- ons ainsi de suite les formules

$$x^2 = \frac{b'd'(a'^2-c'^2)^2+a'c'(b'^2-d'^2)^2}{(a'b'+c'd')(a'd'+b'c')},$$
$$z^2 = \frac{(a'c'+b'd')(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}; \quad \ldots\ldots\ldots (\text{CXL})$$

nt la seconde pourrait se trouver directement par la considéra- n immédiate de la figure.

Comme l'expression $b'd'(a'^2-c'^2)^2+a'c'(b'^2-d'^2)^2$ reviendra quemment dans nos calculs, nous la représenterons par k^6, de te que la valeur de x^2 pourra s'écrire

$$x^2 = \frac{k^6}{(a'b'+c'd')(a'd'+b'c')}. \quad \ldots\ldots (\text{CXLI})$$

73. Valeur de la droite qui joint les milieux des diagonales x, z. Dans la valeur de x^2 nous pouvons dégager la somme des côtés; nous trouvons ainsi que

$$\frac{k^6}{(a'b'+c'd')(a'd'+b'c')} = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2-\frac{(a'c'+b'd')(a'b'+c'd')}{a'd'+b'c'} -\frac{(a'c'+b'd')(a'd'+b'c')}{a'b'+c'd'}. \quad \text{(CXLII)}$$

De cette identité nous tirons

$$x^2+z^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2-\frac{(a'c'+b'd')(a'b'+c'd')}{a'd'+b'c'};$$

de sorte que

$$4r'^2 = \frac{(a'c'+b'd')(a'b'+c'd')}{a'd'+b'c'}. \quad \text{(CXLIII)}$$

74. Relation entre la diagonale z et la droite r' qui joint son milieu à celui de la diagonale x. Si nous multiplions et divisons successivement membre à membre les deux équations (CXLIII) et (CXL), nous trouverons que

$$\left.\begin{aligned} 2r'z &= a'c'+b'd', \\ \frac{2r'}{z} &= \frac{a'b'+c'd'}{a'd'+b'c'}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(CXLIV)}$$

On en conclut la proposition suivante:

Théorème. Si, dans le quadrilatère ex-inscriptible à angle rentrant $AECF$, on fait tourner le triangle différentiel CEF autour de la diagonale $EF = z$, pour le faire tomber en $C'EF$; le quadrilatère résultant $AEC'F$ étant inscriptible, la deuxième diagonale AC' de ce quadrilatère est égale au double de la droite r', qui joint les milieux des deux diagonales x, z du quadrilatère ex-inscriptible $AECF$; tandisque la droite, qui joint les points milieux des deux diagonales du quadrilatère inscriptible ainsi engendré, est égale à la moitié de la diagonale $AC = x$.

75. Valeur de la troisième diagonale y. Nous avons trouvé précédemmet (n° 24) que

$$\frac{y}{x} = \frac{ad+bc}{ab+cd};$$

ce qui donne, eu égard à (CXXXVI),

$$\frac{y}{x}=\frac{a'd'+b'c'}{a'b'+c'd'};$$

nous savons que

$$x^2=\frac{k^6}{(a'b'+c'd')(a'd'+b'c')};$$

r conséquent, il vient

$$y^2=\frac{a'd'+b'c'}{(a'b'+c'd')^3}\cdot k^6.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\text{CXLV})$$

76. **Relation entre les trois diagonales x, y, z.** Les deux pports $\frac{x}{y}$, $\frac{2r'}{z}$ ont la même valeur; ils sont donc égaux et onnent

$$\frac{xz}{y}=2r'.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\text{CXLVI})$$

77. **Droites qui joignent le milieu de la diagonale y aux ints milieux des deux diagonales x, z.** Nous avons trouvé au 39

$$2r''=\frac{yz}{x};$$

mplaçons $\frac{y}{x}$ par sa valeur obtenue au n° 76 et z^2 par la sienne n° 72, et nous aurons

$$4r''^2=\frac{(a'd'+b'c')^2}{(a'b'+c'd')^2}\times(a'c'+b'd').\ .\ .\ (\text{CXLVI bis})$$

Nous avons vu aussi au n° 40 que

$$4r^2=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2 z^2;$$

substituant leurs valeurs aux quantités du second membre nous btenons

$$4r^2=\frac{(a'^2-c'^2)^2(b'^2-d'^2)^2}{(a'b'+c'd')^3(a'd'+b'c')}\times(a'c'+b'd')\ldots(\text{CXLVII})$$

78. Il serait aisé de calculer les autres parties du quadrilare en valeur des côtés a', b', d', c'; il suffirait, pour cela, de ubstituer, dans les formules obtenues de n° 26 à n° 29 et de n° 33 à n° 37, au lieu des expressions en valeur de a, b, c, d, urs équivalentes fournies par les relations du n° 71. Nous laisons au lecteur le soin d'effectuer ces calculs, et, afin de lui faciliter les opérations, nous complétons les relations du n° 71 par es suivantes :

$$ac = \frac{b'd'(a'^2 - c'^2)^2}{(a'b' + c'd')^2}, \quad bd = \frac{a'c'(b'^2 - d'^2)^2}{(a'b' + c'd')^2}; ..(\text{CXLV}$$

$$\left.\begin{aligned} a+c &= \frac{(b'+d')(a'^2-c'^2)}{a'b'+c'd'}, \quad b+d = \frac{(a'+c')(b'^2-d'^2)}{a'b'+c'd'}, \\ a-c &= \frac{(b'-d')(a'^2-c'^2)}{a'b'+c'd'}, \quad b-d = \frac{(a'-c')(b'^2-d'^2)}{a'b'+c'd'}; \end{aligned}\right\} .(\text{CXL}$$

$$a^2-c^2 = \frac{(b'^2-d'^2)(a'^2-c'^2)^2}{(a'b'+c'd')^2}, b^2-d^2 = \frac{(a'^2-c'^2)(b'^2-d'^2)^2}{(a'b'+c'd')^2}; ...($$

$$bd(a^2-c^2)^2 + ac(b^2-d^2)^2$$

$$= \frac{(a'c'+b'd')[(a'b'+c'd')^2-(a'd'+b'c')^2]^4}{(a'b'+c'd')^6}. \quad . \quad . \quad .(\text{C}$$

79. Aire du quadrilatère ex-inscriptible à angle rentr
La surface Q' de ce quadrilatère est égale à la différence deux triangles AEF, CEF; il vient, par conséquent,

$$Q = \tfrac{1}{2}a'b'\sin A - \tfrac{1}{2}c'd'\sin C = \tfrac{1}{2}(a'b' - c'd')\sin A.$$

Or, si nous faisons tourner le triangle CEF autour de la b EF, pour le faire tomber au-dessous de cette ligne, le quadrila résultant sera inscriptible. En le désignant par Q_1', nous au donc

$$Q_1' = \sqrt{(p'-a')(p'-b')(p'-c')(p'-d')};$$

et, comme

$$Q_1' = \tfrac{1}{2}(AEF + CEF) = \tfrac{1}{2}(a'b' + c'd')\sin A,$$

il viendra

$$\tfrac{1}{2}\sin A = \frac{\sqrt{(p'-a')(p'-b')(p'-c')(p'-d')}}{a'b'+c'd'}.$$

Substituant cette valeur dans celle de Q', on obtient

$$Q' = \frac{a'b'-c'd'}{a'b'+c'd'}\sqrt{(p'-a')(p'-b')(p'-c')(p'-d')} ...(\text{C}$$

pour la formule demandée.

§. VII. Quadrilatère ex-inscriptible étoilé.

80. Le quadrilatère en question est $BFDEB$, dont représenterons les côtés par

$$BF = b'', \quad FD = d'', \quad DE = a'', \quad EB = c'',$$

par

$$BD = y, \quad EF = z, \quad AC = x$$

s trois diagonales. Nous conserverons toutes les autres notations des paragraphes V et VII.

81. Segments des côtés. Dans les égalités de rapports, qui trouvent au commencement du nº 70, remplaçons a', b', c', d' par leurs équivalents respectifs $a''+a$, $b''+b$, $c''-c$, $d''-d$; elles deviendront

$$\frac{a''+a}{c''-c} = \frac{c''}{a''} = \frac{b}{d}, \quad \frac{b''+b}{d''-d} = \frac{d''}{b''} = \frac{a}{c},$$

d'où nous tirons les deux systèmes d'équations

$$a''a+c''c = c''^2-a''^2, \quad b''b+d''d = d''^2-b''^2,$$

$$b''a-d''c = 0; \qquad a''b-c''d = 0;$$

entre les inconnues a et c, b et d. Si nous résolvons ces deux systèmes, nous trouvons les valeurs

$$\left.\begin{array}{ll} a = \dfrac{d''(c''^2-a''^2)}{a''d''+b''c''}, & b = \dfrac{c''(d''^2-b''^2)}{a''d''+b''c''}, \\ c = \dfrac{b''(c''^2-a''^2)}{a''d''+b''c''}, & d = \dfrac{a''(d''^2-b''^2)}{a''d''+b''c''}. \end{array}\right\} \quad . \ . \ (\text{CLIII})$$

On obtiendrait semblablement

$$\left.\begin{array}{ll} a' = \dfrac{c''(a''b''+c''d'')}{a''d''+b''c''}, & b' = \dfrac{d''(a''b''+c''d'')}{a''d''+b''c''}, \\ c' = \dfrac{a''(a''b''+c''d'')}{a''d''+b''c''}, & d' = \dfrac{b''(a''b''+c''d'')}{a''d''+b''c''}. \end{array}\right\} \ldots (\text{CLIV})$$

82. Valeurs des deux diagonales y, z. Par les deux triangles BEF, DEF on trouve de suite la valeur

$$z^2 = \frac{(a''c''+b''d'')(a''b''+c''d'')}{a''d''+b''c''}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\text{CLV})$$

pendant que celle de y^2 s'obtient, en substituant dans l'expression (XXIII) du nº 24, au lieu des trois facteurs, leurs valeurs tirées des formules (CLIII). On trouve ainsi que cette valeur est

$$y^2 = \frac{b''d''(c''^2-a''^2)^2+a''c''(d''^2-b''^2)^2}{(a''b''+c''d'')(a''d''+b''c'')}. \quad . \ . \ . \ (\text{CLVI})$$

83. Droite qui joint les milieux des deux diagonales y et z. À l'aide de ces deux valeurs, nous trouvons facilement que

$$y^2+z^2 = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2-\frac{(a''c''+b''d'')(a''d''+b''c'')}{a''b''+c''d''};$$

il nous viendra donc

$$4r''^2 = \frac{(a''c''+b''d'')(a''d''+b''c'')}{a''b''+c''d''}. \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(CL}$$

84. **Relations entre la diagonale z et la droite r'', qui joint le milieu à celui de la diagonale y.** Multiplions membr membre les deux égalités (CLV) et (CLVIII), puis divisons membre à membre, il nous vient

$$\left.\begin{aligned} 2r''z &= a''c''+b''d'', \\ \frac{2r''}{z} &= \frac{a''d''+b''c''}{a''b''+c''d''}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(CL}$$

De ce résultat on déduit la proposition suivante:

Théorème. Dans le quadrilatère ex-inscriptible éto *BEDFB*, si l'on fait tourner le triangle *BEF* autour la diagonale $EF=z$, pour le faire tomber en $B'EF$; quadrilatère résultant étant inscriptible, la deuxiè diagonale DB' de ce quadrilatère est égale au doul de la droite qui joint les milieux des deux diagonal y, z du quadrilatère ex-inscriptible *BEDFB*; pend que la droite, qui joint les points milieux des de diagonales z, DB' du quadrilatère inscriptible ai engendré, est égale à la moitié de la diagonale $BD=$

85. **Calcul de la troisième diagonale x.** Nous savons

$$\frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{a''b''+c''d''}{a''d''+b''c''}.$$

Multiplions le carré de ce rapport par la valeur supérieure de il nous vient

$$x^2 = \frac{a''b''+c''d''}{a''d''+b''c''} \times \frac{b''d''(c''^2-a''^2)^2+a''c''(d''^2-b''^2)^2}{(a''d''+b''c'')^2} \ldots \text{(CL}$$

86. On peut calculer les autres parties du quadrilatère, directement, soit au moyen des valeurs (CLIII).

87. **Aire du quadrilatère ex-inscriptible étoilé.** La sur de ce quadrilatère est égale à la différence des deux trian *DEF*, *BEF*, dont les aires sont respectivement exprimées $\frac{1}{2}a''d''\sin B$, $\frac{1}{2}b''c''\sin D$; de cette sorte il vient

$$Q'' = \tfrac{1}{2}(b''c''-a''d'')\sin B.$$

Cela établi, faisons tourner le triangle BEF autour de EF, ur le rabattre au-dessous de cette ligne. Le quadrilatère ré-ltant sera inscriptible; et, comme il est égal à la somme des eux triangles DEF, BEF, il viendra

$$\tfrac{1}{2}(b''c''+a''d'')\sin B = \sqrt{(p''-a'')(p''-b'')(p''-c'')(p''-d'')}.$$

Multipliant membre à membre les égalités obtenues, et di-isant par $b''c''+a''d''$, on trouve

$$Q'' = \frac{b''c''-a''d''}{b''c''+a''d''}\sqrt{(p''-a'')(p''-b'')(p''-c'')(p''-d'')}\text{....(CLX)}$$

§. VIII. Quadrilatère circonscriptible convexe.

88. Nous distinguerons six espèces de quadrilatères, auxquels puisse tracer un cercle qui touche à la fois les quatre côtés.

Dans les quadrilatères des trois premières espèces, le cercle t tangent intérieurement; nous les appellerons quadrila-res circonscriptibles. Ce sont(*) le quadrilatère convexe, quadrilatère à angle rentrant et le quadrilatère étoilé. Le rcle inscrit est tout entier situé dans le quadrilatère convexe ui appartient à ces espèces.

Dans les trois autres espèces, le cercle est tangent ex-érieurement; nous les nommerons quadrilatères ex-circon-criptibles. Ce sont encore(*) le quadrilatère convexe, le qua-rilatère à angle rentrant et le quadrilatère étoilé. Ici le cercle st extérieur au quadrilatère convexe qui appartient à ces trois spèces; c'est-à-dire qu'il est ex-inscrit.

89. Dans les deux quadrilatères circonscriptibles, un convexe et l'autre à angle rentrant, la somme de eux côtés opposés est égale à la somme des deux utres côtés.

90. Dans le quadrilatère circonscriptible étoilé et ans chacun des trois quadrilatères ex-circonscrip-ibles, c'est au contraire la différence de deux côtés op-posés qui est égale à la différence des deux autres ôtés. Cette propriété a été signalée, pour les quadrilatères irconscriptibles étoilés, par M. **Steiner** dans le Journal de athématiques de Crelle, par une note qui a été reproduite ans les Nouvelles Annales de Mathématiques.

(*) Le Lecteur est encore prié de faire lui-même ces deux figures.

91. Un quadrilatère peut être à la fois circonscriptible ex-circonscriptible, c'est-à-dire qu'on peut mener deux cercl tangents aux quatre côtés du quadrilatère, l'un intérieurement l'autre extérieurement; mais, pour cela, il faut et il suffit, comm il est aisé de s'en assurer, que le quadrilatère soit *isoscèle*, o en d'autres termes, que les deux plus grands côtés soient égau entre eux, ainsi que les deux autres côtés. Les centres d deux cercles se trouvent alors situés sur la diagonale issue plus petit des angles qui enveloppent les cercles.

92. La connaissance des côtés ne suffit pas pour détermin un quadrilatère auquel on puisse tracer un cercle tangent: c on peut déprimer un quadrilatère circonscriptible, sans chang la grandeur des côtés, ce qui déplace les points de contact cercle inscrit, altère le rayon de ce cercle ainsi que les diag nales, et fait varier la grandeur des angles. Les quadrilatèr auxquels peut être mené un cercle qui touche les quatres côté sont complètement déterminés, lorsqu'on donne les segments com pris sur les côtés entre les sommets des angles et les points de contact de ces côtés.

93. Nous nous proposons de calculer avec ces données les divers éléments du quadrilatère. Nous désignerons par A, B, C D les points de contact des quatre côtés SP, PQ, QR, RS d quadrilatère circonscriptible convexe; nous poserons les côtés

$$SP = A,\ \ PQ = B,\ \ QR = C,\ \ RS = D;$$

nous ferons les segments tangentiels

$$PA = PB = \alpha,\ QB = QC = \beta,\ RC = RD = \gamma,\ SD = SA = \delta$$

nous représenterons par X, Y, Z les deux diagonales intérieur PR, QS et la diagonale extérieure MN, M et N désignant l points de rencontre des côtés opposés PS et QR, PQ et S enfin nous appellerons R_1 le rayon du cercle inscrit et P, Q, S, M, N les distances du centre O de ce cercle aux six somme du quadrilatère dont la surface sera représentée par Surf. Qd.

94. Relation entre les cotangentes des demi-angles d'un qu drilatère convexe. Soient momentanément $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ les quat angles d'un quadrilatère convexe; nous avons l'égalité

$$2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi,$$

qui donne

$$a + b = (\tfrac{1}{2}\pi - c) + (\tfrac{1}{2}\pi - d),$$

d'où on tire

$$\frac{\cot a + \cot b}{\cot a \cot b - 1} = \frac{\operatorname{tang} c + \operatorname{tang} d}{\operatorname{tang} c \operatorname{tang} d - 1} = \frac{\cot c + \cot d}{1 - \cot c \cot d};$$

assant les dénominateurs et transposant, on trouve

$$\cot a + \cot b + \cot c + \cot d$$

$$= \cot a \cot b \cot c + \cot a \cot b \cot d + \cot a \cot c \cot d$$
$$+ \cot b \cot c \cot d, \quad . \text{(CLXI)}$$

ui est la relation demandée.

95. **Rayon du cercle inscrit.** Les triangles rectangles APO, BQO, CRO, DSO donnent

$$\cot \tfrac{1}{2}(A,\, B) = \frac{\alpha}{R_1}, \quad \cot \tfrac{1}{2}(B,\, C) = \frac{\beta}{R_1}, \quad \text{etc.};$$

stituant ces valeurs dans la relation précédente, nous obtenons quation

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{R_1} = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{R_1{}^3},$$

laquelle nous déduisons, pour le rayon du cercle inscrit,

$$R_1{}^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(CLXII)}$$

Cette expression n'est qu'un cas particulier de la formule nérale que nous avons donnée dans les Nouvelles Annales Mathématiques, 2e série, Tome V, page 75, 1866, et s'applique au rayon d'un polygone circonscriptible d'un nombre elconque de côtés.

96. **Distances des quatre sommets au centre du cercle inscrit.** le triangle rectangle APO nous avons

$$PO^2 \text{ ou } P^2 = AO^2 + AP^2 = R_1{}^2 + \alpha^2;$$

ettant à la place de $R_1{}^2$ sa valeur (CLXII), nous trouvons

$$P^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$P^2 = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha + \delta)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = AB \cdot \frac{\alpha + \gamma}{A + C}$$

A et B sont les deux côtés qui aboutissent au sommet P. a donc les quatre valeurs

$$\left.\begin{aligned}
P^2 &= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = AB.\frac{\alpha+\gamma}{A+C},\\
Q^2 &= \frac{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = BC.\frac{\beta+\delta}{B+D},\\
R^2 &= \frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = CD.\frac{\gamma+\alpha}{C+A},\\
S^2 &= \frac{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = DA.\frac{\delta+\beta}{D+B};
\end{aligned}\right\}\ldots\text{(CL}$$

d'ou nous tirons

$$PQRS = ABCD \times \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}; \; . \; . \; . \; \text{(CL}$$

$$\frac{P^2}{R^2} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{Q^2}{S^2} = \frac{BC}{AD}; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(CL}$$

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{B}{D}, \quad \frac{PS}{QR} = \frac{A}{C} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(CL}$$

Donc

Théorème I. Dans tout quadrilatère circonscript convexe, 1° les côtés opposés sont entre eux comme produits des droites qui joignent leurs extrémité centre du cercle inscrit; 2° les carrés des droites joignent deux sommets opposés au centre du ce inscrit sont entre eux comme les produits des côtés aboutissent à ces sommets.

97. **Demi-angles du quadrilatère.** Considérons toujou triangle rectangle APO; il nous donne

$$\sin\tfrac{1}{2}(A,\ B) = \frac{OA}{OP} = \frac{R_1}{P},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A,\ B) = \frac{AP}{OP} = \frac{\alpha}{P};$$

si nous remplaçons P par sa valeur tirée de (CLXIII), et nous élevions au carré, nous obtenons de suite, et par anal

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}(A,\ B) &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(B,\ C) &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(C,\ D) &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(D,\ A) &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)};
\end{aligned}\right\}\ldots\text{(CLX}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\tfrac{1}{2}(A,B)&=\frac{\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}=\frac{\alpha^2}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{AB},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(B,C)&=\frac{\beta^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)}=\frac{\beta^2}{\beta+\delta}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{BC},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(C,D)&=\frac{\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}=\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{CD},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(D,A)&=\frac{\delta^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}=\frac{\delta^2}{\delta+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{DA};
\end{aligned}\right\}\text{(CLXVIII)}$$

d'où on déduit

$$\left.\begin{aligned}
\tan^2\tfrac{1}{2}(A,\ B)&=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
\tan^2\tfrac{1}{2}(B,\ C)&=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\beta^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
\tan^2\tfrac{1}{2}(C,\ D)&=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},\\
\tan^2\tfrac{1}{2}(D,\ A)&=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\delta^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.
\end{aligned}\right\}\text{(CLXIX)}$$

Les formules (CLXVII) donnent

$$\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(A,\ B)}{\sin^2\tfrac{1}{2}(C,\ D)}=\frac{CD}{AB},\quad \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(B,\ C)}{\sin^2\tfrac{1}{2}(D,\ A)}=\frac{DA}{BC};\qquad\text{(CLXX)}$$

c'est-à-dire que

Théorème II. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, les sinus des demi-angles opposés sont inversement proportionnels aux racines carrées des produits des côtés qui comprennent ces angles.

98. **Angles du quadrilatère.** Puisque

$$\sin(A,\ B)=2\sin\tfrac{1}{2}(A,\ B)\cos\tfrac{1}{2}(A,\ B),$$
$$\cos(A,\ B)=\cos^2\tfrac{1}{2}(A,\ B)-\sin^2\tfrac{1}{2}(A,\ B),$$

on a

$$\sin(A,\ B)=\frac{2\alpha\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)},\ \text{(CLXXI)}$$

$$\cos(A,\ B)=\frac{(\alpha^2-\alpha\gamma)(\beta+\delta)+(\alpha^2-\beta\delta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}.\qquad\text{(CLXXII)}$$

De l'égalité (CLXXI) on tire la proportion

$$\frac{\sin(A,\ B)}{\alpha}:\frac{\sin(C,\ D)}{\gamma}=\frac{(\gamma+\delta)(\gamma+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}=\frac{CD}{AB},\ \text{(CLXXIII)}$$

qui exprime que

Théorème III. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, les sinus des angles opposés, divisés respectivement par les segments tangentiels adjacents à ces angles, sont inversement proportionnels aux produits des cotés qui comprennent ces angles.

99. Divisons membre à membre les deux premières des égalités (CLXXIII) et (CLXX); nous obtenons

$$\frac{\gamma \sin(A, B)}{\alpha \sin(C, D)} : \frac{\sin^2\frac{1}{2}(A, B)}{\sin^2\frac{1}{2}(C, D)} = 1,$$

d'où nous tirons les relations

$$\frac{\sin(A, B)}{\alpha \sin^2\frac{1}{2}(A, B)} = \frac{\sin(C, D)}{\gamma \sin^2\frac{1}{2}(C, D)},$$

$$\frac{\sin(B, C)}{\beta \sin^2\frac{1}{2}(B, C)} = \frac{\sin(D, A)}{\delta \sin^2\frac{1}{2}(D, A)}; \quad . \; . \; . \quad \text{(CLXXIV)}$$

qui prouvent que

Théorème IV. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, les sinus des angles opposés, divisés respectivement par les segments tangentiels qui comprennent ces angles, sont directement proportionnels aux carrés des sinus de la moitié des mêmes angles.

100. **Demi-angles formés par les côtés opposés.** Dans le triangle PQM on a l'égalité

$$P + Q + M = \pi,$$

qui donne

$$\tfrac{1}{2}M = \tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}(A, C) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(A, B) - \tfrac{1}{2}(B, C);$$

de celle-ci on tire

$$\sin\tfrac{1}{2}(A, C) = \cos\tfrac{1}{2}(A, B)\cos\tfrac{1}{2}(B, C) + \sin\tfrac{1}{2}(A, B)\sin\tfrac{1}{2}(B, C).$$

Mettons, dans le second membre, à la place des sinus et cosinus de (A, B) et (B, C) leurs valeurs tirées de (CLXVII) et (CLXVIII); nous obtenons

$$\sin\tfrac{1}{2}(A, C) = \frac{\alpha\delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}};$$

le numérateur se réduit à $(\alpha+\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)$, et le dénominateur peut s'écrire $(\alpha+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}$; nous avons par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(A,\,C) &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}},\\ \sin\tfrac{1}{2}(B,\,D) &= \frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}}.\end{aligned}\right\}\text{(CLXXV)}$$

On trouverait semblablement

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\tfrac{1}{2}(A,\,C) &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}(B,\,D) &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)};\end{aligned}\right\}\text{(CLXXVI)}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(A,\,C) &= \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)},\\ \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(B,D) &= \frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}.\end{aligned}\right\}\text{(CLXXVII)}$$

La comparaison de ces deux dernières valeurs donne

$$\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A,\,C)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B,\,D)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\beta-\gamma\delta}. \quad .\ .\ .\ .\ \text{(CLXXVIII)}$$

Cette relation peut se traduire de la manière suivante:

Théorème V. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, les tangentes de la moitié des angles compris entre les côtés opposés, sont entre elles comme les différences des produits qu'on obtient, en multipliant entre eux les segments de chacun des deux côtés opposés qui comprennent l'angle.

101. Angles compris entre les côtés opposés. Les valeurs (CLXXV) et (CLXXVI) donnent immédiatement

$$\left.\begin{aligned}\sin(A,C) &= \frac{2(\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)},\\ \sin(B,D) &= \frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)};\end{aligned}\right\}\text{(CLXXIX)}$$

qui donnent

$$\frac{\sin(A,\,C)}{\sin(B,\,D)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\beta-\gamma\delta}\times\frac{AC}{BD}. \quad .\ .\ .\ .\ \text{(CLXXX)}$$

102. Distances du centre du cercle inscrit aux points de concours des côtés opposés. On a par le triangle rectangle AMO,

$$MO = \frac{AO}{\sin AMO} \quad \text{ou} \quad M^2 = \frac{R_1^2}{\sin^2 \frac{1}{2}(A, C)};$$

remplaçant R_1^2 et $\sin^2 \frac{1}{2}(A, C)$ par leurs valeurs (CLXII) et (CLXXV), puis opérant de même pour N^2, on obtient

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= \frac{(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}, \\ N^2 &= \frac{(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)^2}. \end{aligned}\right\} \text{(CLXXXI)}$$

103. **Distances des points de contact du cercle inscrit aux points de concours des côtés opposés.** Le même triangle rectangle AMO donne

$$AM^2 = AO^2 . \cot^2 AMO = R_1^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}(A, C);$$

on en déduit, en mettant à la place de R_1^2 et $\cot^2 \frac{1}{2}(A, C)$ leurs valeurs et en faisant de même pour BN^2

$$\left.\begin{aligned} AM = CM &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ BN = DN &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta-\gamma\delta}. \end{aligned}\right\} \text{(CLXXXII)}$$

104. **Distances des quatre sommets du quadrilatère aux points de concours des côtés opposés.** On a

$$PM = PA + AM = \alpha + \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma},$$

d'où en effectuant et en appliquant le même calcul aux autres distances

$$\left.\begin{aligned} PM &= \frac{\delta(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ QM &= \frac{\gamma(\beta+\alpha)(\beta+\delta)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ RM &= \frac{\beta(\gamma+\alpha)(\gamma+\delta)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ SM &= \frac{\alpha(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}{\alpha\delta-\beta\gamma}; \end{aligned}\right\} \ldots \text{(CLXXXIII)}$$

$$\left.\begin{aligned}PN&=\frac{\beta(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}{\alpha\beta-\gamma\delta},\\QN&=\frac{\alpha(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha\beta-\gamma\delta},\\RN&=\frac{\delta(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}{\alpha\beta-\gamma\delta},\\SN&=\frac{\gamma(\delta+\beta)(\delta+\alpha)}{\alpha\beta-\gamma\delta}.\end{aligned}\right\}\ldots\quad\text{(CLXXXIV)}$$

De ces valeurs on tire

$$\left.\begin{aligned}PM-RM&=PN-RN=\alpha+\gamma,\\SM-QM&=QN-SN=\beta+\delta;\end{aligned}\right\}\ldots\text{(CLXXXV)}$$

$$\left.\begin{aligned}&PM-PN=RM-RN\\&=\frac{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)},\\&QN-SN=SM-SN\\&=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)};\end{aligned}\right\}\text{(CLXXXVI)}$$

$$\begin{aligned}&PM+RN=RM+PN\\&=\frac{\beta\delta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}.\end{aligned}\quad\text{(CLXXXVII)}$$

105. Surface du quadrilatère. La surface du quadrilatère convexe est Surf. Qd. $=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)R_1$; remplaçons R_1 par sa valeur et extrayons la racine carrée; nous aurons

$$\text{Surf. Qd.}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}.\quad\text{(CLXXXVIII)}$$

Autres expressions de la surface du quadrilatère. Dans la formule (CLXXI), remplaçons le radical par Surf. Qd., et résolvons par rapport à cette quantité; nous obtenons ainsi

$$\left.\begin{aligned}&\text{Surf. Qd.}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)\frac{\sin(A,B)}{2\alpha}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}.\tfrac{1}{2}AB.\sin(A,B)\\&=(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)\frac{\sin(B,C)}{2\beta}=\frac{\beta+\delta}{\beta}.\tfrac{1}{2}BC.\sin(B,C)\\&=(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)\frac{\sin(C,D)}{2\gamma}=\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}.\tfrac{1}{2}CD.\sin(C,D)\\&=(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)\frac{\sin(D,A)}{2\delta}=\frac{\beta+\delta}{\delta}.\tfrac{1}{2}DA.\sin(D,A).\end{aligned}\right\}\text{(CLXXXIX)}$$

Dans les expressions (CLXXVI) des $\cos^2\frac{1}{2}(A, C)$, $\cos^2\frac{1}{2}(B, D)$, mettons à la place du numérateur son équivalent $\overset{2}{\text{Surf.}}\,\text{Qd.}$; nous aurons encore

$$\left.\begin{aligned} \overset{2}{\text{Surf.}}\,\text{Qd.} &= \cos^2\tfrac{1}{2}(A, C)\times(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma) \\ &= \cos^2\tfrac{1}{2}(B, D)\times(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta), \\ \text{ou}\qquad & \\ \overset{2}{\text{Surf.}}\,\text{Qd.} &= \sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\times\sqrt{BD}.\cos\tfrac{1}{2}(A, C) \\ &= \sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\times\sqrt{AC}.\cos\tfrac{1}{2}(B, D). \end{aligned}\right\} \quad \text{(CXC)}$$

Cette dernière égalité prouve que

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}(A, C)}{\cos^2\frac{1}{2}(B, D)} = \frac{AC}{BD} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(CXCI)}$$

Donc

Théorème VI. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, les carrés des cosinus des demi-angles compris entre les côtés opposés, sont entre eux comme les produits de ces côtés.

Enfin mettons aussi $\overset{2}{\text{Surf.}}\,\text{Qd.}$ au lieu du dénominateur dans la valeur (CLXXVII) de $\tang^2\frac{1}{2}(A, C)$, puis extrayons la racine carrée; nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} \text{Surf. Qd.} &= (\alpha\delta-\beta\gamma)\cot\tfrac{1}{2}(A, C) \\ &= (\alpha\beta-\gamma\delta)\cot\tfrac{1}{2}(B, D). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; \text{(CXCII)}$$

Ainsi

Théorème VII. L'aire d'un quadrilatère circonscriptible convexe est égale à la cotangente de la moitié de l'angle compris entre deux côtés opposés, multipliée par la différence des produits qu'on obtient en multipliant entre eux les deux segments tangentiels de chacun des côtés qui comprennent l'angle.

106. **Diagonales intérieures.** Calculons d'abord la diagonale $PR = X$. Dans le triangle PQR on a

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ.QR.\cos(B, C)$$

ou

$$X^2 = (\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cos(B, C).$$

Au moyen de la formule analogue à (CLXXII), on trouve facilement que

$$2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\cos(B,C) = \frac{2(\beta^2-\beta\delta)(\alpha+\gamma)+2(\beta^2-\alpha\gamma)(\beta+\delta)}{\beta+\delta}$$
$$= \frac{2\beta(\beta-\delta)(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta} + 2\beta^2 - 2\alpha\gamma;$$

vient, par conséquent,

$$X^2 = (\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\gamma - \frac{2\beta(\beta-\delta)(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta};$$

r on a

$$(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\gamma = (\alpha+\gamma)^2 + 2\beta(\alpha+\gamma);$$

l s'ensuit donc que

$$X^2 = (\alpha+\gamma)^2 + 2\beta(\alpha+\gamma) - \frac{2\beta(\beta-\delta)(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta};$$

t comme

$$2\beta(\alpha+\gamma) - \frac{2\beta(\beta-\delta)(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta} = \frac{4\beta\delta(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta},$$

obtient définitivement

$$X^2 = (\alpha+\gamma)^2 + 4\beta\delta.\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{X^2}{\alpha+\gamma} &= \alpha+\gamma+\frac{4\beta\delta}{\beta+\delta}, \\ \frac{Y^2}{\beta+\delta} &= \beta+\delta+\frac{4\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\text{CXCIII})$$

107. Produit des diagonales. Les deux égalités (CXCIII) étant multipliées membre à membre, donnent

$$\frac{X^2Y^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)} = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) + 4(\alpha\gamma+\beta\delta) + \frac{16\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)},$$

e qui revient à

$$X^2Y^2 = [(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\alpha\gamma][(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\beta\delta]. \quad (\text{CXCIV})$$

108. Quotient des diagonales. En divisant (CXCIII) membre à membre, on obtient

$$\frac{X^2}{Y^2} = \frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\delta)^2} \times \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\beta\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\alpha\gamma}. \quad \ldots (\text{CXCV})$$

109. Segments des diagonales. Nous représenterons par X', X'' les deux segments additifs PU, RU de la diagonale $PR = X$, t par X_1, X_2 les deux segments soustractifs PV, RV de la éme diagonale.

Nous avons deux triangles AQS, QRS de même base Q
qui sont entre eux comme leurs hauteurs ou comme PU, R
mais ces deux triangles sont aussi entre eux dans le rapport
$PQ.PS.\sin(A, B)$ à $RQ.RS.\sin(C, D)$; il vient, par suite

$$\frac{X'}{X''} = \frac{AB.\sin(A, B)}{CD.\sin(C, D)};$$

mais l'égalité (CLXXIII) donne

$$\frac{\sin(A, B)}{\sin(C, D)} = \frac{CD}{AB} \times \frac{\alpha}{\gamma};$$

on a donc

$$\frac{X'}{X''} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{\gamma}; \quad \ldots\ldots\ldots \text{(CXC}$$

et, pareillement

$$\frac{Y'}{Y''} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\beta}{\delta}. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(CXCV}$$

Donc

Théorème VIII. Dans tout quadrilatère circonscri
tible convexe, les segments de chaque diagonale so
entre eux comme les segments adjacents des côtés q
aboutissent aux extrémités de cette diagonale.

Nous avons par (CXCVI)

$$\frac{X'}{\alpha} = \frac{X''}{\gamma} = \frac{X' + X''}{\alpha + \gamma} = \frac{X}{\alpha + \gamma},$$

$$\frac{X_1}{\alpha} = \frac{X_2}{\gamma} = \frac{X_1 - X_2}{\alpha - \gamma} = \frac{X}{\alpha - \gamma},$$

d'où nous tirons

$$X' = \frac{\alpha X}{\alpha + \gamma}, \quad X'' = \frac{\gamma X}{\alpha + \gamma};$$

$$X_1 = \frac{\alpha X}{\alpha - \gamma}, \quad X_2 = \frac{\gamma X}{\alpha - \gamma};$$

et, par suite, en remplaçant X par sa valeur (CXCIII)

$$\left.\begin{array}{l}
X'^2 = \alpha^2 + \dfrac{4\alpha^2\beta\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}, \\
X''^2 = \gamma^2 + \dfrac{4\gamma^2\beta\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}; \\
X_1^2 = \dfrac{\alpha^2(\alpha+\gamma)^2}{(\alpha-\gamma)^2} + \dfrac{4\alpha^2\beta\delta(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2(\beta+\delta)}, \\
X_2^2 = \dfrac{\gamma^2(\alpha+\gamma)^2}{(\alpha-\gamma)^2} + \dfrac{4\gamma^2\beta\delta(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2(\beta+\delta)}.
\end{array}\right\} \quad \text{(CXCV}$$

On aurait également

$$Y' = \frac{\beta Y}{\beta + \delta}, \quad Y'' = \frac{\delta Y}{\beta + \delta};$$

$$Y_1 = \frac{\beta Y}{\beta - \delta}, \quad Y_2 = \frac{\delta Y}{\beta - \delta};$$

puis

$$\left.\begin{aligned} Y'^2 &= \beta^2 + \frac{4\beta^2\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}, \\ Y''^2 &= \delta^2 + \frac{4\delta^2\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}; \\ Y_1^2 &= \frac{\beta^2(\beta+\delta)^2}{(\beta-\delta)^2} + \frac{4\beta^2\alpha\gamma(\beta+\delta)}{(\beta-\delta)^2(\alpha+\gamma)}, \\ Y_2^2 &= \frac{\delta^2(\beta+\delta)^2}{(\beta-\delta)^2} + \frac{4\delta^2\alpha\gamma(\beta+\delta)}{(\beta-\delta)^2(\alpha+\gamma)}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(CXCIX)}$$

110. Angle des diagonales. Dans l'égalité

$$2XY\cos U = A^2 - B^2 + C^2 - D^2$$

substituons à la place de A, B, C, D leurs équivalents $\delta + \alpha$, $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\gamma + \delta$; nous aurons

$$XY\cos U = (\alpha - \gamma)(\delta - \beta) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(CC)}$$

c'est-à-dire que

Théorème IX. Dans tout quadrilatère circonscriptible convexe, le produit des diagonales, multiplié par le cosinus de l'angle compris, est égal au produit des différences des segments opposés des côtés.

Puisque

$$XY\sin U = 2\,\text{Surf. Qd.},$$

il vient

$$\tang U = \frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)},$$

ou

$$\tang U = \frac{2\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}. \quad \text{(CCI)}$$

Si l'on compare les valeurs (CXCII) et (CCI), on voit que

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\tang(X, Y) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)\cot\tfrac{1}{2}(A, C) = (\alpha\beta - \gamma\delta)\cot\tfrac{1}{2}(B, D) \ldots\ldots \text{(CCII)} \end{aligned}$$

Puisque

$$\text{Surf. Qd.} = \tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\tan g(X, Y), \ldots (\text{CC}$$

on voit que

Théorème X. L'aire du quadrilatère circonscripti convexe est égale au demi-produit des différen des segments opposés des côtés, multiplié par la t gente de l'angle compris entre les diagonales.

111. Surfaces des triangles formés chacun par deux côté une diagonale. Puisque le triangle

$$\frac{PQS}{PQRS} = \frac{PU}{PR} = \frac{X'}{X} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma},$$

il vient

$$\left.\begin{aligned} PQS &= \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}.\text{Surf. Qd.},\\ PQR &= \frac{\beta}{\beta+\delta}.\text{Surf. Qd.},\\ QRS &= \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}.\text{Surf. Qd.},\\ PRS &= \frac{\delta}{\beta+\delta}.\text{Surf. Qd.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{CC}$$

Ces valeurs nous donnent

$$\frac{\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)} = \frac{SPQ}{\alpha(\beta+\delta)} = \frac{PQR}{\beta(\alpha+\gamma)} = \frac{QRS}{\gamma(\beta+\delta)} = \frac{RSP}{\delta(\alpha+\gamma)}. \quad (\text{C}$$

112. Angles compris entre les côtés et les diagonales. triangle *PQS* nous donne, par suite de (CCIV),

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta).X\sin(A, X) = \frac{\delta}{\beta+\delta}.\text{Surf. Qd.};$$

il vient donc

$$\left.\begin{aligned} \sin(A, X) &= \frac{\delta}{X}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\delta+\alpha)(\beta+\delta)},\\ \sin(B, X) &= \frac{\beta}{X}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\beta)(\beta+\delta)},\\ \sin(C, X) &= \frac{\beta}{X}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)},\\ \sin(D, X) &= \frac{\delta}{X}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\gamma+\delta)(\beta+\delta)}; \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CC}$$

et, pareillement,

$$\left.\begin{aligned}
\sin(A,\ Y) &= \frac{\alpha}{Y}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\delta+\alpha)(\alpha+\gamma)},\\
\sin(B,\ Y) &= \frac{\alpha}{Y}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)},\\
\sin(C,\ Y) &= \frac{\gamma}{Y}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)},\\
\sin(D,\ Y) &= \frac{\gamma}{Y}\cdot\frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{(\gamma+\delta)(\alpha+\gamma)}.
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (\text{CCVII})$$

On déduit de ces valeurs les rapports suivants entre les sinus deux angles adjacents à chaque extremité de l'une et l'autre onale

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin(A,\ X)}{\sin(B,\ X)} &= \frac{\delta(\alpha+\beta)}{\beta(\alpha+\delta)}, \quad \frac{\sin(C,\ X)}{\sin(D,\ X)} = \frac{\beta(\gamma+\delta)}{\delta(\gamma+\beta)},\\
\frac{\sin(A,\ Y)}{\sin(D,\ Y)} &= \frac{\alpha(\delta+\gamma)}{\gamma(\delta+\alpha)}, \quad \frac{\sin(B,\ Y)}{\sin(C,\ Y)} = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\gamma(\beta+\alpha)}.
\end{aligned}\right\}(\text{CCVIII})$$

113. Surfaces des triangles formés chacun par un côté et les ents adjacents des diagonales. Nous avons

$$PSU = \tfrac{1}{2}X'Y'\sin U = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\delta\alpha}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot XY\sin U,$$

$$\left.\begin{aligned}
SPU &= \frac{\delta\alpha}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot\text{Surf. Qd.},\\
PQU &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot\text{Surf. Qd.},\\
QRU &= \frac{\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot\text{Surf. Qd.},\\
RSU &= \frac{\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot\text{Surf. Qd.}
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (\text{CCIX})$$

114. Droite qui joint les milieux des deux diagonales intéri- . Représentons cette droite par K. Nous avons la relation

$$4K^2 + X^2 + Y^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

en substituant,

$$\begin{aligned}
4K^2 = {} & (\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\delta)^2 + (\delta+\alpha)^2\\
& -(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta\delta\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} - (\beta+\delta)^2 - 4\alpha\gamma\cdot\frac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma},
\end{aligned}$$

en

$$4K^2 = (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + 2(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) - 4\beta\delta . \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} - 4\alpha\gamma . \frac{\beta}{\alpha}$$

Réduisons au même dénominateur et effectuons dans le se membre, il nous viendra

$$4(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)K^2 = (\alpha-\gamma)^2(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) + (\beta-\delta)^2(\alpha+\gamma)(\beta+$$
$$+ (\alpha-\gamma)^2(\beta+\delta)^2 + (\beta-\delta)^2(\alpha+\gamma)^2,$$

ou encore

$$4(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)K^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left[(\alpha-\gamma)^2(\beta+\delta) + (\beta-\delta)^2(\alpha+\gamma)\right.$$

d'où nous tirons

$$\frac{K^2}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{(\alpha-\gamma)^2}{\alpha+\gamma} + \frac{(\beta-\delta)^2}{\beta+\delta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(}$$

115. **Troisième diagonale.** Elle est $MN = Z$. Le tri PMN donne MN^2 ou

$$Z^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM.PN.\cos(A, B)$$

qu'on peut écrire

$$Z^2 = (PM+PN)^2 \sin^2\tfrac{1}{2}(A, B) + (PM-PN)^2 \cos^2\tfrac{1}{2}(A, B)$$

Mettant à la place du sinus et du cosinus leurs valeurs (CLX et (CLXVIII), on obtient

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)Z^2 = \mathrm{P}(PM+PN)^2 + \mathrm{S}\alpha^2(PM-PN)^2$$

où l'on a posé

$$\mathrm{P} = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta, \quad \mathrm{S} = \alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Le triangle RMN nous donne de même

$$(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)Z^2 = \mathrm{P}(RM+RN)^2 + \mathrm{S}\gamma^2(RM-RN)^2$$

Si nous retranchons ces deux égalités membre à memb que nous fassions observer que

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\delta) - (\gamma+\beta)(\gamma+\delta) = (\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = (\alpha-\gamma$$

il nous viendra

$$(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)\mathrm{S}Z^2 = \mathrm{P}(PM+RM+PN+RN)(PM-RM+PN-$$
$$+\mathrm{S}(\alpha PM - \alpha PN + \gamma RM - \gamma RN)(\alpha PM - \alpha PN - \gamma RM + \gamma R$$

Il sagit de faire les substitutions nécessaires dans le se membre. Les valeurs du n° 104. nous donnent

$$PM + RM = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}(\alpha\delta+\beta\gamma+2\beta\delta),$$

$$PN + RN = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha\beta-\gamma\delta}(\alpha\beta+\gamma\delta+2\beta\delta),$$

$$PM - RM = PN - RN = \alpha+\gamma;$$

mais

$$\alpha PM - \alpha PN = \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

$$\gamma RM - \gamma RN = \frac{\gamma(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)};$$

où nous tirons facilement

$$PM + RM + PN + RN = \frac{2\beta\delta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)\mathrm{S}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

$$PM - RM + PN - RN = 2(\alpha+\gamma),$$

$$\alpha PM - \alpha PN + \gamma RM - \gamma RN = \frac{(\alpha+\gamma)^2(\beta-\delta)\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

$$\alpha PM - \alpha PN - \gamma RM + \gamma RN = \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}.$$

Mettons ces valeurs dans la dernière équation en Z^2, puis supprimons les facteurs communs dans les deux membres de l'équation résultante; nous obtenons ainsi

$$Z^2 = \frac{(\alpha+\gamma)\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}\left[4\beta\delta + \frac{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}\right].$$

Il reste à donner une forme plus simple au facteur entre crochets. Ce facteur peut s'écrire

$$\frac{4\beta\delta(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)+(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2\mathrm{P}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Or nous avons d'abord

$$4\beta\delta(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma) = 4\beta^2\delta^2(\alpha-\gamma)^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta(\beta-\delta)^2; \quad . \; . \; (2)$$

ensuite, comme

$$\mathrm{P} = \alpha\gamma(\beta+\delta) + \beta\delta(\alpha+\gamma),$$

il vient

$$(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2\mathrm{P} = \alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\beta-\delta)^2 + \beta\delta(\alpha+\gamma)^2(\beta-\delta)^2; \quad (3)$$

nous trouvons de plus que

$$\beta\delta(\alpha+\gamma)^2(\beta-\delta)^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta(\beta-\delta)^2 = \beta\delta(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2, \; . \; . \; (4)$$

puis

$$\beta\delta(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+4\beta^2\delta^2(\alpha-\gamma)^2=\beta\delta(\alpha-\gamma)^2(\beta+\delta)^2 \ldots$$

Ajoutons les équations (2), (3), (4) et (5), et désignons par L numérateur de la fraction (1), nous obtenons, en réduisant

$$L=(\beta+\delta)[\alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2+\beta\delta(\beta+\delta)(\alpha-\gamma)^2].$$

Dans cette dernière expression, la partie entre crochets équivalente à

$$(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)P-4\alpha\beta\gamma\delta S.$$

Substituant cette valeur de L dans la fraction (1), puis celle dans la valeur en Z^2, nous trouvons enfin que

$$Z^2=\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)P}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\times[(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)P-4\alpha\beta\gamma\delta S],$$

ou encore, en remplaçant P et S par leurs développements,

$$Z^2=\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}$$

$$\times[(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)-4\alpha\beta\gamma\delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta)]. \quad (\text{CCX}$$

Il est peut-être tout aussi aisé d'employer cette valeur so la forme plus élégante

$$Z^2=\frac{\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)\\ \times[\alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2+\beta\delta(\beta+\delta)(\alpha-\gamma)^2]\end{array}\right\}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}. \quad (\text{CCX}$$

116. Segments de la troisième diagonale. Les deux triangl *MRV*, *NRV*, ayant même hauteur, sont entre eux comme le bases; on a, par conséquent,

$$\frac{MV}{NV}=\frac{RM.\sin MRV}{RN.\sin NRV}=\frac{RM.\sin(C,X)}{RN.\sin(D,X)};$$

or

$$\frac{\sin(C,X)}{\sin(D,X)}=\frac{\delta(\gamma+\beta)}{\beta(\gamma+\delta)} \quad \text{et} \quad \frac{RM}{RN}=\frac{\beta(\gamma+\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\delta(\gamma+\beta)(\alpha\delta-\beta\gamma)};$$

il vient, par suite,

$$\frac{MV}{NV}=\frac{MW}{NW}=\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma},$$

ce qui donne

$$\frac{MV}{\alpha\beta-\gamma\delta}=\frac{NV}{\alpha\delta-\beta\gamma}=\frac{MV+NV}{\alpha\beta-\gamma\delta+\alpha\delta-\beta\gamma}=\frac{Z}{(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)},$$

$$\frac{MW}{\alpha\beta-\gamma\delta}=\frac{NW}{\alpha\delta-\beta\gamma}=\frac{MW-NW}{\alpha\beta-\gamma\delta-\alpha\delta+\beta\gamma}=\frac{Z}{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)}.$$

Nous tirons de ces égalités

$$\left.\begin{aligned} MV=Z'=\frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)Z}{(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)},\quad NV=Z''=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)Z}{(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)};\\ MW=Z_1=\frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)Z}{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)},\quad NW=Z_2=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)Z}{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)}. \end{aligned}\right\}\text{(CCXIII)}$$

117. Inclinaisons des côtés sur la troisième diagonale. Les deux triangles PMN, RMN donnent

$$\frac{\sin PMN}{PN}=\frac{\sin PNM}{PM}=\frac{\sin(A,B)}{Z},$$

$$\frac{\sin RMN}{RN}=\frac{\sin RNM}{RM}=\frac{\sin(C,D)}{Z};$$

, en ayant égard aux valeurs (CLXXXIII) et (CLXXXIV),

$$\frac{\sin(A,Z)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}=\frac{\sin(B,Z)}{\delta(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma\delta)}=\frac{\sin(A,B)}{Z(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

$$\frac{\sin(C,Z)}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}=\frac{\sin(D,Z)}{\beta(\gamma+\alpha)(\gamma+\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)}=\frac{\sin(C,D)}{Z(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}.$$

On tire de ces égalités les valeurs

$$\left.\begin{aligned} \sin(A,Z)&=\frac{2\alpha\beta(\alpha\delta-\beta\gamma)\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)KL}},\\ \sin(B,Z)&=\frac{2\alpha\delta(\alpha\beta-\gamma\delta)\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\delta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)\cdot KL}},\\ \sin(C,Z)&=\frac{2\gamma\delta(\alpha\delta-\beta\gamma)\,\text{Surf. Qd.}}{(\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)KL}},\\ \sin(D,Z)&=\frac{2\beta\gamma(\alpha\beta-\gamma\delta)\,\text{Surf. Qd.}}{(\beta+\gamma)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)KL}}. \end{aligned}\right\}\text{(CCXIV)}$$

118. Côtés du triangle formé par les trois diagonales. Ces côtés sont

$$UV=PV-PU=X_1-X'=\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)X,$$

$$UW=SW-SU=Y_1-Y'=\left(\frac{\beta}{\beta-\delta}-\frac{\beta}{\beta+\delta}\right)Y,$$

$$VW=MW-MV=Z_1-Z'=\left(\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)}-\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)}\right)Z;$$

$$\left.\begin{aligned} UV &= \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2-\gamma^2}.X,\\ UW &= \frac{2\beta\delta}{\beta^2-\delta^2}.Y,\\ VW &= \frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)}.Z. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C(}$$

119. Angles du triangle formé par les trois diagonales.
avons

$$\frac{\sin UWV}{UV} = \frac{\sin UVW}{UW} = \frac{\sin VUW}{VW},$$

ou

$$\frac{(\alpha^2-\gamma^2)\sin UWV}{\alpha\gamma X} = \frac{(\beta^2-\delta^2)\sin UVW}{\beta\delta Y} = \frac{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)\sin V}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta_{\rm l}}$$

et, comme $\sin VUW = \frac{2\,\text{Surf. Qd.}}{XY}$, il vient

$$\left.\begin{aligned} \sin UWV &= \frac{2\alpha\gamma(\beta^2-\delta^2)\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)\,YZ},\\ \sin UVW &= \frac{2\beta\delta(\alpha^2-\gamma^2)\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)\,XZ}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(CC:}$$

120. Aire du triangle formé par les trois diagonales.
triangle est

$$UVW = \tfrac{1}{2}UV.\,UW.\sin(X,\,Y)$$

ou

$$UVW = \tfrac{1}{2}.\frac{2\alpha\gamma X}{\alpha^2-\gamma^2}.\frac{2\beta\delta Y}{\beta^2-\delta^2}.\sin(X,\,Y),$$

qu'on peut écrire

$$UVW = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)}.\tfrac{1}{2}XY\sin(X,\,Y);$$

mais

$$\tfrac{1}{2}XY\sin(X,\,Y) = \text{Surf. Qd.};$$

il vient donc

$$UVW = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)(\beta-\delta)}.\text{Surf. Qd.} \quad \text{(CCX}$$

121. Aire du quadrilatère à angle rentrant. On a le qu
latère *PMRN* ou

$$\text{Surf. Q'd.} = PMN - RMN = \tfrac{1}{2}PM.PN.\sin(A,B) - \tfrac{1}{2}RM.RN.\sin(($$

Mettons à la place de PM, PN, RM, RN leurs valeurs, et au lieu de $\sin(A, B)$, $\sin(C, D)$ aussi leurs valeurs; nous obtenons ainsi, après réduction,

$$\text{Surf. Q'd.} = \frac{\beta\delta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} . \text{Surf. Qd.}$$

122. **Aire du quadrilatère étoilé.** Ce quadrilatère $QMSN$ est la différence des deux triangles QMN, SMN; on a donc $QMSN$ ou

$$\text{Surf. Q''d.} = QMN - SMN = \tfrac{1}{2}QM.QN\sin(B,C) - \tfrac{1}{2}SM.SN\sin(D,A);$$

en faisant dans le second membre les substitutions nécessaires, on trouve

$$\text{Surf. Q''d.} = \frac{\alpha\gamma(\beta+\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} . \text{Surf. Qd.} \quad . \; . \; (\text{CCXVIII})$$

123. En comparant les deux dernières expressions, on obtient les rapports égaux

$$\frac{\text{Surf. Qd.}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} = \frac{\text{Surf. Q'd.}}{\beta\delta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)} = \frac{\text{Surf. Q''d.}}{\alpha\delta(\beta+\delta)(\beta-\delta)} \ldots (\text{CCXIX})$$

§. IX. Le quadrilatère inscriptible convexe déterminé par le quadrilatère circonscriptible convexe.

124. **Côtés du quadrilatère inscrit formé par la jonction des points de contact des côtés du quadrilatère circonscriptible.** Les points de contact des côtés du quadrilatère circonscriptible $PQRS$, ayant été désignés par A, B, C, D, les droites AB, BC, CD, DE seront les côtés du quadrilatère inscriptible, côtés que nous poserons

$$AB = a, \; BC = b, \; CD = c, \; DA = d.$$

Le triangle rectangle PAO donne

$$\tfrac{1}{4}AB^2 = AP^2\sin^2\tfrac{1}{2}(A, B),$$

ou

$$a^2 = 4\alpha^2\sin^2\tfrac{1}{2}(A, B).$$

Substituons à $\sin^2\tfrac{1}{2}(A, B)$ sa valeur (CLXVII), et nous obtenons

puis

$$\left.\begin{aligned}
a^2 &= \frac{4\alpha^2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)},\\
b^2 &= \frac{4\beta^2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)},\\
c^2 &= \frac{4\gamma^2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)},\\
d^2 &= \frac{4\delta^2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (\text{CCX}$$

125. Produit des diagonales du quadrilatère inscrit. Re[présentons] ces deux diagonales par x, y. On sait que

$$xy = ac + bd;$$

or les valeurs précédentes donnent les produits

$$ac = \frac{4\alpha\gamma(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\gamma)\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\alpha)}},$$

$$bd = \frac{4\beta\delta(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\beta+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\alpha)}};$$

qui, étant ajoutés, fournissent l'expression demandée

$$\begin{aligned}
xy &= \frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\alpha)}}\\
&= \frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)\sqrt{ABCD}}. \quad \ldots\ldots\ldots (\text{CC}
\end{aligned}$$

126. Quotient des diagonales du quadrilatère inscrit. [Nous] savons que

$$\frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc};$$

or

$$ab = \frac{4\alpha\beta(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}},$$

$$cd = \frac{4\gamma\delta(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\gamma+\delta)\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\delta+\alpha)(\delta+\beta)}},$$

$$ad = \frac{4\alpha\delta(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\delta)\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}},$$

$$bc = \frac{4\beta\gamma(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\beta+\gamma)\sqrt{(\beta+\alpha)(\beta+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\delta)}};$$

de sorte que

$$ab+cd=\frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}};$$

$$ad+bc=\frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}};$$

ivisant membre à membre, il vient

$$\frac{ab+cd}{ad+bc}=\frac{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\sqrt{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}},$$

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}}=\sqrt{\frac{AC}{BD}}. \quad \ldots \text{(CCXXII)}$$

Donc

Théorème. Les carrés des deux diagonales du quadrilatère inscrit sont entre eux comme les produits es côtés non adjacents du quadrilatère circonscriptible.

127. Diagonales du quadrilatère inscrit. Multiplions et divins successivement l'égalité (CCXXI) par l'égalité (CCXXII); ous trouvons

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)},\\ y^2&=\frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(CCXXIII)}$$

Ces valeurs donnent

$$x^2-y^2=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}\cdot\frac{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\alpha)},\ldots\text{(CCXXIV)}$$

$$\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)}{4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}. \quad \ldots \ldots \text{(CCXXV)}$$

128. Aire du quadrilatère inscrit. Ce quadrilatère $ABCD$, nt nous représentons la surface par Q, se compose des quatre angles OAB, OBC, OCD, ODA. Mais la surface du triangle AB est

$$\tfrac{1}{2}OA.OB.\sin AOB=\tfrac{1}{2}R_1{}^2\sin(A,B)=\frac{\alpha R_1{}^2\,\text{Surf. Qd.}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}.$$

n a donc

$$\frac{Q}{R_1^2 \text{ Surf. Qd.}} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)} + \frac{\beta}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\beta+\alpha)}$$

$$+ \frac{\gamma}{(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)} + \frac{\delta}{(\delta+\alpha)(\delta+\beta)(\delta+\gamma)}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{r} \alpha(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta) + \beta(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\gamma+\delta) + \gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) \\ + \delta(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) \end{array} \right\}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}.$$

On trouve ainsi, en ayant égard à la valeur de R_1^2,

$$\frac{Q}{\text{Surf. Qd.}} = \frac{2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta}, \ldots \text{(CCXXV}$$

$$Q = \frac{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)} \ldots \text{(CCXXVI}$$

129. **Angles du quadrilatère inscrit.** On a l'angle

$$DAB = \tfrac{1}{2}(BOC + COD) = \tfrac{1}{2}(180 - Q + 180 - R)$$
$$= 180 - \tfrac{1}{2}(B,\ C) - \tfrac{1}{2}(C,\ D);$$

il vient, par conséquent,

$$\sin DAB = \sin\tfrac{1}{2}(B,\ C)\cos\tfrac{1}{2}(C,\ D) + \sin\tfrac{1}{2}(C,\ D)\cos\tfrac{1}{2}(B,\ C);$$

or

$$\sin\tfrac{1}{2}(B,\ C)\cos\tfrac{1}{2}(C,\ D) = \frac{\beta\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}}$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}(C,\ D)\cos\tfrac{1}{2}(B,\ C) = \frac{\alpha\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}}$$

On a donc

$$\left. \begin{array}{l} \sin(d,\ a) = \dfrac{\text{Surf. Qd.}}{\sqrt{(\delta+\beta)(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}, \\ \sin(a,\ b) = \dfrac{\text{Surf. Qd.}}{\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}}, \\ \sin(b,\ c) = \dfrac{\text{Surf. Qd.}}{\sqrt{(\beta+\alpha)(\beta+\delta)(\gamma+\alpha)(\gamma+\delta)}}, \\ \sin(c,\ d) = \dfrac{\text{Surf. Qd.}}{\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\delta+\alpha)(\delta+\beta)}}. \end{array} \right\} \text{(CCXXVIII}$$

On trouve aussi

$$\cos DAB = \sin(B,\ C)\sin(C,\ D) - \cos(B,\ C)\cos(C,\ D);$$

substituant et effectuant, il vient

$$\left.\begin{aligned}
\cos(d,\ a) &= \frac{\delta\alpha - \beta\gamma}{\sqrt{(\delta+\beta)(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}},\\
\cos(a,\ b) &= \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)}},\\
\cos(b,\ c) &= \frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{\sqrt{(\beta+\delta)(\beta+\alpha)(\gamma+\delta)(\gamma+\alpha)}},\\
\cos(c,\ d) &= \frac{\delta\gamma - \alpha\beta}{\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\delta+\alpha)(\delta+\beta)}}.
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(CCXXIX)}$$

De ces formules on déduit immédiatement

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}(d,\ a) &= \frac{\text{Surf. Qd.}}{\delta\alpha - \beta\gamma},\\
\text{tang}(a,\ b) &= \frac{\text{Surf. Qd.}}{\alpha\beta - \gamma\delta},\\
\text{tang}(b,\ c) &= \frac{\text{Surf. Qd.}}{\beta\gamma - \delta\alpha},\\
\text{tang}(c,\ d) &= \frac{\text{Surf. Qd.}}{\delta\gamma - \alpha\beta}.
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(CCXXX)}$$

130. On pourra calculer, de la même manière, les autres éléments du quadrilatère inscriptible, en fonction de α, β, γ, δ. Nous laissons ce soin au lecteur.

§. X. Quadrilatère circonscriptible à angle rentrant.

131. Ce quadrilatère est $MPNRM$. Nous poserons les quatre côtés consécutifs

$$MP = A,\ PN = B,\ NR = D,\ RM = C,$$

les segments tangentiels

$$PA = PB = \alpha,\ NB = ND = \beta',\ RC = RD = \gamma,\ MC = MA = \delta'.$$

L'inspection de la figure donne

$$A + D = MP + NR = MA + PA + ND - RD = \delta' + \alpha + \beta' - \gamma,$$

$$B + C = PN + RM = PB + NB + MC - RC = \alpha + \beta' + \delta' - \gamma;$$

d'où on tire $A + D = B + C$. Donc

$$A-C=\alpha-\delta-\beta+\gamma,$$
$$B-D=\alpha-\beta-\delta+\gamma;$$

il vient donc $A-C=B-D$; ce qui démontre que

Théorème. Dans tout quadrilatère ex-circonscriptible convexe, la différence de deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres côtés.

137. Périmètre du quadrilatère. En ajoutant les côtés, nous trouvons que

$$A+B+C+D=\alpha-\delta+\alpha-\beta+\beta-\gamma+\delta-\gamma=2(\alpha-\gamma).\text{(CCXXXII)}$$

Nous avons d'ailleurs

$$A-B+C-D=\alpha-\delta-\alpha+\beta+\beta-\gamma-\delta+\gamma=2(\beta-\delta).\text{(CCXXXIII)}$$

138. Rayon du cercle ex-inscrit. Nous représenterons ce rayon par R_1. Les triangles rectangles APO, BQO, CRO, DSO donnent

$$\cot\tfrac{1}{2}(A, B)=\frac{\alpha}{R_1}, \cot\tfrac{1}{2}(B, C)=\frac{R_1}{\beta}, \cot\tfrac{1}{2}(C, D)=\frac{\gamma}{R_1}, \cot\tfrac{1}{2}(D, A)=\frac{R_1}{\delta};$$

substituant ces valeurs dans la relation (CLXI), nous obtenons l'équation

$$\alpha\beta\delta+R_1^2\delta+\beta\gamma\delta+R_1^2\beta=\alpha\gamma\delta+R_1^2\alpha+\alpha\beta\gamma+R_1^2\gamma,$$

ou, en transposant et en intervertissant les membres,

$$R_1^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta-\alpha\gamma\delta-\alpha\beta\gamma;$$

nous en tirons

$$R_1^2=\frac{\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta-\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma\delta}{\alpha-\beta+\gamma-\delta}=\frac{(\alpha+\gamma)\beta\delta-(\beta+\delta)\alpha\gamma}{\alpha-\beta+\gamma-\delta}.\text{(CCXXXIV)}$$

Cette valeur ne diffère de l'expression du rayon du cercle inscrit dans le quadrilatère inscriptible convexe, que par les signes des segments β, δ, qui sont positifs dans le quadrilatère circonscriptible et négatifs dans le quadrilatère ex-circonscriptible. Ce résultat ne donne pas lieu d'étonné, puis dans le second quadrilatère, ces segments sont comptés en sens contraire à celui du premier.

139. Surface du quadrilatère. Le quadrilatère $PQRS$, dont nous représenterons la surface par Q, est égal à la somme des deux triangles SPO, PQO, diminuée de la somme des deux triangles QRO, RSO, c'est-à-dire

$$Q=SPO+PQO-QRO-RSO;$$

or on a

$$SPO=\tfrac{1}{2}AR_1,\ PQO=\tfrac{1}{2}BR_1,\ QRO=\tfrac{1}{2}CR_1,\ RSO=\tfrac{1}{2}DR_1;$$

Il vient donc

$$Q = \tfrac{1}{2}(A+B-C-D)R_1\,;$$

et, comme

$$A+B-C-D = \alpha-\delta+\alpha-\beta-\beta+\gamma-\delta+\gamma = 2(\alpha-\beta+\gamma-\delta),$$

on obtient

$$Q = \sqrt{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)} \quad \text{(CCXXXV)}$$

Ce résultat peut se déduire de la formule (CCXXXVIII), en changeant dans celle-ci les signes de β, δ.

140. Pour avoir les autres éléments du quadrilatère ex-circonscriptible convexe, nous remplaçerons β et δ par $-\beta$ et $-\delta$ dans les expressions des éléments du quadrilatère circonscriptible convexe; nous obtenons ainsi par le n° 96,

$$\left.\begin{aligned}
P^2 &= \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = AB.\frac{\alpha+\gamma}{A+C},\\
Q^2 &= \frac{(\beta+\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = BC.\frac{\beta+\delta}{B+D},\\
R^2 &= \frac{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = CD.\frac{\alpha+\gamma}{A+C},\\
S^2 &= \frac{(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\delta-\gamma)}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = DA.\frac{\beta+\delta}{B+D};
\end{aligned}\right\}\text{(CCXXXVI)}$$

d'où on tire

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{P^2}{R^2} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{Q^2}{S^2} = \frac{BC}{AD};\\
&\frac{PQ}{RS} = \frac{B}{D}, \quad \frac{PS}{QR} = \frac{A}{C}
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(CCXXXVII)}$$

Ces dernières relations expriment que les propriétés, formulées au n° 96, appartiennent aussi au quadrilatère circonscriptible.

141. Nous trouvons ensuite, par le n° 97,

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}(A,\ B) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(B,\ C) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\beta+\delta)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(C,\ D) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}(D,\ A) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\delta-\gamma)},
\end{aligned}\right\}\text{(CCXXXVIII)}$$

pour les carrés des sinus des demi-angles du quadrilatère;

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\tfrac{1}{2}(A,\ B) &= \frac{\alpha^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} = \frac{\alpha^2}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{AB},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(B,\ C) &= \frac{\beta^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}{(\beta+\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} = \frac{\beta^2}{\beta+\delta}\cdot\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{BC},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(C,\ D) &= \frac{\gamma^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}{(\alpha+\gamma)(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)} = \frac{\gamma^2}{\alpha+\gamma}\cdot\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{CD},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}(D,\ A) &= \frac{\delta^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}{(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\delta-\gamma)} = \frac{\delta^2}{\beta+\delta}\cdot\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{DA},
\end{aligned}\right\}\text{(CCXXX}$$

pour les **carrés des cosinus des demi-angles**; et

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(A,\ B) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)},\\
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(B,\ C) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\beta^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)},\\
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(C,\ D) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\gamma^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)},\\
\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(D,\ A) &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\delta^2(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}.
\end{aligned}\right\}\ldots\text{(C}$$

pour les **carrés des tangentes des mêmes demi-angl**

Les formules (CCXXXVIII) donnent

$$\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(A,\ B)}{\sin^2\tfrac{1}{2}(C,\ D)} = \frac{CD}{AB},\quad \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(B,\ C)}{\sin^2\tfrac{1}{2}(D,\ A)} = \frac{DA}{BC}\ldots\text{(CC}$$

Le n° 98 nous conduit aux valeurs

$$\left.\begin{aligned}
\sin(A,\ B) &= \frac{2\alpha\sqrt{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)},\\
\cos(A,\ B) &= \frac{(\alpha^2-\beta\delta)(\alpha+\gamma)-(\alpha^2-\alpha\gamma)(\beta+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)},
\end{aligned}\right\}\text{(CC}$$

des **angles du quadrilatère**; elles donnent

$$\frac{\sin(A,\ B)}{\alpha} = \frac{\sin(C,\ D)}{\gamma} = \frac{CD}{AB}.$$

142. Par les nos 100 et 101, nous avons

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(A,\ C) &= \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}},\\
\sin\tfrac{1}{2}(B,\ D) &= \frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}};
\end{aligned}\right\}\text{(CCX}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\tfrac{1}{2}(A, C) &= \frac{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)},\\ \cos^2\tfrac{1}{2}(B, D) &= \frac{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)};\end{aligned}\right\}\text{(CCXLIV)}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}(A, C) &= \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)},\\ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}(B, D) &= \frac{(\gamma\delta-\alpha\beta)^2}{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)};\end{aligned}\right\}\text{(CCXLV)}$$

our les demi-angles compris entre les côtés opposés u quadrilatère.

Les deux dernières formules donnent

$$\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A, C)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B, D)} = \frac{\alpha\gamma-\beta\gamma}{\alpha\beta-\gamma\delta}. \; . \; . \; . \; . \; \text{(CCXLVI)}$$

Nous avons aussi

$$\left.\begin{aligned}&\sin(A, C) = \\ &\frac{2(\beta\gamma-\alpha\delta)\sqrt{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)},\\ &\sin(B, D) = \\ &\frac{2(\gamma\delta-\alpha\beta)\sqrt{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)},\end{aligned}\right\}\text{(CCXLVII)}$$

our les angles du quadrilatère.

143. Les nos 102, 103 et 104 nous donnent

$$\left.\begin{aligned}{}^2 &= \frac{(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2},\\ {}^2 &= \frac{(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)^2},\end{aligned}\right\}\text{(CCXLVIII)}$$

ur les distances du centre du cercle ex-inscrit aux oints de concours des côtés opposés;

$$\left.\begin{aligned}AM = CM &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\beta\gamma-\alpha\delta}.\\ BN = DN &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\gamma\delta-\alpha\beta},\end{aligned}\right\}\text{..(CCXLIX)}$$

our les distances des points de contact du cercle ex-scrit aux points de concours des côtés opposés; et

$$\left.\begin{aligned} PM &= \frac{\delta(\alpha-\beta)(\alpha+\gamma)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ QM &= \frac{\gamma(\alpha-\beta)(\beta+\delta)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ RM &= \frac{\beta(\delta-\gamma)(\alpha+\gamma)}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \\ SM &= \frac{\alpha(\delta-\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha\delta-\beta\gamma}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (CC$$

$$\left.\begin{aligned} PN &= \frac{\beta(\alpha-\delta)(\alpha+\gamma)}{\alpha\beta-\gamma\delta}, \\ QN &= \frac{\alpha(\beta-\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha\beta-\gamma\delta}, \\ RN &= \frac{\delta(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma)}{\alpha\beta-\gamma\delta}, \\ SN &= \frac{\gamma(\delta-\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha\beta-\gamma\delta}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (CCL$$

pour les distances des quatre sommets du quadril tère aux points de concours des côtés opposés.

144. On trouve ensuite, à l'aide du n° 105,

$$\left.\begin{aligned} &Q = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha} \cdot \tfrac{1}{2}AB\sin(A,\ B) = \text{etc.}, \\ &Q = \sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta).AC}.\cos\tfrac{1}{2}(B, D) = \text{etc.}, \\ &Q = (\alpha\delta-\beta\gamma)\cot\tfrac{1}{2}(A,\ C) = \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots. (CCL$$

pour diverses autres expressions de la surface du quadrilatè

145. Le n° 106 nous donne les valeurs

$$\left.\begin{aligned} \frac{X^2}{\alpha+\gamma} &= \alpha+\gamma-\frac{4\beta\delta}{\beta+\delta}, \\ \frac{Y^2}{\beta+\delta} &= \beta+\delta-\frac{4\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}, \end{aligned}\right\} \ldots . (CCLI$$

pour celles des deux diagonales intérieures; on en tire

$$\left.\begin{aligned} &X^2Y^2 = [(4\alpha\gamma-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)][(4\beta\delta-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)], \\ &\frac{X^2}{Y^2} = \frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\delta)^2} \times \frac{4\beta\delta-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{4\alpha\gamma-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}. \end{aligned}\right\} (CCLI$$

Le n° 109 nous fait avoir les segments des diagonale qui sont:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X'}{\alpha} = \frac{X''}{\gamma} = \frac{X}{\alpha+\gamma}, \quad \frac{X_1}{\alpha} = \frac{X_2}{\gamma} = \frac{X}{\alpha-\gamma}; \\ \frac{Y'}{\beta} = \frac{Y''}{\delta} = \frac{Y}{\beta+\delta}, \quad \frac{Y_1}{\beta} = \frac{Y_2}{\delta} = \frac{Y}{\beta-\delta}; \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CCLV})$$

et par le n° 110 nous avons, pour l'angle des diagonales

$$\left.\begin{aligned} XY \cos U = (\alpha-\gamma)(\delta-\beta), \\ \text{d'où} \qquad \text{Surf. } Q_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\operatorname{tang}(X, Y). \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CCLVI})$$

146. La droite qui joint les milieux des diagonales est fournie par le n° 114, qui donne

$$\frac{K^2}{\alpha-\beta+\gamma-\delta} = \frac{(\alpha-\gamma)^2}{\alpha+\gamma} - \frac{(\beta-\delta)^2}{\beta+\delta}. \quad \ldots (\text{CCLVII})$$

147. La troisième diagonale est, d'après n° 115,

$$Z^2 = \frac{\left\{\begin{aligned} &[\beta\delta(\beta+\delta)(\alpha-\gamma)^2 - \alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)^2] \\ &\times(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta) \end{aligned}\right\}}{(\alpha\beta-\gamma\delta)^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}; \ (\text{CCLVIII})$$

et la surface du triangle formé par les trois diagonales est, d'après n° 120,

$$UVW = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)} \cdot \text{Surf. } Q_1\text{d.} \quad \ldots (\text{CCLIX})$$

148. Enfin par les n° 121 et 122, nous avons

$$\left.\begin{aligned} \text{Surf. } Q_1'\text{d.} = \frac{\beta\delta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} \cdot \text{Surf. } Q_1\text{d.}, \\ \text{Surf. } Q_1''\text{d.} = \frac{\alpha\gamma(\beta+\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma)} \cdot \text{Surf. } Q_1\text{d.} \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CCLX})$$

pour les surfaces des deux quadrilatères ex-circonscriptibles, l'un à angle rentrant et l'autre étoilé.

§. XIII. Quadrilatère ex-circonscriptible à angle rentrant.

149. Ce quadrilatère, dans la figure précédente, est $MPNRM$. Nous poserons les quatre côtés consécutifs

$$MP = A, \quad PN = B, \quad NR = D, \quad RM = C,$$

et les segments tangentiels

$$PA = PB = \alpha, \quad NB = ND = \beta', \quad RD = RC = \gamma, \quad MC = MA = \delta';$$

ce qui nous donne de suite

$$A = MP = PA - MA = \alpha - \delta',$$
$$B = PN = PB - NB = \alpha - \beta',$$
$$D = NR = ND + RD = \beta' + \gamma,$$
$$C = RM = RC + MC = \gamma + \delta';$$

d'où nous tirons de suite

$$A - D = \alpha - \delta' - \beta' - \gamma,$$
$$B - C = \alpha - \beta' - \gamma - \delta';$$

et, par conséquent, $A - D = B - C$. Donc

Théorème. Dans tout quadrilatère ex-circonscri tible à angle rentrant, la différence de deux côtés o posés est égale à la différence des deux autres côté

150. Périmètre du quadrilatère. En ajoutant les côtés, no obtenons

$$A + B + C + D = \alpha - \delta' + \alpha - \beta' + \gamma + \delta' + \beta' + \gamma = 2(\alpha + \gamma). \quad \text{(CCLX}$$

Nous avons aussi

$$A - B - C + D = \alpha - \delta' - \alpha + \beta' - \gamma - \delta' + \beta' + \gamma = 2(\beta' - \delta'). \quad \text{(CCLX}$$

151. Rayon du cercle ex-inscrit. Les triangles rectangl *APO, BNO, DRO, CMO* nous donnent

$$\cot\tfrac{1}{2}(A,B) = \frac{R_1}{\alpha},\ \cot\tfrac{1}{2}(B,D) = \frac{\beta'}{R_1},\ \cot\tfrac{1}{2}(D,C) = -\frac{R_1}{\gamma},\ \cot\tfrac{1}{2}(C,A) = \frac{\delta}{R}$$

mettons ces valeurs dans la relation (CLXI), et nous obteno l'équation

$$R_1^2\gamma + \alpha\beta'\gamma - R_1^2\alpha + \alpha\gamma\delta' = -R_1^2\beta' + \beta'\gamma\delta' - R_1^2\delta' - \alpha\beta'\delta',$$

ou

$$R_1^2(\alpha - \beta' - \gamma - \delta') = \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta'\delta' + \alpha\gamma\delta' - \beta'\gamma\delta',$$

d'où nous tirons

$$R_1^2 = \frac{\alpha\beta'\gamma + \alpha\beta'\delta' + \alpha\gamma\delta' - \beta'\gamma\delta'}{\alpha - \beta' - \gamma - \delta'} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad \text{(CCLXI}$$

Cette valeur peut se déduire de celle qui convient au qu drilatère circonscriptible convexe (nº 95), en y changeant l signes de β, γ, δ et en accentuant les lettres β, δ.

152. Surface du quadrilatère ex-inscriptible à angle rentrant. Nous avons le quadrilatère

$$MPNRM = MPO + PNO - NRO - RMO;$$

r

$$MPO = \tfrac{1}{2}AR_1,\ PNO = \tfrac{1}{2}BR_1,\ NRO = \tfrac{1}{2}DR_1,\ RMP = \tfrac{1}{2}CR_1;$$

r suite

$$MPNRM = \tfrac{1}{2}(A+B-C-D)R_1 = (\alpha-\beta'-\gamma-\delta')R_1;$$

vient donc, en ayant égard à la valeur précédente de R_1,

$$\text{rf. } Q_1'\text{d.} = \sqrt{(\alpha-\beta'-\gamma-\delta')(\alpha\beta'\gamma+\alpha\beta'\delta'+\alpha\gamma\delta'-\beta'\gamma\delta')}, \text{ (CCLXIV)}$$

nous représentons la surface du quadrilatère par Surf. Q_1'd.

Cette expression peut encore se déduire de celle qui donne surface du quadrilatère circonscriptible convexe, en y changeant s signes des segments β, γ, δ.

153. Le lecteur qui voudra connaître les autres éléments du uadrilatère ex-circonscriptible à angle rentrant, pourra les déduire e celles du quadrilatère circonscriptible convexe, en changeant dans celles-ci les signes des quantités β, γ, δ.

Nous appliquerons cette même méthode au quadrilatère ex-circonscriptible étoilé.

§. XIV. Quadrilatère ex-circonscriptible étoilé.

154. Ce quadrilatère, dans notre figure, est $MSNQM$. Nous poserons les côtés consécutifs

$$MS = A,\quad SN = D,\quad NQ = B,\quad QM = C;$$

les segments tangentiels

$$A = SD = \delta,\ ND = NB = \gamma',\ QB = QC = \beta,\ MC = MA = \alpha'.$$

Nous avons

$$A = MS = SA - AM = \delta - \alpha',$$

$$D = SN = SD + DN = \delta + \gamma',$$

$$B = NQ = QB - BN = \beta - \gamma',$$

$$C = QM = QC + CM = \beta + \alpha';$$

où nous tirons

$$A-B=\delta-\alpha'-\beta+\gamma',$$
$$D-C=\delta+\gamma'-\beta+\alpha';$$

il vient donc $A-B=D-C$, c'est-à-dire que

Théorème. Dans tout quadrilatère ex-circonscriptible étoilé, la différence de deux côtés opposés est égale à la différence des deux autres côtés.

155. **Périmètre du quadrilatère.** Il est facile de voir, comme plus haut, qu'on a

$$\left.\begin{aligned} A+B+C+D&=2(\beta+\delta),\\ -A-B+C+D&=2(\alpha'+\gamma'),\\ A-B-C+D&=2(\delta+\gamma'-\alpha'-\beta). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \text{(CCLX}$$

156. **Rayon du cercle ex-inscrit.** La somme des deux angles M et S étant égale à la somme des deux angles N et Q, on a la relation

$$\cot\tfrac{1}{2}S+\cot\tfrac{1}{2}M-\cot\tfrac{1}{2}N-\cot\tfrac{1}{2}Q=$$

$$\cot\tfrac{1}{2}S\cot\tfrac{1}{2}N\cot\tfrac{1}{2}Q+\cot\tfrac{1}{2}M\cot\tfrac{1}{2}N\cot\tfrac{1}{2}Q-\cot\tfrac{1}{2}S\cot\tfrac{1}{2}M\cot\tfrac{1}{2}N$$
$$-\cot\tfrac{1}{2}S\cot\tfrac{1}{2}M\cot\tfrac{1}{2}Q$$

or les triangles MCO, SAO, NDO, QBO donnent

$$\cot\tfrac{1}{2}M=\frac{R_1}{\alpha'},\quad \cot\tfrac{1}{2}S=\frac{\delta}{R_1},\quad \cot\tfrac{1}{2}N=\frac{R_1}{\gamma'},\quad \cot\tfrac{1}{2}Q=\frac{\beta}{R_1};$$

substituant ces valeurs dans la relation précédente, on obtient

$$\frac{\delta}{R}+\frac{R_1}{\alpha'}-\frac{R_1}{\gamma'}-\frac{\beta}{R_1}=\frac{\beta\delta}{R_1\gamma'}+\frac{R_1\beta}{\alpha'\gamma'}-\frac{R_1\delta}{\alpha'\gamma'}-\frac{\beta\delta}{R_1\alpha'},$$

ou, en supprimant les dénominateurs,

$$\alpha'\gamma'\delta+R_1^2\gamma'-R_1^2\alpha'-\alpha'\beta\gamma'=\alpha'\beta\delta+R_1^2\beta-R_1^2\delta-\beta\gamma'\delta;$$

de cette égalité on tire

$$R_1^2=\frac{\alpha'\beta\gamma'+\alpha'\beta\delta-\alpha'\gamma'\delta-\beta\gamma'\delta}{\delta+\gamma'-\alpha'-\beta}.\quad . \quad . \text{(CCLXV}$$

Cette valeur aurait pu se déduire immédiatement de celle du n° 95, en y changeant les signes de α et β.

157. **Surface du quadrilatère ex-circonscriptible étoilé.** Cette surface est égale à la somme des deux triangles SMO, SN diminuée de la somme des deux triangles QMO, QNO; or on

$MO = \frac{1}{2}AR_1, \quad SNO = \frac{1}{2}DR_1, \quad QMO = \frac{1}{2}CR_1, \quad QNO = \frac{1}{2}BR_1;$

ar suite il vient

$$\text{Surf. } Q_1''\text{d.} = \tfrac{1}{2}(A + D - B - C)R_1 = (\delta + \gamma' - \alpha' - \beta)R_1.$$

n a donc

$$\text{Surf. } Q_1''\text{d.} = \sqrt{(\delta+\gamma'-\alpha'-\beta)(\alpha'\beta\gamma'+\alpha'\beta\delta-\alpha'\gamma'\delta-\beta\gamma'\delta)}. \text{ (CCLXVII)}$$

Les autres éléments peuvent se déduire de ceux du quadritère circonscriptible convexe, en changeant dans les formules α β en $-\alpha'$ et $-\beta$.

158. Le rayon et la surface du quadrilatère circonscriptible étoilé peuvent se calculer par la même méthode. n trouve

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{-\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}, \\ \text{Surf. } Q''\text{d.} &= \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(-\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}. \end{aligned}\right\} \text{(CCLXVIII)}$$

159. Pour le quadrilatère circonscriptible à angle entrant, on obtient

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma+\delta}, \\ \text{Surf. } Q'\text{d.} &= \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(-\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta)}. \end{aligned}\right\} \text{(CCLXIX)}$$

160. D'après ce qui précède, il est facile de voir qu'on passe du quadrilatère circonscriptible convexe

1° au quadrilatère circonscriptible à angle rentrant, en changeant le signe du segment γ;

2° au quadrilatère circonscriptible étoilé, en changeant le gne de γ et δ;

3° au quadrilatère ex-circonscriptible convexe, en hangeant le signe de β et δ;

4° au quadrilatère ex-circonscriptible à angle rentrant, en changeant le signe de β, γ et δ;

5° au quadrilatère ex-circonscriptible étoilé, en hangeant le signe de α et β.

Dans le quadrilatère circonscriptible convexe, ou ex-circonscriptible convexe, α représente toujours le plus grand segment angentiel du périmètre. La notation des segments dans les

quatre autres quadrilatères circonscriptibles est subordonné cette condition.

§. XV. Quadrilatère inscriptible et circonscriptible.

161. Condition pour qu'un quadrilatère soit à la fois ins tible et circonscriptible. On l'obtient nécessairement, en expri que les angles opposés sont supplémentaires dans le quadril circonscriptible, c'est-à-dire, en égalant les valeurs (CLXXI $\sin(A, B)$, $\sin(C, D)$. On trouve ainsi la relation

$$\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}=\frac{\gamma}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)},$$

ou

$$\alpha(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)=\gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\delta),$$

qui donne

$$(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha-\gamma)=0,$$

d'où on tire $\alpha\gamma=\beta\delta$. Donc

Théorème I. Pour qu'un quadrilatère circonscript soit en même temps inscriptible, il faut et il suffit le produit de deux segments opposés soit égal au duit des deux autres segments.

162. Segments tangentiels en valeur des côtés. Représe par a, b, c, d les quatre côtés consécutifs du quadrilatère, et s

$$\delta+\alpha=a,\quad \alpha+\beta=b,\quad \beta+\gamma=c,\quad \gamma+\delta=d;$$

nous en tirons les valeurs

$$\beta=b-\alpha,\quad \gamma=b-a+\alpha,\quad \delta=c-b+a-\alpha,$$

qui, étant substituées dans la relation de condition $\alpha\gamma=\beta\delta$, do

$$\alpha=\frac{a(a+c-d)}{a+c}=\frac{ab}{a+c}.$$

On a donc, pour les segments, les valeurs

$$\alpha=\frac{ab}{a+c},\quad \beta=\frac{bc}{a+c},\quad \gamma=\frac{cd}{a+c},\quad \delta=\frac{da}{a+c}.\quad \text{(CCI}$$

Ainsi

Théorème II. Lorsqu'un quadrilatère est à la inscriptible et circonscriptible, chaque segment gentiel est égal au produit des deux côtés qui le tiennent, divisé par le demi-périmètre.

163. Rayon du cercle inscrit. En représentant ce rayon par , nous avons

$$r^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{\alpha\gamma(\beta + \frac{\beta\delta}{\gamma} + \delta + \frac{\beta\delta}{\alpha})}{\alpha+\beta+\gamma+\delta};$$

relation $\alpha\gamma = \beta\delta$ réduit le numérateur à $\alpha\gamma(\beta+\alpha+\delta+\gamma)$; il ient donc

$$r^2 = \alpha\gamma = \beta\delta. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(CCLXXI)}$$

lonc

Théorème III. Lorsqu'un quadrilatère est à la fois nscriptible et circonscriptible, le rayon du cercle in- crit est moyen proportionnel entre les segments op- osés du quadrilatère.

Si nous mettons à la place de α, γ leurs valeurs (CCLXX), ous avons encore

$$r^2 = \frac{abcd}{(a+c)^2} = \frac{abcd}{(b+d)^2}. \quad \ldots\ldots \text{(CCLXXII)}$$

164. Surface du quadrilatère. L'aire du quadrilatère étant gale à $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)r = (a+c)r$, on obtient de suite

$$Q = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sqrt{\alpha\gamma} = \sqrt{abcd}. \ldots \text{(CCLXXIII)}$$

insi

Théorème IV. La surface du quadrilatère, qui est à fois inscriptible et circonscriptible, est égale à la cine carrée du produit des quatre côtés.

165. Quotient des diagonales. Les égalités (CCLXX) donnent

$$\alpha+\gamma = \frac{ab+cd}{a+c}, \quad \beta+\delta = \frac{ad+bc}{a+c}; \ldots \text{(CCLXXIV)}$$

où on tire

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{x}{y},$$

et y désignant les diagonales du quadrilatère. Donc

Théorème V. Lorsqu'un quadrilatère est à la fois in- criptible et circonscriptible, les diagonales sont entre lles comme les sommes des segments opposés qui boutissent à ces diagonales.

166. Produit des diagonales. Nous avons

$ac+bd=(\delta+\alpha)(\beta+\gamma)+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+2\alpha\gamma+2\beta\delta;$

il vient donc

$$xy=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+4\beta\delta. \quad \text{(CCLXXV)}$$

167. Diagonales. En combinant par multiplication et division les deux dernières formules, nous obtenons

$$\frac{x^2}{\alpha+\gamma}=\alpha+\gamma+\frac{4\alpha\gamma}{\beta+\delta}, \quad \frac{y^2}{\beta+\delta}=\beta+\delta+\frac{4\beta\delta}{\alpha+\gamma}. \quad \text{(CCLXXVI)}$$

168. Angle des diagonales. Nous avons trouvé (n° 110) que

$$xy\cos(x,y)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta);$$

on en tire

$$\cos(x,y)=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)}{\alpha(\beta+\gamma)^2+\gamma(\beta+\alpha)^2};\ldots\text{(CCLXXVII)}$$

et, par suite

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(x,y)&=\sqrt{\frac{\gamma(\beta+\alpha)^2}{\alpha(\beta+\gamma)^2+\gamma(\beta+\alpha)^2}},\\ \cos\tfrac{1}{2}(x,y)&=\sqrt{\frac{\alpha(\beta+\gamma)^2}{\alpha(\beta+\gamma)^2+\gamma(\beta+\alpha)^2}},\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x,y)&=\frac{\beta+\alpha}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}};\end{aligned}\right\}\text{(CCLXXVIII)}$$

puis

$$\left.\begin{aligned}\sin(x,y)&=\frac{2(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha(\beta+\gamma)^2+\gamma(\beta+\alpha)^2},\\ \operatorname{tang}(x,y)&=\frac{2(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}.\end{aligned}\right\}\text{(CCLXXIX)}$$

169. Segments des diagonales. Les formules du n° 109 nous donnent

$$\frac{x'^2-\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{y'^2-\beta^2}{\beta^2}=\frac{x''^2-\gamma^2}{\gamma^2}=\frac{y''^2-\delta^2}{\delta^2}=\frac{4\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}. \quad \text{(CCLXXX)}$$

170. Distances des sommets au centre du cercle inscrit. Nous représenterons ces distances par A, B, C, D. Au n° 96 nous avons trouvé

$$A^2=\frac{ab}{a+c}.(\alpha+\gamma);$$

or, par (CCLXX), nous avons $\frac{ab}{a+c}=\alpha$; il vient donc

$$A^2=\alpha(\alpha+\gamma),\quad B^2=\beta(\beta+\delta),\quad C^2=\gamma(\gamma+\alpha),\quad D^2=\delta(\delta+\beta). \quad \text{(CCLXXXI)}$$

es valeurs donnent

$$A^2+B^2+C^2+D^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+4r^2.$$

171. Angles compris entre les côtés adjacents. Les égalités

$$r=A\sin\tfrac{1}{2}A,\quad \alpha=A\cos\tfrac{1}{2}A,\quad r=\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A$$

nnent de suite

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}},\quad \cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}};\quad \text{(CCLXXXII)}$$

où on tire

$$\sin A=\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha+\gamma},\quad \cos A=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma},\quad \operatorname{tang}A=\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha-\gamma}=\frac{2r}{\alpha-\gamma}.\quad \text{(CCLXXXIII)}$$

172. Angles compris entre les côtés opposés. Les égalités du 162 donnent, eu égard à la relation $a+c=b+d$

$$p-a=a+c-a=c,\quad p-b=b+d-b=d,$$
$$p-c=a+c-c=a,\quad p-d=b+d-d=b;$$

$$ab+cd=(\alpha+\gamma)(a+c)=(\alpha+\gamma)(b+d),$$
$$ad+bc=(\beta+\delta)(a+c)=(\beta+\delta)(b+d).$$

bstituons ces valeurs dans les valeurs du n° 28, et nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(a,c)&=\frac{b-d}{b+d}\sqrt{\frac{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}},\\ \sin\tfrac{1}{2}(b,d)&=\frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}};\end{aligned}\right\}\quad \text{(CCLXXXIV)}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(a,c)&=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}},\\ \cos\tfrac{1}{2}(b,d)&=\sqrt{\frac{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}};\end{aligned}\right\}\quad \text{(CCLXXXV)}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a,c)&=\frac{b-d}{b+d}\sqrt{\frac{ac}{bd}},\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b,d)&=\frac{a-c}{a+c}\sqrt{\frac{bd}{ac}}.\end{aligned}\right\}\quad \text{(CCLXXXVI)}$$

De ces valeurs nous tirons immédiatement

$$\left.\begin{aligned} \sin(a, c) &= \frac{b-d}{b+d} \times \frac{\sqrt{abcd}}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}, \\ \sin(b, d) &= \frac{a-c}{a+c} \times \frac{\sqrt{abcd}}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}, \end{aligned}\right\} \text{(CCLXXXVII)}$$

173. **Distances du centre du cercle inscrit aux points de concours des côtés opposés.** Nous avons

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 2\alpha\gamma(a+c) = 2\beta\delta(b+d),$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{a-c}{a+c} \times bd, \quad \alpha\beta - \gamma\delta = \frac{b-d}{b+d} \times ac;$$

substituant ces valeurs dans les expressions du n° 102, on obtient

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{a+c}{a-c}\sqrt{\frac{2\beta\delta(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{bd}}, \\ N &= \frac{b+d}{b-d}\sqrt{\frac{2\alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{ac}}. \end{aligned}\right\} \text{(CCLXXXVIII)}$$

174. **Distances des points de contact du cercle inscrit aux points de concours des côtés opposés.** Les équations du n° 103 donnent de suite

$$\left.\begin{aligned} PM = RM &= \frac{2\beta\delta}{bd} \times \frac{(a+c)^2}{a-c}, \\ QN = SN &= \frac{2\alpha\gamma}{ac} \times \frac{(b+d)^2}{b-d}, \end{aligned}\right\} \text{(CCLXXXIX)}$$

où P, Q, R, S désignent les points où le cercle inscrit touche les côtés.

175. **Distances des quatre sommets du quadrilatère aux points de concours des côtés opposés.** Les valeurs du n° 104 deviennent, par notre hypothèse d'inscriptibilité du quadrilatère,

$$\left.\begin{aligned} AM &= \frac{a\delta(\alpha+\gamma)}{bd} \times \frac{a+c}{a-c}, & AN &= \frac{a\beta(\alpha+\gamma)}{ac} \times \frac{b+d}{b-d}, \\ BM &= \frac{b\alpha(\beta+\delta)}{bd} \times \frac{a+c}{a-c}, & BN &= \frac{b\gamma(\beta+\delta)}{ac} \times \frac{b+d}{b-d}, \\ CM &= \frac{c\beta(\alpha+\gamma)}{bd} \times \frac{a+c}{a-c}, & CN &= \frac{c\delta(\alpha+\gamma)}{ac} \times \frac{b+d}{b-d}, \\ DM &= \frac{d\gamma(\beta+\delta)}{bd} \times \frac{a+c}{a-c}; & DN &= \frac{d\alpha(\beta+\delta)}{ac} \times \frac{b+d}{b-d}. \end{aligned}\right\} \text{(CCXC)}$$

§. XVI. Quadrilatère circonscriptible à deux cercles.

176. Le quadrilatère circonscriptible à deux cercles est un
apèze étoilé, qui est inscriptible dans le cercle construit sur la
stance des centres comme diamètre.

Soient O, O' les centres des deux cercles, R, R' leurs rayons
t D la distance des centres.

Représentons par a chaque côté transversal du quadrilatère,
ngent intérieurement aux deux cercles, et par b chaque côté
ngent extérieurement à ces cercles; désignons, de plus, par
, y les deux diagonales du quadrilatère: elles sont perpendicu-
ires à la ligne des centres, et interceptent sur cette ligne un
egment que nous appellerons d.

Indiquons enfin par 2α, 2β les angles compris entre les côtés
pposés du quadrilatère, exprimés les uns par a et les autres par b.

177. Nous avons de suite

$$d = a\cos\alpha = b\cos\beta, \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{CCXCI})$$

$$D\sin\alpha = R + R', \quad D\sin\beta = R - R'. \quad \ldots (\mathrm{CCXCII})$$

a relation (CCXCI) exprime que

Théorème I. Les côtés du quadrilatère circonscrip-
ible à deux cercles sont inversement proportionnels
ux cosinus de leurs inclinaisons sur la ligne des
entres.

Et les égalités (CCXCII) donnent

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \frac{4RR'}{D^2}; \quad \ldots\ldots (1)$$

les font en même temps connaître les inclinaisons mutuel-
es des côtés opposés du quadrilatère.

178. Le point de concours I des deux tangentes intérieures
t celui E des deux tangentes extérieures divisent la distance des
entres $OO' = D$ en parties harmoniques dans le rapport de R
R'; si donc des points I, E nous abaissons les perpendicu-
aires p, q sur les tangentes qui n'y passent point, et que nous
ppelions P, Q les pieds de ces perpendiculaires, les points P,
, situés sur b, diviseront harmoniquement, dans le même rap-
ort, l'intervalle $D\cos\beta$ compris entre les points de contact du

côté b; et les points I, Q partageront harmoniquement, dans l[e] même rapport de R à R', la distance $D\cos\alpha$ qui sépare les point[s] de contact du côté a. D'après cela, il est aisé de voir qu'on [a] la proportion

$$\frac{R-p}{p-R'}=\frac{R}{R'},$$

d'où l'on tire

$$p=\frac{2RR'}{R+R'}=\frac{2RR'}{D\sin\alpha}. \quad \ldots\ldots (\text{CCXCI}$$

On trouverait de même

$$q=\frac{2RR'}{R-R'}=\frac{2RR'}{D\sin\beta}. \quad \ldots\ldots (\text{CCXCI}$$

179. Désignons par a', a'' les deux segments que déterm[ine] le point I sur le côté a; la perpendiculaire p forme avec les d[eux] tangentes intérieures et le côté b deux triangles rectangles [qui] donnent

$$p=a'\sin(\alpha-\beta)=a''\sin(\alpha+\beta),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a'+a''}{p}=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta},$$

ou, en ayant égard à (I) et (CCXCIII),

$$a=\frac{2\cos\beta\times p\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=2\cos\beta\times\frac{2RR'}{D}\times\frac{D^2}{4RR'}.$$

On a donc

$$a=D\cos\beta,\quad b=D\cos\alpha. \quad \ldots\ldots (\text{CCX}$$

Ainsi

Théorème II. Dans le quadrilatère circonscripti[ble] à deux cercles, chaque côté est égal à la distance [des] centres projetée sur l'autre côté (côté adjacent), ou enc[ore]

Chaque côté est égal à la distance qui sépare [les] points de contact situés sur l'autre côté.

180. Dans les expressions (CCXCV), mettons à la plac[e de] $\cos\beta$, $\cos\alpha$ leurs valeurs tirées des équations (CCXCII), et [éle]vons au carré; nous trouvons pour les carrés des côtés

$$\left.\begin{aligned} a^2&=(D+R-R')(D+R'-R),\\ b^2&=(D+R+R')(D-R-R'). \end{aligned}\right\}\ldots (\text{CCX}$$

181. Les égalités (CCXCI) et (CCXCV) donnent les relations [re]marquables

$$d = D\cos\alpha\cos\beta, \quad \ldots\ldots \quad \text{(CCXCVII)}$$

$$ab = Dd, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(CCXCVIII)}$$

[do]nt la dernière exprime que:

Théorème III. 1° Le produit des côtés du quadrila[tè]re circonscriptible à deux cercles est égal à la di[s]tance des centres multipliée par la distance des dia[g]onales.

2° Le produit des deux tangentes, l'une intérieure [e]t l'autre extérieure, est égal à la distance des cen[t]res multipliée par la distance des cordes qui joignent [l]es points de concours des tangentes.

182. Par l'égalité (CCXCVIII), on a de suite, pour le carré [d]e la distance des diagonales

$$d^2 = \frac{(D+R+R')(D+R-R')(D+R'-R)(D-R-R')}{D^2}. \quad \text{(CCXCIX)}$$

183. Passons aux diagonales. Le quadrilatère considéré [c]omme convexe etant inscriptible, on a

$$a \times a = xy + b \times b.$$

[d]'où

$$xy = a^2 - b^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(CCC)}$$

[D]onc

Théorème IV. Le produit des diagonales est égal à [la] différence des carrés des côtés adjacents.

184. Les relations (CCXCVI) donnent

$$a^2 - b^2 = D^2 - (R - R')^2 - D^2 + (R + R')^2 = 4RR',$$

[de] sorte que

$$xy = 4RR', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(CCCI)}$$

[c]est-à-dire que:

Théorème V. Le produit des diagonales est égal au [p]roduit des diamètres des deux cercles.

185. Par les deux extrémités de la droite qui joint les points [d]e concours des tangentes dans le cercle O', menons des paral[lè]les à la ligne des centres jusqu'à la rencontre de la droite qui

joint les points de concours des tangentes dans le cercle
nous formons deux triangles rectangles qui donnent

$$x+y=2a\sin\alpha,\quad x-y=2b\sin\beta,\ \ldots\ldots$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{array}{l} x=a\sin\alpha+b\sin\beta, \\ y=a\sin\alpha-b\sin\beta, \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots$$

et, en ayant égard aux valeurs (CCXCII) et (CCXCVI),

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ \quad +\dfrac{R-R'}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}, \\ y=\dfrac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ \quad +\dfrac{R'-R}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}; \end{array}\right\}\ (\text{CC}$$

telles sont les valeurs des deux diagonales.

186. Si nous introduisons les valeurs (CCXCVI) dans
égalités (2), nous obtenons

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2D\sin\alpha\cos\beta, \\ x-y=2D\sin\beta\cos\alpha, \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots$$

qui donnent

$$x=D\sin(\alpha+\beta),\quad y=D\sin(\alpha-\beta);\ \ldots\ (\text{CCC}$$

d'où

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},\ \ldots\ldots\ (\text{CCC}$$

et, par suite

$$\left.\begin{array}{l} x^2=\dfrac{4RR'\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \\ y^2=\dfrac{4RR'\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (\text{CC}$$

187. Des relations (4) on tire encore

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta},\ \ldots\ldots\ (\text{CC(}$$

qui démontre que:

Théorème VI. Dans tout quadrilatère circonsc

le à deux cercles, la somme des deux diagonales est eur différence comme la tangente du demi-angle des és intérieurs est à la tangente du demi-angle des tés extérieurs.

188. Les mêmes relations (4) donnent aussi

$$x^2-y^2=4D^2\cos\alpha\cos\beta\times\sin\alpha\sin\beta=4Dd\sin\alpha\sin\beta.$$

par (CCXCII) on a

$$4R^2-4R'^2=4D^2\sin\alpha\sin\beta;$$

vient donc, en divisant,

$$\frac{x^2-y^2}{4R^2-4R'^2}=\frac{d}{D}. \quad \text{(CCCVII)}$$

insi

Théorème VII. La différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des diamètres, comme distance des diagonales est à la distance des centres.

189. Elévons au carré la seconde des égalités (4), nous obtenons

$$x^2+y^2=2xy+4D^2\sin^2\beta\cos^2\alpha.$$

Substituons les valeurs fournies par (CCCI) et (CCXCII) et nous avons pour la somme des carrés des diagonales

$$x^2+y^2=\frac{4R^2}{D^2}(D^2+R'^2-R^2)+\frac{4R'^2}{D^2}(D^2+R^2-R'^2), \quad \text{(CCCVIII)}$$

où, en vertu de (CCCI),

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{D^2+R'^2-R^2}{D^2}+\frac{R'}{R}\cdot\frac{D^2+R^2-R'^2}{D^2}. \quad \text{(CCCIX)}$$

190. Pour avoir les distances c, c' des sommets du quadrilatère aux points de contact les plus rapprochés, il suffit de résoudre les deux équations

$$c+c'=a-b, \quad \frac{c}{c'}=\frac{R}{R'},$$

qui donnent

$$c=\frac{R(a-b)}{R+R'}, \quad c'=\frac{R'(a-b)}{R+R'}. \quad \text{(CCCX)}$$

On trouve encore, par l'inspection directe de la figure,

$$c=R\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta), \quad c'=R'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta). \quad \text{(CCCXI)}$$

191. Les distances δ, δ' des centres O, O' aux sommets quadrilatère les plus rapprochés sont données par les mê triangles, dont on tire

$$\delta = \frac{R}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \delta' = \frac{R'}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}. \quad . \; . \; . \; (\mathrm{CCC}$$

§. XVII. Trapèze convexe.

192. **Relations entre les diagonales et les côtés.** Suppos que dans le quadrilatère $ABCD$, les quatre côtés soient

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d;$$

$$BD = x, \quad AC = y$$

les deux diagonales, et que le côté CD soit parallèle à AB plus petit que lui.

Considérons les quatre triangles ABD et BCD, ACD ABC qui sont formés chacun par deux côtés et une diagona ils nous fournissent les quatre équations

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A, \quad x^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos B,$$
$$y^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos A, \quad y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B,$$

qui, étant débarrassées de $\cos A$ et $\cos B$, donnent les d égalités

$$cx^2 + ay^2 = (a+c)(d^2+ac),$$
$$ax^2 + cy^2 = (a+c)(b^2+ac);$$

ajoutant et retranchant successivement, nous obtenons les d relations

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = b^2 + d^2 + 2ac, \\ \dfrac{x^2-y^2}{b^2-d^2} = \dfrac{a+c}{a-c}. \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{CCC}$$

Elles démontrent que

Théorème I. Dans tout trapèze convexe,

1° la somme des carrés des diagonales est ég à la somme des carrés des côtés latéraux, augmen du double rectangle des bases;

2° la différence des carrés des diagonales est à

férence des carrés des côtés latéraux, comme la somme des bases est à leur différence.

193. Valeur des diagonales. Des deux dernières relations on tire

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= (ac-bd)+(ab-cd)\times\frac{b+d}{a-c}, \\ y^2 &= (ac-bd)+(ad-bc)\times\frac{b+d}{a-c}. \end{aligned}\right\} \ldots (\text{CCCXIII})$$

Si l'on voulait exprimer les côtés latéraux en fonction des diagonales et des bases, on trouverait facilement

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{ax^2+cy^2}{a+c}-ac, \\ d^2 &= \frac{ay^2+cx^2}{a+c}-ac. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\text{CCCXIV})$$

194. Angle des diagonales. Si nous remplaçons b^2+d^2 par sa valeur x^2+y^2-2ac dans l'expression générale (n° **11**)

$$2xy\cos(x, y) = a^2-b^2+c^2-d^2,$$

nous trouverons de suite

$$\cos(x, y) = \frac{(a+c)^2-(x^2+y^2)}{2xy}; \quad \ldots (\text{CCCXV})$$

qui donne

$$\sin\tfrac{1}{2}(x, y) = \sqrt{\frac{1-\cos(x, y)}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+y)^2-(a+c)^2}{xy}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(x, y) = \sqrt{\frac{1+\cos(x, y)}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c)^2-(x-y)^2}{xy}};$$

en développant

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(x, y) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c+x+y)(x+y-a-c)}{xy}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(x, y) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c+x-y)(a+c+y-x)}{xy}}; \end{aligned}\right\} (\text{CCCXV})$$

où

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x, y) = \sqrt{\frac{(a+c+x+y)(x+y-a-c)}{(a+c+x-y)(a+c+y-x)}}; \quad (\text{CCCXVI})$$

L'angle au sommet de ce triangle est égal à celui des diagonales.

Il est aisé de démontrer ce résultat par la Géométrie. Il suffit, pour cela, de prolonger chaque diagonale, en dessous de la base inférieure, d'une longueur égale au segment supérieur, et de mener la droite qui joint les extrémités des prolongements; cette ligne est égale à la somme des bases.

§. XVIII. Trapèze circonscriptible.

198. Représentons par α, β, γ, δ les quatre segments tangentiels comptés sur les côtés du trapèze, O le centre et R le rayon du cercle inscrit; soient d'ailleurs

$$a=\alpha+\beta,\quad b=\beta+\gamma,\quad c=\gamma+\delta,\quad d=\delta+\alpha.$$

Rayon du cercle inscrit. Les deux triangles ADO, BCO sont nécessairement rectangles en O, et donnent, par suite,

$$R^2=\alpha\delta=\beta\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(CCCXXVII)}$$

Donc

Théorème I. Dans tout trapèze circonscriptible, le rayon du cercle inscrit est moyen proportionnel entre les deux segments de chaque côté latéral.

L'égalité $\alpha\delta=\beta\gamma$ revient à

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$

qui démontre que

Théorème II. Dans tout trapèze circonscriptible, les segments consécutifs des côtés, comptés à partir d'une base, sont proportionnels entre eux.

199. **Diagonales.** La condition de circonscriptibilité du trapèze étant introduite dans les valeurs du n°. 193, donne

$$\left.\begin{aligned} x^2&=(\alpha+\gamma)^2+4\alpha\delta=(\alpha+\gamma)^2+4\beta\gamma,\\ y^2&=(\beta+\delta)^2+4\beta\gamma=(\beta+\delta)^2+4\alpha\delta;\end{aligned}\right\} \text{(CCCXXVIII)}$$

d'où on tire

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),\\ x^2-y^2&=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta).\end{aligned}\right\} \text{(CCCXXIX)}$$

200. **Angle des diagonales.** Nous avons

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(\alpha-\gamma)(\beta-\delta),$$

t, comme

$$\beta - \delta = \beta - \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha-\gamma),$$

vient

$$\text{ng}\,(x,y) = \frac{2\alpha Q}{\beta(\alpha-\gamma)^2} = \frac{2\beta Q}{\alpha(\beta-\delta)^2} = \frac{2\gamma Q}{\delta(\alpha-\gamma)^2} = \frac{2\delta Q}{\gamma(\beta-\delta)^2}. \quad \text{(CCCXXX)}$$

201. Angle des côtés latéraux. Les valeurs du n° 195 donnent

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(bd) &= (\alpha-\gamma)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha bd}}, \\ \cos\tfrac{1}{2}(bd) &= (\alpha+\beta)\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha bd}}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(bd) &= \frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; \text{(CCCXXXI)}$$

202. Surface du trapèze. L'aire du trapèze circonscriptible est

$$Q = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad . \; . \; . \; \text{(CCCXXXII)}$$

u

$$\left.\begin{aligned} Q &= (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} = (\beta+\alpha)(\beta+\delta)\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \\ &= (\gamma+\alpha)(\gamma+\delta)\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} = (\delta+\beta)(\delta+\gamma)\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}. \end{aligned}\right\} \text{(CCCXXXIII)}$$

es dernières valeurs on tire

$$Q = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}, \quad \text{(CCCXXXIV)}$$

bien

$$Q = \sqrt{ac(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}; \quad . \; . \; . \; \text{(CCCXXXV)}$$

$$Q = (\alpha+\gamma)\sqrt{\frac{ac\beta}{\alpha}} = (\beta+\delta)\sqrt{\frac{ac\alpha}{\beta}}. \quad \text{(CCCXXXVI)}$$

203. Distances des sommets au centre du cercle inscrit. Nous vons $AO^2 = R^2 + \alpha^2 = \alpha\delta + \alpha^2$,

u

uis

$$\left.\begin{aligned} AO^2 &= \alpha(\alpha+\delta), \\ BO^2 &= \beta(\beta+\gamma), \\ CO^2 &= \gamma(\gamma+\beta), \\ DO^2 &= \delta(\delta+\alpha). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; \text{(CCCXXXVII)}$$

Ces valeurs prouvent que

Théorème III. Dans tout trapèze circonscriptible droites qui joignent les sommets au centre du ce inscrit, sont chacune moyenne proportionnelle e le côté latéral et le segment adjacent de la base.

Ce résultat est donné d'ailleurs par l'inspection immédiat triangle rectangle ADO.

204. **Angles du trapèze.** Les demi-angles sont donnée les formules

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{R^2}{AO^2} = \frac{\alpha\delta}{\alpha(\alpha+\delta)}, \text{ etc.}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{A}{2} = \cos^2\frac{D}{2} = \frac{\delta}{\alpha+\delta}, \quad \sin^2\frac{B}{2} = \cos^2\frac{C}{2} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}; \\ \sin^2\frac{D}{2} = \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\delta}, \quad \sin^2\frac{C}{2} = \cos^2\frac{B}{2} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}; \end{aligned}\right\} \text{(CCCXXX}$$

d'où on tire

$$\left.\begin{aligned} \sin A = \sin D = \frac{2\sqrt{\alpha\delta}}{\alpha+\delta}, \\ \sin B = \sin C = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\beta+\gamma}; \end{aligned}\right\} \; . \; . \text{(CCCXX}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A = -\cos D = \frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta}, \\ \cos B = -\cos C = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}; \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \text{(CCC}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} A = -\operatorname{tang} D = \frac{2\sqrt{\alpha\delta}}{\alpha-\delta}, \\ \operatorname{tang} B = -\operatorname{tang} C = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\beta-\gamma}; \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \text{(CCC}$$

$$(\alpha-\delta)\operatorname{tang} A = (\beta-\gamma)\operatorname{tang} B. \; . \; . \; . \text{(CCCX}$$

205. **Eléments du quadrilatère inscrit, formé par la jon des points de contact du trapèze circonscrit.** Il est aisé de tro

1° pour les carrés des côtés:

$$\frac{4\alpha^2\delta}{\alpha+\delta}, \quad \frac{4\beta^2\gamma}{\beta+\gamma}, \quad \frac{4\gamma^2\beta}{\beta+\gamma}, \quad \frac{4\delta^2\alpha}{\alpha+\delta};$$

2° pour la diagonale transversale:

$$2R\sqrt{\frac{bd}{ac}}=\frac{2\sqrt{\beta(\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma)}}{\alpha+\beta};$$

3° pour les angles opposés à cette diagonale:

$$\sin^2\theta=\sqrt{\frac{bd}{ac}},\quad \cos^2\theta=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)};$$

4° pour la surface du quadrilatère:

$$\frac{q}{Q}=\frac{2\delta^2(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\delta+\gamma)(\delta+\alpha)}.$$

§. XIX. Trapèze étoilé.

206. Dans ce trapèze, les côtés AD, BC se croisent entre es deux bases AB, CD. Conservons les notations du n° 192. Les quatre triangles ABD et BCD, ACD et ABC nous donnent es quatre équations

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos A,\quad x^2=b^2+c^2-2bc\cos B,$$
$$y^2=c^2+d^2-2cd\cos A,\quad y^2=a^2+b^2-2ab\cos B,$$

ui, par l'élimination de $\cos A$ et $\cos B$, fournissent les égalités

$$cx^2-ay^2=(a-c)(ac-d^2),$$
$$ax^2-cy^2=(a-c)(b^2-ac);$$

tranchant et ajoutant successivement, nous obtenons les deux lations

$$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2=b^2+d^2-2ac,\\&\frac{x^2-y^2}{b^2-d^2}=\frac{a-c}{a+c}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\text{(CCCXLVII)}$$

Elles prouvent que

Théorème I. Dans tout trapèze étoilé,

1° la somme des carrés des diagonales est égale à a somme des carrés des côtés latéraux, **diminuée** du ouble rectangle des bases;

2° la différence des carrés des diagonales est à la ifférence des carrés des côtés latéraux, comme la ifférence des bases est à leur somme.

Les relations précédentes peuvent se déduire de celles qui ppartiennent au trapèze convexe, en y changeant le signe de la ase c.

207. **Valeur des diagonales.** Des deux dernières relations on ti

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= (ab+cd)\times\frac{b+d}{a+c}-(ac+bd),\\ y^2 &= (ad+bc)\times\frac{b+d}{a+c}-(ac+bd). \end{aligned}\right\}\ \text{(CCCXLVI}$$

Si l'on voulait avoir b et d en valeur de a et c, x et y, trouverait facilement que

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{ax^2-cy^2}{a-c}+ac,\\ d^2 &= \frac{ay^2-cx^2}{a-c}+ac. \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ \text{(CCCXL}$$

208. **Angle des diagonales.** En opérant comme au n° 194, trouve

$$\cos(x,y)=\frac{(a-c)^2-(x^2+y^2)}{2xy};\ .\ .\ .\ .\ \text{(CC}$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(x,y) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+x+y-c)(c+x+y-a)}{xy}},\\ \cos\tfrac{1}{2}(x,y) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+x-c-y)(a+y-c-x)}{xy}},\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x,y) &= \sqrt{\frac{(x+y+a-c)(x+y+c-a)}{(x-y+a-c)(y-x+a-c)}}; \end{aligned}\right\}\ \text{(CCC}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(x,y)\\ &=\frac{\sqrt{(x+y+a-c)(x+y+c-a)(x-y+a-c)(y-x+a-c)}}{2xy},\\ &\operatorname{tang}(x,y)\\ &=\frac{\sqrt{(x+y+a-c)(x+y+c-a)(a-c+x-y)(a-c+y-x)}}{(a-c)^2-(x^2+y^2)}. \end{aligned}\right\}\ \text{(CCC}$$

Lorsque l'angle $(x,y)=90^0$ on a $x^2+y^2=(a-c)^2$. D

Théorème II. Pour que les diagonales d'un trapè étoilé se coupent à angle droit, il faut et il suffit q le triangle rectangle construit sur les deux diago les, ait l'hypothénuse égale à la différence des bas

209. Nous pouvons nous dispenser de calculer directem les valeurs des autres éléments du trapèze étoilé; elles se dé

ent de celles du trapèze convexe, en y changeant le signe de c.
e cette manière nous obtenons

$$\text{tang}\,(x,y)=\frac{a-c}{a+c}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+d-a-c)}}{a^2-b^2+c^2-d^2},\quad \text{(CCCLIII)}$$

our la tangente de l'angle des diagonales en valeur es côtés; puis

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(b,d)&=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a+c+d-b)}{bd}},\\ \cos\tfrac{1}{2}(b,d)&=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c+d)\,(b+d-a-c)}{bd}},\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b,d)&=\sqrt{\frac{(a+b+c-d)\,(a+c+d-b)}{(a+b+c+d)\,(b+d-a-c)}};\end{aligned}\right\}\ \text{(CCCLIII)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin\,(b,d)\\ &=\frac{\sqrt{(a+b+c+d)(a+c+d-b)(a+b+c-d)(b+d-a-c)}}{2bd},\\ &\cos\,(b,d)=\frac{(b^2+d^2)-(a+c)^2}{2bd}\end{aligned}\right\}\ \text{(CCCLIV)}$$

our l'angle des côtés latéraux;

$$\frac{\sin\,(x,y)}{\sin\,(b,d)}=\frac{a-c}{a+c}:\frac{xy}{bd}\ \ldots\ldots\ \text{(CCCLV)}$$

suite

$$4l^2=2\,(x^2+y^2)-(a-c)^2\ \ldots.\ \text{(CCCLVI)}$$

ur la droite qui joint les milieux des deux bases. Si ngle $(x,y)=90^0$, on a $x^2+y^2=(a-c)^2$ et $2l=a-c$. Donc

Théorème III. Lorsque les diagonales d'un trapèze toilé se coupent à angle droit, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont égales entre lles.

210. On trouve ensuite

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+a-c)(x+y+c-a)(a-c+x-y)(a-c+y-x)}\ \text{(CCCLVII)}$$

our la surface du trapèze en valeur des diagonales et es deux bases. Comme cette expression est l'aire d'un triangle dont les côtés sont x, y et $a-c$, on voit que

Théorème IV. Le trapèze étoilé est équivalent au triangle construit sur les deux diagonales et la différence des bases.

§. XI. Parallélogramme.

211. Soient a, b les côtés adjacents d'un parallélogramme, x, y les deux diagonales. Supposons $a > b$ et $x > y$. Si nous désignons par (a, b) l'angle aigu compris entre les côtés, et par (x, y) l'angle aigu formé par les diagonales, nous aurons les relations

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(a, b),$$
$$y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b);$$

$$4a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos(x, y),$$
$$4b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(x, y);$$

dont les deux premières donnent

$$x^2 - y^2 = 4ab\cos(a, b), \quad \ldots \ldots (\text{CCCLVIII})$$

et les deux dernières

$$a^2 - b^2 = xy\cos(x, y); \quad \ldots \ldots (\text{CCCLIX})$$

on en tire

$$\cos(x, y)\cos(a, b) = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{x+y}{x}\cdot\frac{x-y}{y}\cdot\frac{a+b}{a}\cdot\frac{a-b}{b}. \quad (\text{CCCLX})$$

212. La double surface du parallélogramme étant

$$xy\sin(x, y) = 2ab\sin(a, b)$$

on en déduit, en ayant égard à (CCCLVIII) et (CCCLIX),

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\tang(x, y)}{\sin(a, b)} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}, \\[2ex] \dfrac{\tang(a, b)}{\sin(x, y)} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (\text{CCCLXI})$$

213. Ces relations, qui auraient pu se tirer des formules générales d'un quadrilatère quelconque, en y faisant $a = c$, $b = d$, demontrent que

Dans tout parallélogramme

1° la différence des carrés des diagonales est égale au quadruple produit des côtés adjacents, multiplié par le cosinus de l'angle compris;

2° la différence des carrés de deux côtés adjacents

st égale au produit des diagonales, multiplié par le osinus de l'angle compris;

3° le sinus de l'angle des diagonales est au sinus e l'angle des côtés, comme le double produit des eux côtés est au produit des diagonales;

4° la tangente de l'angle des diagonales est au inus de l'angle des côtés, comme le double produit de eux côtés adjacents est à la différence des carrés de es côtés;

5° la tangente de l'angle des côtés est au sinus de angle des diagonales comme le double produit des iagonales est à la différence des carrés de ces diaonales.

214. Dans l'expression de l'aire d'un quadrilatère quelconque

$$Q = \tfrac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2},$$

osons $a = c$, $b = d$; nous avons pour la surface P du parallélogramme en valeur des deux diagonales et des deux côtés

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt{(xy + a^2 - b^2)(xy + b^2 - a^2)} \ldots \text{(CCCLXII)}$$

Dans cette valeur remplaçons $2b^2$ par $x^2 + y^2 - 2a^2$, nous obenons

$$2xy + 2a^2 - 2b^2 = 4a^2 - (x - y)^2 = (2a + x - y)(2a + y - x),$$

$$2xy + 2b^2 - 2a^2 = (x + y)^2 - 4a^2 = (2a + x + y)(x + y - 2a);$$

e qui donne

$$P = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a + x + y)(2a + x - y)(2a + y - x)(x + y - 2a)} \quad \text{(CCCLXIII)}$$

our l'aire du parallélogramme en fonction d'un côté et des deux agonales.

215. Si, dans le parallélogramme, nous avons $x = y$, la figure ra un rectangle et il viendra pour l'angle des diagonales

$$\left.\begin{aligned} \cos(x, y) &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \\ \text{où} \qquad \sin(x, y) &= \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tang}(x, y) &= \frac{2ab}{(a + b)(a - b)}. \end{aligned}\right\} \ldots \text{(CCCLXIV)}$$

Ainsi

Théorème I. **Dans tout rectangle, la tangente l'angle des diagonales est égale au double produit côtés, divisé par la différence des carrés de ces mê côtés.**

On a ensuite

$$\sin\tfrac{1}{2}(x,y)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\tfrac{1}{2}(x,y)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x,y)=\frac{b}{a}.\quad\ldots\ldots\ (\text{CCCL}$$

Donc

Théorème II. **Dans tout rectangle, la tangente du de angle des diagonales est égale au rapport des côté**

Table des matières.

Pages.

§. I. Définitions préliminaires.

§. II. Généralisation de théorèmes connus.

§. III. Propriétés nouvelles du quadrilatère.

§. IV. Quadrilatère inscriptible convexe.

§. IX. Le quadrilatère inscriptible convexe déterminé par le quadrilatère circonscriptible convexe.

§. X. Quadrilatère circonscriptible à angle rentrant.

§. XI. Quadrilatère circonscriptible étoilé.

§. XII. Quadrilatère ex-inscriptible convexe.

§. XIII. Quadrilatère ex-circonscriptible à angle rentrant.

§. XIV. Quadrilatère ex-circonscriptible étoilé.

§. XV. Quadrilatère inscriptible et circonscriptible.

§. XVI. Quadrilatère circonscriptible à deux cercles.

§. XVII. Trapèze convexe.

§. XVIII. Trapèze circonscriptible.

§. XIX. Trapèze étoilé.

§. XX. Parallélogramme.

Erratum.

e premier facteur du nominateur de la dernière formule pour tang(x, y) 194 (sous $\surd$) est $a+b+d-c$ ou $a+b-c+d$ au lieu de $a+b+c+d$.

XXV.

Ueber den Zusammenhang der Seiten des regelmäs-gen Fünf- und Zehnecks und des Radius.

Von

Herrn Oberlehrer *E. Sachse*

an der Realschule zu Rawicz (Provinz Posen).

Der bekannte Satz:

> Wenn in einen Kreis regelmässige Polygo[n] von fünf, sechs und zehn Seiten beschrieb[en] sind, so ist das Quadrat der Fünfecksseite [so] so gross, als die Quadrate der Sechseck-seite (r) und der Zehnecksseite (z) zusamme[n]genommen: $f^2 = r^2 + z^2$. (Euclid. Elem. XIII, 10.)

lässt sich geometrisch auf mehrere Arten einfach beweisen.

[Bekanntlich dient dieser Satz zur directen Construction [der] Fünfecksseite: In Taf. VI. Fig. 10. ziehe man $AB = r$ senkrecht [auf] CD und mache $AC = \frac{1}{2}AB$, $CD = CB$, so ist $AD = z$ und $BD =$

Zunächst gilt folgender

Hülfssatz.

> Trägt man in den um M (Taf. VI. Fig. 1.) mit d[em] Radius $MA = r$ geschlagenen Kreis K die Se[ite] $AB = z$ des in K eingeschriebenen Zehnecks [als] Sehne ein und verlängert sie über B hinaus [bis] C, so dass $AC = r$ wird, und zieht MC, so i[st] I) $AB^2 = AC.BC$ und II) MC gleich der Seit[e] des in K eingeschriebenen regulären Fünfec[ks].

Beweis. (I) ist der bekannte Zehneckssatz, nach welchem $z = z : r - z$, also $z^2 = r(r-z)$ oder AC in B nach dem goldenen chnitt getheilt ist. — (II) ergiebt sich sofort aus der Betrachung des Dreiecks MAC, in welchem $AM = AC = r$ und (weil B die Zehnecksseite darstellt) $\angle MAB = 72^0$ ist.

Auf diesen Hülfssatz stützen sich nun folgende vier Beweise es obigen Satzes:

Beweis 1. (Mittelst des Tangentensatzes.). Ist, wie in Taf. VI. ig. 1., im Kreise K (Taf. VI. Fig. 2.) die Secante $AC = r$, ihre ehne $AB = z$ und CM gezogen, welches nach Hülfssatz II. $= f$ t, so lege man noch die Tangente CD an K und ziehe nach hrem Berührungspunkte D den Radius $MD = r$, so ist $\angle MDC = 90^0$, und daher nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$MC^2 = MD^2 + CD^2 \text{ oder } f^2 = r^2 + CD^2,$$

nd da hierin CD^2 nach dem bekannten Tangentensatze $= CA.CB$, ieses aber nach Hülfssatz I. $= AB^2 = z^2$ zu setzen ist, so folgt: $= r^2 + z^2$.

Beweis 2. (Mittelst des Secantensatzes.). Wiederum sei im reise K (Taf. VI. Fig. 3.) $AB = z$, $AC = r$, und daher nach Hülfstz II. CM, welche K in G schneiden mag, $= f$, so verlängere an CM über M hinaus bis zum zweiten Durchschnitt E mit K, ann ist nach dem bekannten Secantensatze:

$$CE.CG = CA.CB = z^2$$

ach Hülfssatz I., also, da $CE = f + r$, $CG = f - r$ ist,

$$(f+r)(f-r) = z^2, \text{ d. h. } f^2 - r^2 = z^2, \text{ mithin } f^2 = r^2 + z^2.$$

Anmerkung 1. Die Beweise 1. und 2. laufen beide darauf inaus, dass die Potenz des Punktes C in Bezug auf K einerseits $CA.CB$, also nach Hülfssatz I. $= z^2$, andererseits, weil (nach ülfssatz II.) $CM = f$ ist, auch $= f^2 - r^2$ ist, woraus sich $f^2 - r^2 = z^2$ oder $f^2 = r^2 + z^2$ ergiebt.

Beweis 3. (Mittelst des ptolemäischen Lehrsatzes.). Man ache in dem Kreise K (Taf. VI. Fig. 4.), in welchem wiederum $AB = z$, $AC = r$, also nach Hülfssatz II. $CM = f$ ist, den Bogen $BH = BA$, so ist $\angle BMH = 36^0$, $\angle AMH = 72^0$, also $AH = f$, nd, wegen $\angle AMC = 54^0$, $\angle HMC = AMH - AMC = 72^0 - 54^0 = 18^0$ nd auch $\angle BMC = AMC - AMB = 54^0 - 36^0 = 18^0$, also $HMC = BMC$. Hieraus folgt leicht, dass $\Delta HMC \cong BMC$, so $CH = CB$ und $\angle CHM = CBM = 180^0 - MBA = 180^0 - MAC$

ist. Demnach ist $AMHC$ ein Kreisviereck und mithin nach de ptolemäischen Lehrsatze $MC.AH = MH.AC + MA.CH$, oder, $MA.CH = CA.CB$, und dies nach Hülfssatz I. $= AB^2 = z^2$ i $f.f = r.r + z^2$, d. h. $f^2 = r^2 + z^2$.

Beweis 4. (Mittelst des von dem Herrn Herausgeb des Archivs in Bd. XLII. pag. 229. aufgestellten Satzes über Dreieck, in welchem ein Winkel doppelt so gross ist, als anderer.). Im Kreise K (Taf. VI. Fig. 5.) sei $AB = z$, $AC = MB =$ nach Hülfssatz II. also $MC = f$, so ist $\angle MCA = 54^0$, $\angle M$ $= 180^0 - MBA = 180^0 - 72^0 = 108^0$, also $\angle MBC = 2MCB$, m hin nach dem Satze Archiv XLII. p. 229.: $MC^2 = MB.(MB + B$ $= MB^2 + MB.BC = MB^2 + CA.BC = MB^2 + AB^2$ [Hülfssatz oder $f^2 = r^2 + z^2$.

Anmerkung 2. Auf denselben Satz (Archiv XLII. pag. 22 stützt sich auch der Beweis des Herrn Dr. Weihrauch, Arch Bd. XLV. pag. 355, 356.

Anmerkung 3. Nur nähere Ausführungen des Beweise No. 4. sind die folgenden:

Es sei (Taf. VI. Fig. 6.) $AB = z$, $MA = MB = AC = BE =$ so ist $ME = MC = f$ (Hülfssatz II.) und $\angle EMB = MCE = 54$ also $\triangle EMB \sim ECM$ und demnach $MB : ME = CM : CE$, al $ME.CM = MB.CE = MB.(EB + CB) = AC.(AC + CB) = AC^2 + AC.C$ $= AC^2 + AB^2$ (Hülfssatz I.) oder $f^2 = r^2 + z^2$.

Oder: Man verlängere (Taf. VI. Fig. 7.) MB um $BF = B$ so ist $2\angle BFC = BFC + BCF = MBC = 108^0$ oder $\angle B$ $= 54^0 = MCB$, also $\triangle MBC \sim MCF$, demnach: $MB : MC = MC : M$ also $MC^2 = MB.MF = MB.(MB + BF) = MB^2 + MB.B$ $= AC^2 + AC.BC = AC^2 + AB^2$ (Hülfssatz I.), d. h. $f^2 = r^2 +$

Beweis 5. Sind (Taf. VI. Fig. 8.) $AB = BC = CD = z$ d aufeinanderfolgende Seiten eines regulären, in K eingeschrieben Zehnecks, demnach $AC = BD = f$ also Fünfecksseiten, und noch $AD = w$ gezogen, so liefert der ptolemäische Lehrsatz, das Kreisviereck $ABCD$ angewendet, sofort die Gleichung

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \text{ oder } f^2 = z^2 + wz.$$

Dann bleibt nur noch nachzuweisen, dass $wz = r^2$ oder $z : r = r : w$ i

Letzteres gelingt leicht auf mannichfachen Wegen, die a alle im Wesentlichen auf folgende beide hinauslaufen:

Erstens kann man obige Proportion direct aus ähnlichen Dr ecken ableiten. Wenn z. B. (Taf. VI. Fig. 9.) MA und CB bis z

Schnitt in F verlängert werden, so ist, weil $\angle E = 36^0$ ist, $AE = AB = z$, $BE = BM = r$, $\Delta AEB \sim MAD$, und demnach $EA:EB = AM:AD$, d. h. $z:r = r:w$. — Oder man benutze, wenn MB und AD in F (MC und AD in G) sich schneiden, $\Delta AFM \sim AMD$ ($AF = FM = z$, $\angle AMF = ADM = 36^0$), oder, wenn man noch CF zieht, welches $\parallel AB$ ist, $\Delta CFD \sim MAD$, u. s. w.

Zweitens findet man statt dessen zunächst eben so leicht auf verschiedenen Wegen, dass $w = r + z$ ist. So ist z. B. $w = AD = EC = r + z$, weil $AECD$ ein Parallelogramm ist. Oder man schliesst dies aus der Congruenz der Dreiecke MAD und BME. Oder man zeigt, dass $AF = BC = z$ oder $AF = AB = z$ und (weil $\angle MFD = FMD = 72^0$) $FD = MD = r$ ist. — Dann aber liefert der bekannte Zehneckssatz

$$\frac{r-z}{z} = \frac{z}{r} = \frac{r}{r+z}$$

durch Substitution von w statt $r + z$ die Proportion

$$\frac{z}{r} = \frac{r}{w} \quad \text{oder} \quad wz = r^2.$$

Da also $f^2 = z^2 + wz$ und zugleich $wz = r^2$ ist, so ist $f^2 = z^2 + r^2$.

Anmerkung 4. Man vergleiche hiermit den bekannten Beweis mittelst des Kreisvierecks $GHCB$ (G, A, B, C, H seien fünf aufeinanderfolgende Ecken des regulären Zehnseits) mit den Diagonalen $CG = BH = r + z$, wobei die Anwendung des ptolemäischen Lehrsatzes ebenfalls leicht zum Ziele führt.

$$[f^2 = (r+z)^2 - 2rz = r^2 + z^2.]$$

Anmerkung 5. Die Parallelität von AD und EC liefert sofort die Proportionen:

$$\frac{GF}{CB} = \frac{AF}{EB} = \frac{GA}{CE}, \quad \text{oder:} \quad \frac{r-z}{z} = \frac{z}{r} = \frac{r}{r+z},$$

d. h. den Zehneckssatz. — Auch findet man denselben leicht, wenn man den Radius BM zum Durchmesser BN ergänzt, mittelst des Sehnensatzes:

$$\frac{DF}{NF} = \frac{BF}{AF}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{r}{r+z} = \frac{r-z}{z} = \frac{z}{r}.$$

XXVI.

Ueber den im Archiv Bd. XLII. S. 229 behandelt Lehrsatz.

Von

Herrn Oberlehrer *E. Sachse*

an der Realschule zu Rawicz (Provinz Posen).

Der von dem Herrn Herausgeber des Archivs in Bd. XI Seite 229. aufgestellte

Lehrsatz 1. Wenn in dem Dreieck ABC (Taf. Fig. I.) der Winkel A doppelt so gross ist, als der W kel B, so ist a die mittlere Proportionale zwische und $b+c$

ist, wie der Herr Herausgeber am Schlusse des Artikels bem von ihm nur als Stoff zu einer einfachen Uebung für Schüler gesehen worden. Derselbe hat aber doch ein weiteres Intere sowohl als Verallgemeinerung der bekannten Beziehung der Z ecksseite zum Radius (s. nachher Anm. 2), als auch wegen seiner wendbarkeit zu ferneren Betrachtungen (man vergl. Band X S. 355, 356 und vorher S. 354 *)). Demnach war es von deutung, dass in jenem Artikel die Möglichkeit der Umkeh des Satzes festgestellt wurde. Die dort angeregte Frage aber sich dies nicht auf eine einfachere Art, als dort geschehen, weisen lasse, gab Anlass zu den folgenden Erwägungen.

Zunächst lässt sich der Hauptsatz selbst noch etwas facher beweisen.

---

*) Mein Artikel über die Fünfeckseite, Beweis 4.

Man verlängere CA um eine Strecke $AD = AB = c$ und ziehe BD, so ist $CD = b + c$, und da ADB gleichschenkelig ist, $\angle ADB = ABD$. Weil nun, als Aussenwinkel des Dreiecks ABD, $\angle CAB = ADB + ABD$, so ist auch $\angle CAB = 2ADB$. Nach Voraussetzung ist aber auch $\angle CAB = 2ABC$ und demnach $\angle ADB = ABC$, woraus sich die Aehnlichkeit der Dreiecke CAB und CBD ergiebt. Aus dieser folgt sofort: $CA : CB = CB : CD$, d. h. $b : a = a : b + c$.

Oder man denke sich um ABD einen Kreis beschrieben, so folgt aus der eben bewiesenen Gleichheit der Winkel CDB und CBA, dass CB eine Tangente an diesen Kreis und demnach $CB = a$ die mittlere Proportionale zwischen CD und CA ist.

Anmerkung 1. Man konnte auch (Taf. VII. Fig. 2.) BA um eine Strecke $AE = AC = b$ verlängern und CE ziehen, wobei sich $CE = a$, $\Delta\, EAC \sim ECB$ und hieraus die Thesis ergäbe.

Mit Leichtigkeit lässt sich dieser Beweis nun umkehren:

Wenn im Dreieck ABC (Taf. VII. Fig. 1.):

$$AC : BC = BC : AC + AB$$

ist, so ist

$$\angle CAB = 2ABC.$$

Denn wenn man dieselbe Construction wie vorher macht, so ergiebt sich, wie vorher, $\angle CAB = 2 . CDB$. Aus der Proportion der Hypothesis folgt aber leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke CAB und CBD. Mithin ist $\angle CBA = CDB$ und demnach auch $CAB = 2CBA$.

Eben so leicht gelingt der Beweis mittelst der in Anmerk. 1. angegebenen Construction (Taf. VII. Fig. 2.), wenn man, von ΔECA ausgehend, EA um $AB = c$ verlängert und schliesslich beweist, dass $CB = CE = a$ ist.

Anmerkung 2. Wird $\angle CBA = 36^0$ angenommen, so wird $a = c$, und man erhält den bekannten Zehneckssatz.

Ein Blick auf die Taf. VII. Fig. 3. oder Taf. VII. Fig. 4., in welchen z für b, und r für a und c geschrieben ist, und namentlich auf die Gradzahlen der Winkel genügt wohl, um zu zeigen, wie sich Construction und Beweis des Hauptsatzes A für diesen Fall specialisiren. Man findet aus $\Delta\, CAB \sim \Delta\, CBD$ oder $\Delta\, EAC \sim ECB$ sofort:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CB}{CA} \text{ oder } \frac{EB}{EC} = \frac{EC}{EA}, \text{ d. h. } \frac{r+z}{r} = \frac{r}{z} = \frac{z}{r-z}.$$

n gleichschenkeligen Dreiecke ACE mit der Basis CE um C n Kreisbogen schlägt, der AC in B schneidet, und CB zieht.

Anmerkung 6. Der Beweis nach Taf. VII. Fig. 7. geht in gewöhnlichen Beweis des Zehneckssatzes über, wenn man $\gamma = 36^0$ annimmt, so dass $c = a = z$, $b = r$ wird.

Aber auch der Beweis nach Taf. VII. Fig. 6. führt für $\alpha = \gamma = 36^0$ n so leicht zum Ziel.

Anmerkung 7. Analog dem Satze in Anmerkung 4. lässt h auch der Lehrsatz B. erweitern:

Wenn man in dem Dreiecke ABC (Taf. VII. Fig. 8.) an AC f derselben Seite mit AB einen Winkel $CAN = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ trägt, wobei AN von CB oder ihrer Verlängerung ne Strecke $CN = m$ abschneidet, so ist $b:m = a:b-c$ er $am = b(b-c)$.

Für $m = a$ erhält man den Lehrsatz B. wieder.

XXVII.

Miscellen.

---

uszug aus einem Briefe des Herrn Franz Unferdinger, ehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule m Bauernmarkte in Wien, an den Herausgeber über die Summirung der Cubikzahlen.

Im 45. Theile Ihres geschätzten Archivs S. 235 bringen Sie aus em Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher (Bd. 4. S. 310.) eine sehr einfache Ableitung der Formel für die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen. Erlauben Sie mir die folgende Mittheilung über denselben Gegenstand.

Bezeichnet n irgend eine ganze positive Zahl, so ist $(n-1)n$ immer eine gerade Zahl und die Summe der n ungeraden Zahlen

$$\{(n-1)n+1\}+\{(n-1)n+3\}+\{(n-1)n+5\}+\ldots+\{(n-1)n+(2n-1)\}=n^3$$

nach einer bekannten Formel für die arithmetischen Progressionen. Setzt man hierin $n=1, 2, 3, \ldots n$, so erhält man:

$$1=1^3,$$
$$3+5=2^3,$$
$$7+9+11=3^3,$$
$$13+15+17+19=4^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{(n-1)n+1\}+\{(n-1)n+3\}+\ldots+\{(n-1)n+(2n-1)\}=n^3,$$

und durch Addition:

$$1+3+5+\ldots+\{n^2+n-1\}=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

oder

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2.$$

Berichtigungen.

In Thl. XVI. auf Seite 220 und Seite 221 muss statt ab und $a'b'$, wo es auch auf diesen beiden Seiten steht — also auf Seite 220 Z. 28, 30, 34, 36, 40, 43, 44 und auf Seite 221 Z. 5, 6, 15, 19 — überall cb und $c'b'$, besser noch bc und $b'c'$ gesetzt, durchweg also a in c verwandelt werden, was übrigens auch sogleich von selbst in die Augen fällt.

Im Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 1. (Thl. XXXVI. Heft 1.) in der letzten Zeile der „Anzeige“ setze man „**nicht** unbenutzt lassen“ statt „unbenutzt lassen.“

Thl. XLVII. S. 106. Z. 3. statt $+(-1)^{n-1}n(x+\delta)^{n-2}$ setze man: $+(-1)^{n-1}n(x+\delta)^{n-1}$.

Thl. XLVII. Seite 466 und 467 s. m. oben im Columnentitel „Ellipse“ statt „Hyperbel.“

In dem zum vorhergehenden Hefte in diesem Theile gehörenden Liter. Ber. Nr. CLXXXX. S. 17. Z. 4. im Titel der „Tidskrift etc.“ muss es „Lektor“ statt „Rektor“ heissen.

Fehler in Callet's Tables logarithm. Vol. I. Edition 1825.

logarithm. hyperbol. 1099 = 7,00215.59544 statt 7,00211.59544...

(Mitgetheilt von Herrn Dr. L. Matthiessen in Husum.)

XXVIII.

Sur la Réalité des Racines d'équations algébriques.

Par

C. F. E. Björling,

Lector à l'École supérieure de Halmstad en Suède.

---

§. 1.

Nous désignons dans la suite par $f(x)$ une fonction algébrique, rationnelle et entière du degré $n(>1)$, où le coëfficient de x^n est positif.

Posons $y=f(x)$; alors il corréspond à chaque valeur réelle et finie de x une seule valeur de y de même espèce. Du reste il s'entend que la fonction y et toutes ses dérivées sont continues.

Donc l'équation $y=f(x)$ est représentée dans le système rectangulaire de Descartes par une courbe continue, qui s'étend infiniment à gauche et à droite et est coupée dans un seul point simple par chaque droite verticale.

Cette courbe ne possède d'autres singularités que des inflexions et, en général, des contacts d'un ordre quelconque $\overline{\overline{<}}\, n-1$ avec des droites tangentes. Elle a, comme nous l'avons dit, une branche infinie à chaque coté. La droite monte toujours; la gauche monte ou déscend, selon que n est paire ou impaire. Aucune de ces branches ne possède d'asymptote rectiligne, car x, y et $\frac{dy}{dx}$ deviennent infinis à la même fois. Aux extrémités les branches présentent toujours leurs cotés convexes à l'axe des x.

L'abscisse de chaque point où la courbe rencontre l'axe des x sans le toucher, est naturellement une racine réelle simple de

l'équ. $f(x) = 0$. Si la courbe est tangente quelquepart à l
des x, il y corréspond évidemment une racine double de
même équation, et en général une racine m^{ple} à chaque co
de l'ordre $m-1$.

Nous supposons d'abord que notre courbe coupe l'axe d
à n points différents, c. à d. que toutes les racines de l'
$f(x) = 0$ sont réelles et inégales. La courbe doit naturelle
tourner entre chaque paire d'intersections, donc elle y possè
au moins un seul maximum ou minimum. A un tel point il
réspond, comme on le sait, une racine d'ordre impaire de l'
$f'(x) = 0$. Mais il est évident que toutes ces racines sont
ples, ainsi que la courbe ne peut avoir qu'un seul maximum
minimum entre deux intersections consécutives, car s'il n'
pas ainsi, l'équ. $f'(x) = 0$ aurait plus de $n-1$ racines. D
nous avons ce

Théorème I. Si toutes les racines de l'équati
$f(x) = 0$ sont réelles et inégales, les racines de l'é
$f'(x) = 0$ le sont aussi et situées chacune entre u
paire de celles-là.

Voyons maintenant si ce théorème se peut intervertir. N
supposons à ce but que toutes les $n-1$ racines de l'équ. $f(x)$
sont réelles et inégales. D'abord il est évident que la cou
$y = f(x)$ — nous l'appelons „primitive" — doit avoir $n-1$
xima et minima, ainsi qu'elle ne possède aucune tangente d'infle
parallèle à l'axe des x. On voit aussi que ses maxima et min
alternent, et que sa forme ne se change point, quelle
stante qu'on ajoute au second membre de son équation, p
qu'on ne fait par-là que transporter l'axe des x parallèleme
lui-même.

Entre deux racines de l'équ. $f'(x) = 0$ il n'y a qu'une s
racine (simple) de $f(x) = 0$. Car la courbe primitive monte
déscend continûment entre un maximum et un minimum;
elle n'y peut rencontrer l'axe des x qu'une seule fois.

Si tous les maxima de la courbe primitive sont positifs,
tous les minima négatifs, il est évident que le premier et le
nier de ces points renferment entre eux $n-2$ intersections, c.
$n-2$ racines simples de $f(x) = 0$. Il y surviennent deux in
sections extrêmes, situées une à gauche, l'autre à droite des
xima et des minima. Donc toutes les n racines de l'équ. $f(x)$
sont réelles et inégales.

Si un seul maximum ou minimum de la fonction $f(x)$ est

abscisse corréspondante est évidemment une racine double de l'équ. $f(x) = 0$.

Supposons maintenant qu'un minimum devient positif. Alors les deux intersections disparaissent qui auraient leurs places entre ce minimum et les deux maxima voisins. Il ne peut survenir d'intersections d'autre part; par suite deux racines de l'équ. $f(x) = 0$ deviennent imaginaires.

Pour un autre minimum positif on peut répéter cette conclusion; de même pour chaque maximum négatif.

De ces résultats nous faisons un abrégé dans le

Théorème II. Si toutes les racines de l'équation $f'(x) = 0$ sont réelles et inégales, les racines de l'équ. $f(x) = 0$ ne le sont pas aussi, à moins que tous les minima de la fonction $f(x)$ ne soient négatifs, et tous les maxima positifs. Pour chaque maximum ou minimum $= 0$ deux racines de $f(x) = 0$ deviennent égales. Pour chaque minimum positif ou maximum négatif deux racines deviennent imaginaires.

Nous supposons maintenant qu'un nombre $2m (\overline{\overline{<}}\, n-1)$ des racines de l'équ. $f'(x) = 0$ sont imaginaires, et les autres réelles et inégales. Alors la courbe possède en tout $n-2m-1$ maxima et minima et — de même que ci-dessus — aucune tangente d'inflexion parallèle à l'axe des x. Entre un maximum et un minimum consécutifs elle ne peut rencontrer cet axe plus d'une fois; donc l'équ. $f(x) = 0$ ne peut avoir que $n-2m$ racines réelles. Du reste les conclusions précédentes se peuvent répéter, et l'on obtient facilement le théorème suivant, dont le précédent n'est en effet qu'une specialité:

Théorème III. Si $2m$ racines de l'equ. $f'(x) = 0$ sont imaginaires, et les autres réelles et inégales, $2m$ racines de $f(x) = 0$ sont aussi imaginaires. Les autres $n-2m$ sont réelles et inégales, si tous les maxima de $f(x)$ sont positifs, et tous les minima négatifs. Pour chaque maximum ou minimum $= 0$ deux racines deviennent égales. Pour chaque minimum positif ou maximum négatif deux racines deviennent imaginaires.

L'équ. $f'(x) = 0$ ayant une racine $2m^{ple}$, la courbe primitive aura au point corréspondant un contact de l'ordre $2m$ avec une droite horizontale. Si cette tangente coïncide avec l'axe des x,

l'abscisse du point est évidemment une racine $(2m+1)^{ple}$ de l'équ. $f(x)=0$; s'ils ne coïncident pas, $2m$ intersections disparaissent.

L'équ. $f'(x)=0$ ayant une racine $(2m-1)^{ple}$ $x=a$, la courbe primitive aura au point corréspondant un contact de l'ordre $(2m-1)$ avec une droite horizontale, et par suite un maximum ou un minimum. Si cette tangente coïncide avec l'axe des x, l'abscisse du point est évidemment une racine $2m^{ple}$ de l'équ. $f(x)=0$; s'ils ne coïncident pas, $2(m-1)$ intersections disparaissent, si $f(a)$ est un maximum positif ou un minimum négatif; et $2m$ intersections si $f(a)$ est un minimum positif ou un maximum négatif.

Voici un abrégé de cette dernière recherche!

Théorème IV. Une racine $2m^{ple}$ $x=a$ de l'équation $f'(x)=0$ diminue le nombre des racines réelles de $f(x)=0$ par $2m$, à moins que $f(a)$ ne soit $=0$; alors a est une racine $(2m+1)^{ple}$ de l'équ. $f(x)=0$.

Théorème V. Une racine $(2m-1)^{ple}$ $x=a$ de l'équation $f'(x)=0$ diminue le nombre des racines réelles de $f(x)=0$ par $2(m-1)$, si $f(a)$ est un maximum positif ou un minimum négatif, et par $2m$, si $f(a)$ est un minimum positif ou un maximum négatif. Si $f(a)$ est $=0$, a est une racine $2m^{ple}$ de l'équ. $f(x)=0$.

Les théorèmes II—V se peuvent réduire dans un seul, qui offre pourtant moins d'intérêt, à cause de sa complication.

§. 2.

Soit donnée l'équation

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; ax^n + \ldots + bx^{2m+1} + c = 0. \quad (n > 2m+1).$$

Sa dérivée est

$$anx^{n-1} + \ldots + b(2m+1)x^{2m} = 0;$$

elle aura $2m$ racines $=0$. Donc, en vertu du Théor. IV, l'équ. (1) aura au moins $2m$ racines imaginaires.

Considérons maintenant l'équation

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; . \; ax^n + \ldots + bx^{2m} + c = 0. \quad (n > 2m).$$

Sa dérivée est

$$anx^{n-1} + \ldots + 2bmx^{2m-1} = 0;$$

elle aura $2m-1$ racines $=0$. La courbe

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad y=ax^n+\ldots.+bx^{2m}+c$$

aura un maximum ou un minimum dans ce point, selon que b est négatif ou positif. Car $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}$ aura le même signe que b pour $x=0$.

Si b et c ont des signes différents, la courbe (3) aura un maximum positif ou un minimum négatif pour $x=0$. Donc, en vertu du Théor. V, l'équ. (2) aura au moins $2(m-1)$ racines imaginaires.

Si b et c sont de même signe, la courbe (3) aura un maximum négatif ou un minimum positif pour $x=0$. Donc, en vertu du Théor. V, l'équ. (2) aura au moins $2m$ racines imaginaires.

Soit maintenant donnée l'équation:

$$(4)\ldots ax^n+\ldots.+bx^p+cx^{p-2m-1}+\ldots.=0; \quad (n>p>2m+1)$$

sa dérivée de l'ordre $(p-2m-1)$ sera

$$an(n-1)\ldots.(n-p+2m+2)x^{n-p+2m+1}+\ldots.+bp(p-1)\ldots.(2m+2)x^{2m+1} + c(p-2m-1)!=0;$$

elle aura au moins $2m$ racines imaginaires. Donc, en vertu du Théor. III, cela sera aussi le cas de l'équation (4).

Nous pouvons par suite énoncer ce

Théorème VI. Si les coëfficients de $2m$ puissances consécutives de x, dans une équ. $f(x)=0$, sont nuls, cette équation aura au moins $2m$ racines imaginaires.

Nous considérons enfin l'équation

$$(5)\ldots ax^n+\ldots.+bx_p+cx^{p-2m}+\ldots.=0; \quad (n>p>2m)$$

sa dérivée de l'ordre $(p-2m)$ sera

$$an(n-1)\ldots.(n-p+2m+1)x^{n-p+2m}+\ldots.+bp(p-1)\ldots.(2m+1)x^{2m} + c(p-2m)!=0;$$

elle aura au moins $2m$ ou $2(m-1)$ racines imaginaires, selon que b et c sont de même signe ou non. Donc, en vertu du Théor. III, cela sera aussi le cas de l'équation (5).

Nous avons donc ce

Théorème VII. Si les coëfficients de $2m-1$ puissances consécutives de x, dans une équation $f(x)=0$, sont nuls, cette équation aura au moins $2m$ ou $2(m-1)$ racines imaginaires, selon que les coëfficients des puissances de x, renfermant la lacune, sont de même signe ou non.

Les résultats de ce paragraphe se peuvent aussi obtenir par application de la règle des signes de Descartes.

§. 3.

Nous désignons dans la suite l'équation primitive par $f(x)=0$, ses racines réélles, rangées par rapport à leur grandeur, par $r_1, r_2, \dots r_n$, leurs limites par L et L', et les racines réelles de l'équation dérivée par $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m$.

Peut-être nos théorèmes se pourront employer en quelques cas plus facilement que celui de M. Sturm pour trouver le nombre des racines réelles et les séparer. Pour le montrer il sera convenable de traiter les exemples de l'emploi de ce dernier théorème qui se trouvent dans le Traité d'Algèbre de M. Bourdon.

$$\text{Ex. 1)} \quad 8x^3-6x-1=0.$$

Les racines de la dérivée sont $\pm\frac{1}{2}$. On trouve

$$\text{maximum } f(-\tfrac{1}{2})=1,$$
$$\text{minimum } f(+\tfrac{1}{2})=-3.$$

Donc toutes les trois racines sont réelles. Voici leurs places!

$$L<r<-\tfrac{1}{2}<r_2<+\tfrac{1}{2}<r_3<L'.$$

$$\text{Ex. 2)} \quad x^3-5x^2+8x-1=0.$$

Les racines de la dérivée sont $\frac{4}{3}$ et 2. On trouve

$$\text{max. } f(\tfrac{4}{3})=\tfrac{85}{27},$$
$$\text{min. } f(2)=3.$$

Donc il n'y a qu'une seule racine réelle.

$$\text{Ex. 3)} \quad 2x^4-13x^2+10x-19=0.$$

Nous posons ici $x=\dfrac{1}{v}$ et obtenons

$$19v^4-10v^3+13v^2-2=0.$$

La dérivée est

$$38v^3 - 15v^2 + 13v = 0,$$

dont une racine est $= 0$, et les deux autres imaginaires. Donc l'équation proposée ne peut avoir que deux racines réelles. Le dernier terme étant négatif, une racine est positive, l'autre négative.

$$\text{Ex. 4)} \quad x^5 - 36x^3 + 72x^2 - 37x + 72 = 0.$$

Nous faisons comme ci-dessus. Alors il vient

$$(1) \ldots \; f(v) = 72v^5 - 37v^4 + 72v^3 - 36v^2 + 1 = 0.$$

La dérivation donne

$$90v^4 - 37v^3 + 54v^2 - 18v = 0.$$

Cette équ. est satisfaite par $v = 0$. Les autres racines appartiennent à l'équation

$$(2) \ldots\ldots \; 90v^3 - 37v^2 + 54v - 18 = 0.$$

La dérivée de cette dernière équation a des racines imaginaires. Donc (2) n'a qu'une seule racine réelle, qui est évidemment située entre 0 et 1.

Maintenant nous savons que (1) a du moins deux racines imaginaires. La courbe primitive a 1⁰) un maximum positif pour $v = 0$, par suite une racine négative; 2⁰) un minimum pour une valeur de v, située entre 0 et 1. Ce minimum est-il positif ou négatif?

On peut résoudre (2) approximativement, mais il vaut mieux de tâtonner ainsi:

$$f(0) = 1, \; f(1) = 72, \; f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{15}{16}, \; f(\tfrac{1}{4}) \text{ négatif.}$$

Voici donc les places des racines de (1):

$$L < r_1 < 0 < r_2 < \tfrac{1}{4} < r_3 < \tfrac{1}{2}.$$

Quant à l'emploi de notre méthode, on fera bien, si la dérivée ne possède aucune racine commensurable, de faire d'abord disparaître le second terme et puis examiner l'équation inverse.

§. 4.

Nous nous proposons maintenant le problème suivant:

Trouver la qualité et les places des racines de l'équation:

$$5x^6+12x^5-15x^4-30x^3+30x^2+k=0$$

pour les valeurs diverses de k.

L'équation dérivée

$$x^5+2x^4-2x^3-3x^2+2x=0$$

a les racines (1)

$$\begin{matrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3, & \varrho_4, & \varrho_5, \\ -2, & -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, & 0, & \frac{\sqrt{5}-1}{2}, & 1, \end{matrix}$$

et l'on obtient par substitution:

$$\text{min. } f(-2)=k+56,$$

$$\text{max. } f\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=k+\frac{63+25\sqrt{5}}{2}=k+59{,}4508....=k+$$

$$\text{min. } f(0)=k,$$

$$\text{max. } f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=k+\frac{63-25\sqrt{5}}{2}=k+3{,}5491......=k+$$

$$\text{min. } f(1)=k+2.$$

Le premier minimum étant plus grand que le second m
mum, toutes les 6 racines ne peuvent jamais être réelles.
discussion est contenue dans le tableau suivant.

Valeurs de k.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$k<-A$	2	$L<r_1<-2$ $1<$
$k=-A$	4(2)(2)	$L<r_1<-2<r_2=\varrho_2=r_3<0$ $1<$
$-A<k<-56$	4	$L<r_1<-2<r_2<\varrho_2<r_3<0$ $1<$
$k=-56$	4(2)	$r_1=-2=r_2<\varrho_2<r_3<0$ $1<$
$-56k<-B$	2	$\varrho_2<r_3<0$ $1<$
$k=-B$	4(2)	$\varrho_2<r_3<0<r_4=\varrho_4=r_5<1<$
$-B<k<-2$	4	$\varrho_2<r_3<0<r_4<\varrho_4<r_5<1<$
$k=-2$	4(2)	$\varrho_2<r_3<0<r_4<\varrho_4<r_5=1=$
$-2<k<0$	2	$\varrho_2<r_3<0<r_4<\varrho_4$
$k=0$	2(2)	$r_3=0=r_4$
$0<k$	0	

(1) Afin d'éviter de complication inutile, nous avons chois
exemple où la plupart des racines de la dérivée sont commensura
Le calcul se fera toujours de la même maniére.

(2) Cette désignation s'entend facilement d'elle-même.

§. 5.

Nous allons maintenant examiner l'équation générale du troi-ème degré:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

La dérivée est

$$3x^2 + 2ax + b = 0,$$

ses racines

$$\left.\begin{matrix}\varrho_1\\ \varrho_2\end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{a^2-3b}{9}} = -\tfrac{1}{3}a \pm R.$$

Nous distinguons trois cas:

I. $a^2 > 3b$, c. à d. ϱ_1 et ϱ_2 réelles.

On a

$$27.\text{maximum } f(\varrho_1) = 2a^3 - 9ab + 27c + 6R(a^2 - 3b),$$

$$27.\text{minimum } f(\varrho_2) = 2a^3 - 9ab + 27c - 6R(a^2 - 3b).$$

Le tableau suivant s'entend facilement.

Conditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
1) $f(\varrho_1) > 0,\ f(\varrho_2) < 0$	3	$r_1 < \varrho_1 < r_2 < \varrho_2 < r_3$
2) $f(\varrho_1) = 0,\ f(\varrho_2) < 0$	3(2)	$r_1 = \varrho_1 = r_2 < \varrho_2 < r_3$
$f(\varrho_1) > 0,\ f(\varrho_2) = 0$	"	$r_1 < \varrho_1 < r_2 = \varrho_2 = r_3$
3) $f(\varrho_1) > 0,\ f(\varrho_2) > 0$	1	$r_1 < \varrho_1$
$f(\varrho_2) < 0,\ f(\varrho_2) < 0$	"	$\varrho_2 < r_3$

II. $a^2 = 3b$, c. à d. $\varrho_1 = \varrho_2 = -\tfrac{1}{3}a$.

On a maintenant $27f(\varrho_1) = 27c - a^3$.

1) $f(\varrho_1) = 0,\ a^3 = 27c$	3(3)	$r_1 = r_2 = r_3 = \varrho_1$
2) $f(\varrho_1) > 0,\ a^3 < 27c$	1	$r_1 < \varrho_1$
3) $f(\varrho_1) < 0,\ a^3 > 27c$	1	$\varrho_1 < r_1$

III. $a^2 < 3b$, ϱ_1 et ϱ_2 imaginaires.

1)	1	

Dans le cas très commun où les quantités a, b, c sont des ombres rationnels (positifs ou négatifs), mais le radical R est commensurable, il est évident que $f(\varrho_1)$ ou $f(\varrho_2)$ ne peut être $= 0$, à moins que

$$2a^3-9ab+27c \quad \text{et} \quad a^2-3b$$

ne soient $=0$ séparément. Le dernier est contraire à la
tion I; donc les deux cas, désignés ci-dessus par un astér
disparaissent, et l'on voit que

Une équation du troisième degré à coëffic
commensurables ne peut avoir de racines égale
les racines de l'équation dérivée sont incommensura

S'il ne s'agit que de trouver le nombre des racines r
le tableau précédent se peut beaucoup abréger. En ef
trouve, en désignant par Δ le produit $f(\varrho_1).f(\varrho_2)$, c. à. d.

$$(2a^3-9ab+27c)^2-4(a^2-3b)^3:$$

I. $a^2>3b$.

	Nombre des r. r.
1) $\Delta<0$	3
2) $\Delta=0$	3(2)
3) $\Delta>0$	1

II. $a^2=3b$.

1) $\Delta=0$	3(3)
2) $\Delta>0$	1

III. $a^2<3b$.

1)	1.

Dans les Traités d'Algèbre on réduit ordinairement l'eq
du 3me degré à la forme plus simple:

$$x^3+px+q=0,$$

et l'on trouve pour le „casus irreductibilis"

$$27q^2+4p^3<0,$$

ce qui s'accorde avec le précédent.

§. 6.

L'équation du 4me degré se peut traiter absolument
même manière, mais le calcul n'offrant d'autre difficulté q
complication, nous le laissons au lecteur.

Nous finissons par un tableau sur l'équation générale d

Pour le réduire au moindre espace possible, nous désig-
s racines réelles, rangées par rapport à la grandeur, par

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e;$$

e la dérivée par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;$$

ssion des racines par des virgules, et les quantités

$$f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma),\ f(\delta)$$
$$(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

vement.

acines de la dérivée réelles et inégales [(1)>(2)<(3)>(4)].

nditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
)>0, (2)(4)<0	5	$a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, d, \delta, e$
,(3)>0,(2)(4)<0	5(2)	$a=\alpha=b, \beta, c, \gamma, d, \delta, e$
,(1)(3)>0,(4)<0	„	$a, \alpha, b=\beta=c, \gamma, d, \delta, e$
,(1)>0,(2)(4)<0	„	$a, \alpha, b, \beta, c=\gamma=d, \delta, e$
,(1)(3)>0,(2)<0	„	$a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, d=\delta=e$
3)=0, (2)(4)<0	5(2, 2)	$a=\alpha=b, \beta, c=\gamma=d, \delta, e$
=0,(2)<0,(3)>0	„	$a=\alpha=b, \beta, c, \gamma, d=\delta=e$
4)=0, (1)(3)>0	„	$a, \alpha, b=\beta=c, \gamma, d=\delta=e$
)(4)<0, (3)>0	3	$\beta, c, \gamma, d, \delta, e$
)(3)>0, (4)<0	„	$a, \alpha \quad \gamma, d, \delta, e$
0, (2)(3)(4)<0	„	$a, \alpha, b, \beta, \quad \delta, e$
)(4)>0, (2)<0	„	$a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$
0, (2)(3)(4)<0	3(2)	$a=\alpha=b \quad \delta, e$
,(2)<0,(3)(4 >0	„	$a=\alpha=b, \beta, c, \gamma$
0, (1)(3)(4)>0	„	$a, \alpha, b=\beta=c$
0, (1)(2)(4)<0	„	$c=\gamma=d, \delta, e$
,(1)(2)<0,(3)>0	„	$\beta, c, \gamma, d=\delta=e$
0, (1)(2)(3)>0	„	$a, \alpha, \quad d=\delta=e$
)(3)(4)>0	1	$a, \alpha,$
)<0, (3)(4)>0	„	$\beta, c, \gamma,$
)(3)(4)<0	„	δ, e

II. Deux racines de la derivée ou plusieurs égales; les autres

A) $\alpha=\beta$. $[(1)<(3)>(4)]$.

Conditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines
1) $(1)=0,\ (3)>0,\ (4)<0$	5(3)	$a=\alpha=b=\beta=c,\ \gamma,\ d$
2) $(1)=(4)=0,\ (3)>0$	5(3, 2)	$a=\alpha=b=\beta=c,\ \gamma,\ d$
3) $(1)=0,\ (3)(4)>0$	3(3)	$a=\alpha=b=\beta=c$
4) $(1)(3)>0,\ (4)<0$	3	$a,\ \alpha,\ \gamma,\ d$
$(1)(4)<0,\ (3)>0$	"	$\beta,\ c,\ \gamma,\ d,$
5) $(1)(3)>0,\ (4)=0$	3(2)	$a,\ \alpha,\ d$
$(1)<0,(3)>0,(4)=0$	"	$\beta,\ c,\ \gamma,\ d$
$(1)(4)<0,\ (3)=0$	"	$c=\gamma=d$
6) $(1)(3)(4)>0$	1	$a,\ \alpha$
$(1)<0,\ (3)(4)>0$	"	$\beta,\ c,\ \gamma$
$(1)(3)(4)<0$	"	

B) $\beta=\gamma$. $[(1)>(2)>(4)]$.

Conditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines
1) $(1)>0,\ (2)=0,\ (4)<0$	5(3)	$a,\ \alpha,\ b=\beta=c=\gamma=d,$
2) $(1)>0,\ (2)(4)<0$	3	$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,$
$(1)(2)>0,\ (4)<0$	"	$a,\ \alpha,\ \gamma,$
3) $(1)=0,\ (2)(4)<0$	3(2)	$a=\alpha=b$
$(1)(2)>0,\ (4)=0$	"	$a,\ \alpha\ \ d$
4) $(1)(2)(4)>0$	1	$a,\ \alpha$
$(1)(2)(4)<0$	"	

C) $\gamma=\delta$. $[(1)>(2)<(3)]$.

Conditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines
1) $(1)>0,\ (2)<0,\ (3)=0$	5(3)	$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ c=\gamma=d$
2) $(1)=(3)=0,\ (2)<0$	5(3,2)	$a=\alpha=b,\ \beta,\ c=\gamma=d$
3) $(1)(2)<0,\ (3)=0$	3(3)	$c=\gamma=d$
4) $(1)(3)>0,\ (2)<0$	3	$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ c,\ \gamma$
$(1)>0,\ (2)(3)<0$	"	$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,$
5) $(1)=0,\ (2)(3)<0$	3(2)	$a=\alpha=b$
$(1)=0,\ (2(<0,\ (3)>0$	"	$a=\alpha=b,\ \beta,\ c,\ \gamma$
$(1)(3)>0,\ (2)=0$	"	$a,\ \alpha,\ b=\beta=c$
6) $(1)(2)(3)>0$	1	$a,\ \alpha$
$(1)(2)<0,\ (3)>0$	"	$\beta,\ c,\ \gamma$
$(1)(2)(3)<0$	"	

$D)\ \alpha=\beta,\ \gamma=\delta.\quad [(1)<(3)].$

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$=0,\ (3)>0$	3(3)	$a=\alpha=b=\beta=c$
$<0,\ (3)=0$	,,	$c=\gamma=d=\delta=e$
$3)>0$	1	$a,\ \alpha$
$<0,\ (3)>0$	,,	$\beta,\ c,\ \gamma$
$3)<0$	,,	$\delta,\ c$

$E)\ \alpha=\beta=\gamma.\quad [(1)>(4)].$

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$=0,\ (4)<0$	5(4)	$a=\alpha=b=\beta=c=\gamma=d,\ \delta,\ e$
$\cdot 0,\ (4)<0$	3	$a,\ \alpha \quad d,\ \delta,\ e$
$>0,\ (4)=0$	3(2)	$a,\ \alpha \quad d=\delta=e$
$4)>0$	1	$a,\ \alpha$
$4)<0$	,,	$\delta,\ e$

$F)\ \beta=\gamma=\delta.\quad [(1)>(2)].$

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$>0,\ (2)=0$	5(4)	$a,\ \alpha\quad b=\beta=c=\gamma=d=\delta=e$
$>0,\ (2)<0$	3	$a,\ \alpha,\ b \quad \delta,\ e$
$=0,\ (2)<0$	3(2)	$a=\alpha=b \quad \delta,\ e$
$2)>0$	1	$a,\ \alpha$
$2)<0$	,,	$\delta,\ e$

$G)\ \alpha=\beta=\gamma=\delta.$

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$=0$	5(5)	$a=\alpha=b=\beta=c=\gamma=d=\delta=e$
>0	1	$a,\ \alpha$
<0	,,	$\delta,\ e$

Deux racines de la dérivée ou plusieurs imaginaires.

A) **$\alpha,\ \beta$ réelles et inégales $[(1)>(2)]$.**

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$>0,\ (2)<0$	3	$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ c$
$=0,\ (2)<0$	3(2)	$a=\alpha=b,\ \beta,\ c$
$>0,\ (2)=0$	,,	$a,\ \alpha,\ b=\beta=c$
$2)>0$	1	$a,\ \alpha$
$2)<0$	,,	$\beta,\ c$

$B)\ \alpha=\beta.$

onditions.	Nombre des racines réelles.	Places des racines réelles.
$=0$	3(3)	$a=\alpha=b=\beta=c$
$\cdot 0$	1	$a,\ \alpha$
0	,,	$\beta,\ c$

C) **Toutes les racines de la dérivée imaginaires.**

	1	

nous citerons Abulcaçim Abnaçam et Abuyzac Azarquiel: tous deux appartiennent à l'école de Tolède, Azarquiel est postérieur au démembrement du califat de Cordoue et s'attacha successivement aux rois Almemun de Tolède et Almuk-Tamid-Aben-à-Bed de Séville; c'est pour eux qu'il écrivit ses livres sur les instruments astronomiques, intitulés: l'*Almemonia*, en l'honneur du premier, et l'*Alhabedia*, destiné à illustrer et à glorifier le nom du second, auprès duquel il avait trouvé asile et protection, à la mort du roi de Tolède.

Azarquiel fut le premier qui imagina de construire des instruments universels pour observer les astres et les planètes. L'ouvrage qu'il composa à Séville, en 1081, donnait la description d'un *astrolabe universel pour les orbites des sept planètes*, avec des alidades et pinules pouvant servir à observer le cours et les mouvements de ces astres.

Azarquiel décrivit l'ellipticité de l'orbite de Mercure. Il essaya de représenter graphiquement certains registres numériques et éphémérides de savants qui florissaient avant le onzième siècle, et il était résulté de ces travaux une orbite de Mercure *ovale et à peu près elliptique*: Si l'on admet cette figure, écrivait-il, on aura plus de facilité que de toute autre manière à déterminer le lieu de la planète.

Le livre de Abulcaçim Abnaçam avait été composé par cet astronome vers l'an 1026.

II. L'époque d'Alphonse X.

Lorsque la domination arabe eut été vaincue par les armes de saint Ferdinand, et qu'Alphonse X fut monté sur le trône de Castille, l'école de Tolède acquit un nouvel éclat, et s'éleva à une hauteur qui n'a pas été dépassée: l'époque d'Alphonse X est restée célèbre dans l'histoire. Dans ce qui va suivre, nous ne parlerons ni de l'écrivain qui enrichit et perfectionna la langue nationale, ni du législateur qui dicta un code immortel; il ne sera question que de l'astronome et du promoteur en Europe des sciences physiques et mathématiques.

Alphonse avait étudié les mathématiques et l'astronomie dès son enfance, et y avait fait des progrès remarquables. Quand il eut terminé son éducation scientifique, il commença à s'occuper des deux grands ouvrages qui ont illustré sa vie, les *Tables alphonsines* et le *Code du savoir astronomique*. S'il n'en fut pas

auteur exclusif, il eut la gloire d'en avoir conçu l'idée, et d'en voir dirigé l'exécution. Il réunit à Tolède un grand nombre de éomètres et d'astronomes de différents pays, arabes, juifs, et hrétiens, les traita avec distinction, et récompensa largement eurs trauvaux.

Les *Tables alphonsines* furent calculées dans l'intervalle de 258 à 1262: elles obtinrent un grand succès et furent, pendant ongtemps, les seules dont on fit usage en Europe (1). Ces tables stronomiques avaient pour but de permettre aux astronomes, ar la comparaison des lieux calculés des planètes avec les potions observées, de rectifier et de perfectionner les théories anennes.

Le *Code du savoir astronomique* n'est pas une traduction un arrangement de l'Almageste, comme l'ont cru certains aurs; il peut ainsi nous faire connaître l'état de l'astronomie au eizième siècle, et nous apprendre dans quelle mesure la science 'ait progressé ou reculé depuis l'époque de Ptolémée.

Le code entier comprend quatre parties principales; la preière se compose de quatre livres sur les constellations; la seonde se rapporte à l'astronomie pratique et à l'observation par e moyen des globes célestes, des armilles et des astrolabes sphéiques et plans; la troisième traite des orbites des planètes, et a quatrième, des moyens de mesurer le temps. Il y a en tout seize livres, dont quatorze sont l'oeuvre de mathématiciens ou de physiciens dont Alphonse donne les noms: les deux autres peuvent être attribués au roi lui-même, au moins pour ce qui concerne le plan et les idées.

La partie qui traite des étoiles paraît avoir été faite d'après l'Almageste. Les astronomes d'Alphonse se sont bornés à calculer les positions pour la latitude et le méridien de Tolède, en joutant toutefois aux étoiles de Ptolémée quarante-deux étoiles ouvelles parmi lesquelles on comptait cinq nébuleuses.

Pour composer les deux parties suivantes, Alphonse fit traduire, outre les ouvrages des astronomes arabes Abulcaçim Ab-

(1) Elles furent imprimées pour la première fois, en latin, en 1483. e nouvelles éditions italiennes parurent en 1487, 1488, 1492, 1517 et 524. Les éditions de 1545 et 1553 furent surveillées par Pascal Hamel, rofesseur au collége royal de France; le titre est: *Divi Alphonsi, Roeanorum et Hispaniarum regis, astronomicae Tabulae, in propriam ntegritatem restitutae.*

naçam et Abuyzac Azarquiel, dont nous avons parlé précédemment, ceux de Hali Aben Ragel et d'Abolays. La quatrième partie fournit la preuve que les astronomes espagnols du treizième siécle surent apprécier la grande importance de la mesure du temps. On y traite exclusivement de la construction des horloges, les unes solaires, connues déjà dans l'antiquité la plus reculée, les autres hydrauliques, d'une époque plus récente, et enfin des mécanismes composés de roues, de poulies, de cordes, de poids, de moteurs, de cloches et de cadrans, pour signaler les heures: c'est la première tentative pour arriver aux horloges modernes.

Le *Code du savoir astronomique* forme un vrai corps de doctrine: les contemporains pouvaient y apprendre à connaître les instruments et la pratique de la science des astres, et, comme nous l'avons déjà dit, il devait permettre à la postérité de se faire une idée de l'état d'avancement où étaient arrivés dans la Castille du treizième siècle les mathématiques et les arts auxiliaires.

Il a été publié pour la première fois par ordre de la reine d'Espagne Isabelle II, et sur la recommandation de l'Académie des sciences de Madrid, qui a voulu élever ainsi un monument impérissable à la mémoire d'Alphonse et de l'antique Académie de Tolède ([1]).

Alphonse X fut moins heureux comme souverain que comme astronome, mais les malheurs qui vinrent l'assaillir dans les dernières années de son règne ne doivent pas être attribués à son goût pour les sciences; ils eurent deux causes politiques: il jugea inopportune, sinon impossible, pour le temps où il vivait, la réunion des différents États de la Péninsule en un seul État fort et puissant. — Il décréta l'altération des monnaies, moyen condamnable dans tous les temps sans doute, mais qui lui fut suggéré par l'exemple de plusieurs de ses prédécesseurs. Ces fautes firent éclater la guerre civile contre Alphonse, après un règne heureux de trente ans.

Alphonse mourut, en 1284, à Séville où il s'était réfugié. Don Sancho, qui l'avait détrôné, avait plus de goût pour le maniement des armes que pour les idées scientifiques de son illustre

---

(1) *Libros del saber de Astronomia del Rey D. Alfonso X de Castilla, copilados, anotados y comentados por Don Manuel Rico y Sinobas*, t. I et II, 1863; t. III, 1864; t. IV, 1866; infolio. Un cinquième volume contiendra les commentaires de l'éditeur. M. Rico y Sinobas est membre de l'Académie des sciences de Madrid, et professeur à l'université de la même ville.

père, et l'éclat inouï dont avait brillé l'astronomie en Espagne pendant près d'un tiers de siècle s'évanouit complétement.

III. L'époque d'Isabelle la Catholique.

Tandis que l'école de Tolède, d'abord sous la domination arabe, ensuite sous le règne d'Alphonse X faisait faire des progrés marqués à la science astronomique, les croisades donnaient un grand développement à la navigation, et l'Espagne préludait par les travaux du célèbre Ramon Lull aux grandes découvertes qui, deux siècles plus tard, devaient illustrer l'époque d'Isabelle la Catholique. On trouve dans divers écrits de Lull des règles pour déterminer l'heure en mer au moyen de l'astrolabe, et on y enseigne les méthodes graphiques pour marquer les routes. Dès ce temps, en effet, l'usage de la boussole était devenu général parmi les marins, ce que l'on savait déjà par une loi du code d'Alphonse.

En 1374, les Catalans forment un atlas précieux conservé jusqu'à nos jours, et, utilisant les voyages plus récents faits aux côtes de l'Afrique, Mecia de Viladestes, en 1413, et peu après, Gabriel de Valseca, compatriote de Lull, dressent leurs grandes cartes géographico-maritimes.

Trois faits capitaux marquent la seconde moitié du quinzième siècle: la réunion des royaumes de Castille et d'Aragon, d'où allait sortir l'unité de l'Espagne; la conquête de Grenade qui mit fin à la domination des Maures, et la découverte de l'Amérique par Christophe Colomb.

Nous n'avons pas à considérer ces événements sous le rapport politique; ils allaient élever la monarchie espagnole au plus haut degré de puissance, mais il portaient aussi en eux les germes de sa décadence. La domination des Arabes avait été pour la Péninsule une source de bienfaits; partout ils ont laissé des traces impérissables de leur passage. L'esprit religieux qui poussa à leur expulsion priva l'Espagne d'une population intelligente, active et laborieuse. D'un autre côté, les richesses du nouveau monde devaient finir par tuer dans la mère patrie le goût du travail; un jour arriverait où l'industrie aurait disparu des grandes villes qu'elle animait auparavant, où l'on se bornerait à acheter ce que les autres peuples fabriquaient; avec l'industrie disparaîtrait l'étude des sciences.

Pour le moment, on n'était frappé que du triomphe des armes

dré de Céspedes faisit usage d'un quart de cercle de son invention, divisé en minutes, et comparait ses observations avec celles de Barthélemy de la Gasca et du licencié Caravallido qui avaient élevé à Valladolid un gnomon de cent et vingt pieds de hauteur, et avec celles du docteur Sobrino, observateur zélé dont le grand quart du cercle en métal était célèbre pour sa graduation. Gerónimo Munoz méritait les éloges de Tycho Brahe, et les résultats de ses observations étaient mis à profit par le célèbre astronome d'Uranibourg. Le nouveau planisphère de Juan de Rojas, appliqué à son ingénieux astrolabe moderne, se faisait apprécier de plus en plus par les observateurs de terre et de mer. La construction des instruments astronomiques avait été fortement encouragée sous Philippe II, et, par l'ordre du roi, on avoit formé à l'Escurial une collection nombreuse et variée d'appareils de tout genre, sortant des ateliers espagnols et de ceux que le gouvernement entretenait en Flandre, pour satisfaire à la recommandation des savants qui s'occupaient de la navigation, entre autres, de Pedro de Medina, dont l'*Art de naviguer* avait été traduit dans toutes les langues (1).

L'emploi d'instruments perfectionnés et l'application de la méthode trigonométrique allaient imprimer un grand progrès à la géodésie. Pedro Esquivel eut l'honneur d'employer le premier les triangles géodésiques dans la description du territoire espagnol qu'il entreprit sur l'ordre de Philippe II. Il avait déjà paru des cartes de la Galice, de l'Aragon, du royaume de Séville, et quelques cartes générales de la Péninsule, dues à Santa Cruz et à Medina, quand le roi disposa que l'on „reconnût et marquât d'une manière claire et précise tous les lieux, fleuves, ruisseaux et montagnes, quelque petits qu'ils fussent,“ et confia ce travail à Esquivel, dont la magnifique carte, admirée des hommes les plus habiles de l'époque, périt, à ce que l'on croit, dans l'incendie survenu un siècle plus tard au monastère de l'Escurial. Cependant on conserve les relations topographiques de plus de six cents endroits habités, ainsi qu'une grande carte de la Catalogne qui avait été donnée à graver, et qui fut suivie d'une autre, non moins étendue, de l'Aragon, formée par les professeurs Juan Labaña et Pablo de Rojas.

(1) On conserve à la bibliothèque nationale de Madrid un astrolabe de 59 centimètres de diamètre, divisé de dix en dix minutes, et dédié à Philippe II par le neveu de Gemma Frisius, Gualtero Arsenio, qui le construisit à Louvain, en 1566.

En 1524, un congrès géographico-astronomique se réunit aux environs de Badajoz, dans le but de terminer le différend relatif à la démarcation entre les possessions coloniales de l'Espagne et du Portugal. Charles-Quint récompense largement les travaux de son cosmographe Apianus, et assiste, avec les nobles de sa cour, aux leçons d'Alphonse de Santa Cruz, auteur de nouvelles méthodes et de nouveaux instruments d'astronomie nautique, à qui l'on doit la première carte des *variations* magnétiques, ainsi que les principes des cartes sphériques, perfectionnés plus tard par Mercator et Édouard Wright.

Pedro Nuñez, professeur à l'université de Coïmbre, publiait en langue castillane un traité d'algèbre, où il traitait des applications de cette science à la géométrie (1). Le même savant avait écrit également sur les crépuscules, sur la navigation et sur la cosmographie: il avait inventé une méthode pour déterminer les longitudes en mer par la position de la lune. Il a donné son nom latinisé (Nonius) au moyen que l'on emploie pour apprécier les petites fractions de la graduation des limbes dans les instruments d'astronomie et de géodésie, bien que le *Nonius* actuel, qui est dû à Vernier (2), diffère des circonférences concentriques imaginées par Nuñez.

Parmi les mathématiciens espagnols de cette époque, il faut citer Pedro Ciruelo, qui fut précepteur de Philippe II, et qui avait été appelé de Salamanque à Paris pour y occuper la chaire de premier professeur de mathématiques à l'université.

Les deux grands événements astronomiques du seizième siècle, le système auquel Copernic a donné son nom et la réforme du calendrier par Grégoire XVI, tiennent leur place dans l'histoire de la Péninsule. L'université de Salamanque fut la première dans laquelle on adopta l'ouvrage de Copernic comme texte pour les leçons publiques: l'ouvrage avait été soutenu dès son apparition par le théologien Diego de Zuñiga. La même université eut l'honneur d'être consultée par Grégoire sur la réforme qu'il projetait; et tous les calculs furent revus par Clavius et par Pedro Chacon qui avait écrit sur la matière, ainsi que ses compatriotes Sepúlveda et Salon.

L'astronomie d'observation n'était pas négligée non plus. An-

---

(1) Ce livre fut imprimé à Anvers, en 1567, dans le format in-8°.

(2) *La construction, l'usage et les propriétés du quadrant de mathématiques*, etc. in-8°; Bruxelles, 1631. Cet ouvrage est dédié à l'infante Isabelle.

questions que les règles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division peuvent résoudre sans autre artifice [1]. La majeure s'élève aux puissances des nombres, examine leur composition, et détermine leurs racines, comme fondement principal de l'algèbre. La subtilité de l'algèbre excède les termes de l'éloquence: „plusieurs n'ont pas hésité à l'appeler divine." L'algèbre vulgaire exerce sa logique et ses opérations avec les nombres connus; l'algèbre spécieuse (*especiosa*) substitue aux nombres certaines formes ou caractères.

Le livre est terminé par des *énigmes* ou questions obscures et difficiles, dont la solution demande une grande finesse d'esprit.

Après l'arithmétique universelle, vient une géométrie, dont la seconde édition parut à Valence, en 1673. A cette époque, le père Zaragoza occupait une chaire de mathématiques à Madrid. Sa géométrie, écrite en latin, est dédiée au marquis de la Torre, secrétaire au conseil d'État et de guerre. Elle porte le titre: *Euclides novo-antiquus singulari methodo illustratus.* L'auteur divise la géométrie en deux parties: la géométrie spéculative et la géométrie pratique. La première partie contient les théorèmes d'Euclide; la seconde les problèmes. Le titre de l'ouvrage s'explique par cette disposition et par une méthode nouvelle que l'auteur applique à la démonstration des principaux théorèmes.

Enfin le père Zaragoza fit paraître en 1674, à Tolède, sa *Geometria magna in minimis*, dont la première partie traite des *minima* en général; la seconde des *minima* dans un plan, et la troisième des *minima* dans l'espace. La dédicace au roi Charles II débute de cette manière: „Pour que la Géométrie *Minima* [2] par

---

(1) Voici les titres des matières comprises dans l'art mineur: Chap. I. *Des premiers principes.* — Chap. II, III, IV et V. *De l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division.* — Chap. IV. *Preuves de la multiplication et de la division.* — Chap. VII et VIII. *Des fractions et de leurs quatre opérations.* — Chap. IX. *Des parties décimales.* — Chap. X. *Application des fractions et des parties décimales.* — Chap. XI. *De la raison et de la proportion.* — Chap. XII. *De la règle de trois.* — Chap. XIII, XIV, XV, XVI et XVII. *Des proportions simples et composées, et de la manière de les résoudre.* — Chap. XVIII. *De la regle de trois astronomique.* — Chap. XIX. *De l'alliage.* — Chap. XX. *Des fausses proportions.* — Chap. XXI et XXII. *Des progressions et de leurs propriétés.* — Chap. XXIII. *Des combinaisons.*

(2) Il y a ici un jeu de mots latin intraduisible. Voici du reste le texte: *Geometriam, stylo et objecto Minimam, ut Magna fiat, pedibus*

on nom et par son objet devienne *Magna*, je la dépose aux ieds de Votre Majesté; si elle parvient seulement à les atteindre, lle se trouvera par là avoir obtenu une grandeur telle que ce erait peine perdue d'en rechercher ou d'en espérer une plus rande; car dans une pareille Majesté, à l'exception de l'âge, ien ne saurait être minimum, rien ne peut ne pas être grand.

VI. Don Jorge Juan et Antonio de Ulloa.

Les éloges assaisonnés de jeux de mots qu'on vient de lire dressaient à un prince dont l'impuissance physique, intellectuelle morale a laissé les plus tristes souvenirs. En lui s'éteignit descendance masculine de Charles-Quint. Il avait légué son ône au duc d'Anjou, petit-fils de Louis XIV; mais celui-ci ne rvint à s'y établir qu'après une guerre qui dura treize ans, et ns laquelle l'Espagne perdit tous les États qu'elle possédait en urope, en dehors de la Péninsule.

L'avénement des Bourbons doit être considéré comme un fait eureux pour l'Espagne. Si le vaste empire de Charles-Quint et e Philippe II fut démembré, la faute en est aux fils dégénérés e ces grands monarques. Tout le dix-septième siècle avait été mployé à préparer ce démembrement et à le rendre inévitable. L'Espagne, du reste même, sans aucune dépendance, pouvait encore constituer un royaume de premier ordre; mais il fallait ranimer la vigueur de ses habitants, le tirer de la léthargie et de l'ignorance dans laquelle ils étaient plongés, faire revivre l'industrie et donner un nouvel élan aux sciences et aux lettres: c'est à quoi Philippe V et ses successeurs s'attachèrent. Certainement e dix-huitième siècle ne put pas remonter à la hauteur du seizième, mais le niveau général s'éleva, et l'on acquit la preuve ue la race des hommes remarquables n'était pas complétement teinte dans la Péninsule.

Les premiers savants que nous rencontrons, don Jorge Juan t Antonio de Ulloa, tous deux officiers de marine, ont acquis une rande renommée par leur coopération avec les académiciens franais à la mesure des degrés terrestres sous l'équateur. Ayant té désignés pour faire partie de l'expédition au Pérou, ils s'étaient

---

, Majestatis subjicio, quos si vel semel liceat attingere, eo magnitudinis errecta erit, ut majorem, nec assequi, nec sperare valeat, cum n tanta Majestate, praeter aetatem, nihil minimum, nihil esse possit on magnum.

embarqués à Cadix le 26 mai 1735; le 9 juillet, ils arrivaie Carthagène et durent y attendre Bouguer, Lacondamine et Go jusqu'au 15 novembre; le 24, ils montèrent à bord du bâtim français et le lendemain on mettait à la voile. De retour en rope, en 1746, après une abscence de onze années pleines périls et d'incommodités de toute sorte, nos deux officiers fu promus au grade de capitaine de frégate. En 1748, ils publiè la relation de leur voyage, sous le titre: *Relacion historica viage a la America meridional hecho de orden de S. Mag. p medir algunos grados de meridiano terrestre, y venir por ellos conocimiento de la verdadera figura y magnitud de la tie con otras varias observaciones astronomicas y physicas.* La lation est en deux parties et en trois volumes in-4° (1). Un q trième volume porte le titre: *Observaciones astronomicas y ph sicas hechas de orden de S. Mag. en los Regnos del Perú, las cuales se deduce la figura y magnitud de la Tierra y aplicacion à la navigacion* (2).

La relation historique, proprement dite, est l'oeuvre de Ullo la première partie comprend toutes les circonstances du voya depuis la sortie de Cadix jusqu'à l'achèvement de la mesure d degrés du méridien terrestre, voisins de l'équateur, et une scription de la province de Quito. La seconde partie raconte voyages faits à Lima et au Chili et le retour en Europe.

Les observations faites en commun ou séparément ont mises en ordre par don Jorge Juan. Le volume qui leur est c sacré renferme six livres dont voici les principaux: I. *Obser tions sur la plus grande obliquité de l'écliptique.* — II. *Ob vations de latitudes.* — III. *Observations des immersions émersions des satellites de Jupiter, et des éclipses de lune.* V. *Observations barométriques.* — VI. *De la vitesse du son.* VII. *De la mesure du degré du méridien contigu à l'équate* — VIII. *Des expériences du penduie simple, et de la figure*

---

(1) Relation historique du voyage à l'Amérique méridionale ent pris par ordre de Sa Majesté pour mesurer quelques degrés du mérid terrestre, et arriver par eux à la connaissance de la vraie figure grandeur de la terre; avec d'autres observations astronomiques et pl siques diverses.

(2) Observations astronomiques et physiques faites par ordre de Majesté dans les royaumes du Pérou, desquelles se déduisent la fig et la grandeur de la terre et leur application à la navigation.

terre qui s'en déduit. — IX. *De la navigation sur l'ellipsoïde restre* (1).

A leur départ pour le Pérou, don Jorge Juan et Ulloa étaient t jeunes: le premier avait 23 ans, le second n'en avait que 19. us deux sortaient des gardes-marines; ils répondirent dignent à la confiance qu'on avait mise en eux. Leurs premiers aux et ceux qu'ils publièrent plus tard leur valurent leur adssion dans les Académies des sciences de Paris et de Berlin dans la Société royale de Londres.

Ulloa vécut très-vieux; né à Séville en 1716, il mourut dans e de Léon, près de Cadix, en 1795; il fut un des néo-promors de l'astronomie en Espagne et publia une *observation faite mer de l'éclipse de soleil* du 24 juin 1778 (2). L'auteur assure ir vu, pendant plus d'une minute, un point brillant sur la lune, il le regarde comme un véritable trou au travers de notre sate. Lalande estimait que ce trou devait être à quinze lieues distance de la surface et avoir cent neuf lieues de longueur, is d'après lui, on ne pouvait le regarder que comme un vol- n (3).

Don Jorge Juan, qui mourut en 1774 (il était né à Orihuela, ns le royaume de Valence, en 1712) a laissé la réputation d'un vant de premier ordre. Son principal ouvrage parut en 1771, us le titre: *Examen maritimo theórico práctico, ó Tratado de echanica aplicado á la construcion, conocimiento y manejo de navios y demas embarcaciones,* 2 vol. in-4°, Madrid. Il fut de nne heure traduit en anglais; et, par ordre du ministre de la rine, Levêque, professeur d'hydrographie à Nantes, en donna e traduction française, avec des notes et des additions (*Examen ritime, théorique et pratique, ou traité de mécanique, appliqué la construction et à la manoeuvre des vaisseaux et autres bâtints.* Nantes, 1783, 2 vol. in-4°). On lit dans la préface de vêque: „L'auteur avait le rare avantage d'être un des plus fonds géomètres et un des plus grands navigateurs. [Son] rage, quoiqu'imprimé dès 1771, n'est cependant pas encore nu en France. [Don Jorge Juan] a publié plusieurs ouvrages r la marine, où l'on trouve le génie d'observation et la sagacité

---

(1) Une traduction française de l'ouvrage parut en 1752: les obsertions furent réimprimées, en 1773, à Madrid.

(2) Une traduction du mémoire d'Ulloa parut dans le *Journal de ysique* d'avril 1780.

(3) *Bibliographie astronomique,* page 573.

qui devaient produire l'Examen maritime.“ D'un autre côté, vo
l'appréciation de Montucla (*Histoire des mathématiques,* t. I
achevé et publié en mai 1802 par Lalande): „...Je ne puis mi
terminer cette histoire de la navigation qu'en faisant connaître
détail l'ouvrage le meilleur, le plus savant et le plus comp
qu'il y ait sur la construction et la manoeuvre. ...L'auteur co
mence par établir les principes de mécanique, particulièrem
sur l'action et le mouvement des fluides. Le second volume tra
des applications directes des principes à la marine. Don Jo
Juan termine son ouvrage par une récapitulation sans aucun c
cul analytique.... On peut regarder l'Examen maritime com
une production du génie, et l'une des plus remarquables du siècle(

VII. L'observatoire construit à Cadix en 1753.

Don Jorge Juan portait un vif intérêt à l'astronomie: ce
par son entremise et par les soins de Godin (2), alors directe
de l'école des gardes-marines, qu'un observatoire fut construit
Cadix, en 1753. „La pièce destinée aux observations [consistai
en une grande salle bâtie sur une épaisse et forte voûte d'u
tour, ouvrage des Romains, et de la plus grande solidité. On
tarda pas à se pourvoir d'excellents instruments, mais il ne
fit pas grand'chose; don Jorge Juan étuit retenu à la cour
ses autres charges, et [dans l'histoire de la construction de l'
servatoire qui fut publiée en 1776 par don Vincent Tofiño et
Joseph Varela, il n'est plus rien dit] de M. Godin, qu'on
d'ailleurs être mort dès 1760. Il semble que l'observatoire ait
délaissé jus'quà ce que MM. Tofiño et Varela eussent deman
la permission d'y travailler, autant que leurs autres occupations
permettraient; ils l'obtinrent et leur chef, don François Xav
Winthuysen, successeur de don Jorge Juan dans l'emploi de
pitaine des gardes-marines, leur procura toutes les facilités q
dépendaient de lui (3).“

---

(1) Don Gabriel Ciscar a donné à Madrid, en 1793, le premier
lume d'une nouvelle édition très-augmentée, et qui devait avoir qua
volumes.

(2) Godin, ou don Louis Godin, comme on l'appelait en Espag
était l'académicien français qui avait fait partie, de l'expédition du
rou en 1737.

(3) *Nouvelles littéraires de divers pays. Avec des suppléme
pour la liste et le nécrologe des astronomes, par l'auteur du rec
pour les astronomes* (Jean Bernoulli, astronome royal, etc.). 3me cahi
Berlin, 1777.

Don Vincent Tofiño et don Joseph Varela firent paraître, en 76, un premier recueil d'observations astronomiques comprenant s années 1773, 1774 et 1775 (1 vol. in-4° de 166 pages. „Après dédicace au roi d'Espagne, vient une approbation de l'Académie yale des sciences de Paris, traduite en espagnol. Les auteurs aient eu la modestie de soumettre à son examen leurs obsertions faites depuis le 21 juin 1773 jusqu'au 2 janvier 1774. M. Le Gentil et Pingré en firent un rapport très-favorable en hortant les auteurs à publier leur manuscrit et à continuer leurs iles travaux. Ils ont suivi ce conseil et ont joint les observans des années 1774 et 1775. ... Les observations sont rappores en forme de journal, suivant l'ordre dans lequel elles ont été tes et supposent une grande assiduité. On trouve ici un grand mbre de passages d'étoiles, du soleil, de la lune et des planètes, Mural, et souvent avec les distances au zénith, méridiennes; usieurs observations de Vénus et surtout de Mercure faites ns des circonstances importantes avec la lunette achromatique ontée sur la machine parallatique; l'éclipse de lune du 30 sepmbre 1773; diverses occultations d'étoiles; grand nombre d'éclipes des satellites de Jupiter, l'occultation de Saturne par la lune, 18 février 1775; enfin la première disparition de l'anneau de aturne, au moins de l'une des anses, le 5 octobre 1773; la réparition de cet anneau, en janvier 1774, et la seconde disparition, e 5 avril 1774. A l'occasion de cette dernière on vit aussi quelues bandes semblables à celles de Jupiter et une entre autres lus claire que le disque même de Saturne, laquelle ne cessa être visible que le 28 (1)."

Le Mural dont il est question ci-dessus était un quart de ercle de six pieds de rayon, par Bird; la lunette achromatique ait de Dollond: elle avait quatre pieds de foyer et était munie un micromètre. Il n'y avait pas d'instrument des passages. es pendules, au nombre de deux, étaient d'Ellicott. Il y avait ncore deux quarts de cercle mobiles, de deux pieds de rayon, n de Bird, l'autre de Georges Adams; un télescope de Short, n autre de Nairne, diverses lunettes ordinaires, la machine pallatique, divers instruments de physique, de géométrie pratique t de navigation.

Un second volume d'observations parut en 1777: „Ce second olume des observations faites à Cadix contient, pour l'année 1776, n grand nombre de bonnes observations; mais elles n'ont pas té plus loin (2)."

(1) *Nouvelles littéraires*, l. c.
(2) Lalande, *Bibliographie astronomique.*

Don Vincente Tofiño de San Miguel était né en 17[illegible]
mourut en 1795. On a de lui plusieurs atlas des côtes d'Es[illegible]
sur la Méditerranée et sur l'Atlantique. Il fut comme Varel[illegible]
aide à l'observatoire de Cadix, correspondant de l'Académi[illegible]
sciences de Paris. Don José Varela y Ulloa, plus jeune qu[illegible]
fiño de huit ans, le précéda dans la tombe (en 1794). Il
aidè le célèbre Borda, en 1776, à mesurer le pic de Tén[illegible]
et à lever le plan des îles Canaries et de la côte d'Afrique
puis le cap Spartel jusqu'au cap Vert (1).

VIII. L'observatoire de San Fernando.

A égale distance de Tofiño et de Varela, naissait, en 174[illegible]
autre officier de marine, dont l'histoire de l'astronomie consa[illegible]
le souvenir.

José de Mazarredo y Salazar, qui fut ambassadeur à [illegible]
en 1804 et ministre de la marine de 1808 à 1812, époque [illegible]
mourut, avait fait bâtir en 1797, à San Fernando, près de C[illegible]
un observatoire d'un aspect monumental, auquel il attacha qu[illegible]
astronomes. Cet observatoire était destiné spécialement à la [illegible]
rine: la publication de l'almanach nautique entrait dans les [illegible]
butions du directeur.

L'almanach nautique avait commencé à paraître à Madri[illegible]
1786: on y trouvait les tables et les préceptes nécessaires
marins, mais cet ouvrage n'eut pas de suite dans ce temp[illegible]
et ne fut repris qu'en 1791.

Les observations faites à San Fernando, de 1798 à 180[illegible]
clus, furent imprimées dans les almanachs nautiques pour 180[illegible]
1807; celles qui se rapportent à la période de 1805 à 1815 [illegible]
vu le jour qu'en 1830, dans l'almanach nautique pour l'an 1[illegible]
elles comprennent les éclipses de soleil et de lune, les occ[illegible]
tions des étoiles et les éclipses des satellites de Jupiter, et
été faites par MM. Julian Canelas, José Maria de la Cuest[illegible]
Esteban Castañeda, avec des lunettes achromatiques de Dollon[illegible]

---

(1) *Biographie universelle de Michaud.* On lit dans les *Nouv[illegible]* *littéraires* de Bernoulli, 2me cahier, Berlin 1777: M. de Varela de retour depuis peu d'une course sur les côtes d'Afrique, où il a[illegible] terminé en concurrence avec M. le chevalier de Borda, de l'Acad[illegible] des sciences de Paris, les positions géographiques de plusieurs endro[illegible]

(2) *Astronomische Nachrichten,* 1831, nº 213.

L'observatoire de San Fernando finit par trouver un directeur habile et dévoué dans la personne de don José Sanchez Cerquero. Né en 1784, Cerquero avait manifesté de bonne heure un goût très-vif pour l'étude des mathématiques. Après avoir servi activement comme officier de marine et pris une part importante à la lutte nationale de 1808 et au siége de Cadix en 1810, il avait été nommé premier maître à l'Académie des gardes-marines de Carthagène, poste qu'il abandonna en 1816 pour passer l'observatoire de San Fernando. Devenu directeur de cet établissement en août 1825, il n'eut plus qu'une pensée: c'était d'élever l'observatoire à la hauteur des nécessités de la science. Dans ce but, il fit deux voyages en Angleterre et s'y livra à une étude approfondie de l'observatoire de Greenwich; plus tard, il visita l'observatoire de Paris et celui de Bruxelles; il séjourna longtemps dans cette dernière ville et retourna en Angleterre pour examiner à loisir les meilleurs modèles en ce qui concerne l'équatorial, la manière de le monter et celle de le couvrir d'un toit tournant. Il sut mettre ensuite à profit cette étude dans l'érection de l'équatorial de San Fernando.

Une lunette méridienne et une pendule de l'artiste anglais Thomas Jones avaient été placées en 1833; un cercle mural, du même artiste, à la fin de 1835. Le cercle mural avait six pieds anglais de diamètre; la lunette, de dix pieds de longueur, était faite sur le modèle de celle de Greenwich. Pour monter ces instruments on avait fait construire en 1831 et 1832 une salle mesurant 40 pieds de l'orient à l'occident, 22 du nord au sud, et ayant 17 pieds de hauteur.

Les observations faites à la lunette méridienne, du 11 mai au 31 décembre 1833, ont été publiées en 1835; celles des années 1834 et 1835 ont paru en 1836. Les recueils dans le format in-folio renferment aussi des observations d'éclipses des satellites de Jupiter, d'occultations d'étoiles, et de l'éclipse de soleil du 27 mai 1835. Il y a sur le titre de ceux qui portent la date de 1836 une très-belle vignette représentant la façade de l'observatoire, vue de front, et la salle des instruments méridiens, vue de côté.

Cerquero s'appliqua également à perfectionner l'almanach nautique dont le calcul se faisait sous sa direction. Dès son entrée à l'observatoire, il avait donné, comme additions à cet almanach, différents mémoires: sur les méthodes pour déterminer la latitude en mer par les hauteurs correspondantes; sur de nouvelles formules pour le calcul des observations des planètes et des co-

mètes; sur le calcul des éclipses; sur la latitude de l'observatoire de San Fernando (dans ce mémoire, qui parut à la suite de l'almanach de 1839, il fait voir le grand parti qu'on peut tirer des observations du sextant pour les déterminations de ce genre), etc. Son premier travail avait été inséré dans la *Correspondance* de Zach; il avait pour objet la longitude de Porto-Rico. La *Correspondance mathématique* de M. Quetelet renferme de lui une notice sur les erreurs de la lunette méridienne et les moyens de les corriger et deux notes d'analyse mathématique. Après sa mort, survenue en 1850, l'Académie des sciences de Madrid a inséré dans le tome II de ses Mémoires ses *Eléments de chronologie analytique* (collection de formules qui représentent les circonstances principales des deux calendriers chrétiens, Julien et Grégorien, de l'ère de Nabonassar, des calendriers mahométan et judaïque, et la correspondance de chacun de ces deux derniers avec les deux premiers).

Don Sanchez Cerquero était un homme fort instruit, connaissant et parlant la plupart des langues vivantes et versé dans la littérature ancienne et moderne.

Il fut remplacé à San Fernando, d'abord par don Saturnino Montojo qui organisa un système d'observations météorologiques, et, à la mort de celui-ci (1855), par don Francisco de Paula Marquez, premier astronome de l'observatoire, chargé des éphémérides et auteur de différents travaux scientifiques parmi lesquels il faut citer les révisions des tables du soleil, de la lune et des planètes, employées dans le calcul de l'almanach nautique.

Quant je visitai l'observatoire de San Fernando, au mois de mai 1865, les travaux astronomiques étaient suspendus, à cause des grands travaux en voie d'exécution pour remplacer les instruments méridiens par un cercle méridien dont la commande avait été faite en Angleterre en même temps que celle d'un grand équatorial. Le directeur s'occupait également de substituer aux instruments météorologiques de nouveaux instruments enregistreurs.

IX. *L'observatoire de Madrid.*

Je n'ai pas voulu scinder ce que j'avais à dire de l'observatoire de San Fernando. Je vais maintenant revenir sur mes pas et raconter par quels efforts laborieux et persévérants l'Espagne a été dotée d'un second observatoire, établi dans la capitale même, au centre de la Péninsule.

Don Jorge Juan figure au premier rang des promoteurs de
nouvelle institution: c'est lui qui en suggéra l'idée à Charles III,
ont la protection s'étèndait sur toutes les sciences. Le roi fit
réparer les plans de l'édifice par l'architecte Villanueva, et donna
ne pension au mathématicien don Salvador Jimenez Coronado,
our aller à l'étranger se perfectionner dans l'astronomie. Mais
es bonnes dispositions restèrent sans résultat: l'architecte de-
eura inactif, et Coronado s'arrêta à Paris, après avoir visité
s principaux observatoires de l'Europe. A l'avénement de Char-
s IV, et sous le ministère du comte de Floridablanca, on reprit
projet qui avait été perdu de vue; Coronado reçut l'ordre de
evenir à Madrid, et, Villanueva ayant enfin terminé ses plans et
it choix d'un emplacement dans le Buen Retiro, on mit la main
l'oeuvre en 1790; mais les travaux marchèrent si lentement,
ue neuf ans après, en 1799, on ne voyait pas encore approcher
a fin des constructions.

Entretemps, on s'était occupé d'acheter et de construire des
nstruments et d'organiser un enseignement complet d'astronomie
et des branches accessoires.

M. Megnié, habile artiste français, avait été appelé en 1786
à Madrid pour y construire des instruments et y former des élè-
ves (1). Plus tard, on y créa un atelier sous la direction de deux
artistes espagnols, qui avaient achevé leur éducation à Londres.
Les jeunes gens appelés à travailler dans cet atelier suivaient
n même temps des cours sur les mathématiques, sur la météoro-
gie et sur l'astronomie. On avait recruté les professeurs parmi
s meilleurs élèves sortis de l'école astronomique inaugurée par
imenez Coronado, à l'époque où l'on jetait les fondements de l'ob-
ervatoire. Peu à peu le nouvel établissement prit une impor-
nce assez grande pour qu'on se décidât, en 1796, à lui donner
e autre forme par la création du corps royal des ingénieurs-
smographes d'État, dont une des attributions devait être la

(1) M. Megnié resta à Madrid jusqu'en 1793: il y fit quelques ob-
ervations astronomiques; entre autres phénomènes, il observa l'occul-
tion de Jupiter par la lune, du 28 juin 1792, l'éclipse de soleil du
5 septembre, et l'immersion d'Aldebaran, du 31 octobre de la même
nnée, qui donnèrent pour la différence entre les méridiens de Paris
observatoire) et de Madrid (Grand' Place?) une moyenne de 24m 8s.
Voir Lalande, dans la *Connaissance des temps pour l'an V de la ré-
ublique française*). On lit dans le t. IV. de l'*Histoire des mathéma-
iques* de Montucla, publié en 1802 par Lalande, que Megnié avait ob-
enu un observatoire „à la verrerie, qui est près de la grande rue d'Alcala."

préparation de la carte géodésique du pays. Dès que ce nouveau corps eut été constitué, on organisa l'observatoire de la manière suivante: Un directeur; un vice-directeur chargé du cours d'astronomie physique; six professeurs, chargés d'enseigner l'astronomie théorique, l'astronomie pratique et son application à la formation des cartes géographiques, le calcul infinitésimal et la mécanique, la météorologie, la trigonométrie, la sphère et l'optique, la géographie et le calendrier; cinq aides; quatre aspirants avec solde et huit surnuméraires sans solde.

Le directeur était don Jimenez Coronado et le vice-directeur, don José Chaix, qui avait étudié la géométrie et l'astronomie en France et en Angleterre.

Pour assurer l'existence de l'établissement, Coronado chercha à le rendre indépendant du trésor, et, après beaucoup de démarches, il réussit à faire concéder à l'observatoire le privilége du calendrier dont la formation était confiée de temps immémorial à un professeur de l'université de Salamanque, et dont la vente avait lieu au profit du conseil de Castille. Coronado afferma l'almanach pour une somme de 150,000 réaux (1), mais comme il y avait différentes charges, le produit net ne s'élevait qu'à une trentaine de mille francs, somme à peine suffisante pour payer le personnel.

Coronado sentait fort bien, d'un autre côté, que l'observatoire, limité à l'enseignement, ne remplissait pas son objet principal. Fatigué d'attendre l'achèvement de l'édifice de Villanueva, il proposa et obtint, en 1799, de construire un observatoire provisoire en planches et en briques, où l'on pourrait au moins exercer les élèves à la pratique et au maniement des instruments.

Ceux-ci étaient déjà nombreux et avaient été en partie acquis à l'étranger, en partie construits dans l'atelier dont nous avons parlé. Au premier rang figurait un télescope d'Herschel, de vingt-cinq pieds de longueur et de deux pieds de diamètre. Don José Mendoza y Rios, capitaine de la marine espagnole, en avait négocié l'acquisition à Londres en 1796, mais l'instrument ne fut prêt que cinq ans plus tard; il arriva à Madrid en 1802, et il s'écoula encore deux ans avant qu'il pût servir aux observations. S'il faut en croire Lalande, ce télescope fut payé 75,000 francs; les frais de transport s'élevèrent à 85,000 réaux, et le dôme tournant sous lequel on le plaça dans le voisinage de l'observatoire coûta 210,000 réaux.

(1) Le réal vaut vingt-six centimes.

Le corps des cosmographes qui avait donné lieu à des attaques de différents genres fut licencié en 1804, et le personnel de l'observatoire fut réduit à un directeur et à trois professeurs, chargés d'enseigner l'astronomie théorique, l'astronomie pratique et l'art d'observer, et la météorologie. Le professeur d'astronomie pratique devait avoir sous ses ordres deux assistants pour l'aider dans le maniement des instruments et dans les calculs. Un professeur spécial était nommé pour l'usage du télescope d'Herschel: il avait un adjoint et un aide. Le décret royal du 31 août 1804 stipulait qu'à l'avenir les places de professeurs et d'aides seraient mises au concours, et ordonnait la publication d'un recueil mensuel dans lequel devaient être insérés les travaux et les observations des professeurs de l'observatoire, et tout ce qui avait rapport au progrès de la science. Les travaux de la carte générale du pays étaient provisoirement suspendus; on se proposait de les reprendre quand il y aurait des fonds suffisants, mais en les limitant à l'intendance de Madrid.

X. *L'observatoire de Madrid* (suite).

L'observatoire n'était pas encore achevé lors de l'invasion française, mais il ne restait plus beaucoup à faire et le moment approchait où les sacrifices que le gouvernement s'était imposés pour son érection allaient enfin porter leurs fruits

L'entrée des Français dans Madrid lui porta un coup fatal: les troupes ennemies s'en emparèrent, y construisirent des batteries, brûlèrent les instruments, ou les mirent dans l'impossibilité de pouvoir encore servir. Le télescope d'Herschel fut détruit et c'est à peine si Jimenez parvint à sauver quelques appareils.

Les professeurs se dispersèrent; Jimenez se retira à Madrid (1), et l'observatoire qu'il avait tant contribué à faire élever, et qui se trouvait maintenant enfermé dans une forteresse, commença à tomber en ruines avant d'avoir été achevé.

Le nouveau gouvernement voulut, dans les dernières années de son existence, construire un autre observatoire, on ne sait dans quel emplacement, et l'architecte don Silvestre Perez fut chargé d'en dresser les plans sous la direction de Megnié, l'artiste français dont nous avons parlé, qui était revenu à Madrid; mais ce projet n'eut pas de suite.

---

(1) Il mourut à Jerez, le 24 novembre 1813.

Après la rentrée des Bourbons, le gouvernement essaya à deux reprises de faire quelque chose en faveur de l'observatoire. Une première fois, au commencement de 1817, il nomma professeur d'astronomie D. José Rodriguez, qui avait coopéré avec Chaix, Biot et Arago à la mesure de l'arc du méridien sur la côte orientale d'Espagne. Rodriguez vint à Madrid et y donna des leçons dans le cabinet d'histoire naturelle pendant les années 1819 et 1820; les événements politiques l'empêchèrent de continuer et bientôt après il mourut. En 1835, la place de directeur et de professeur fut donnée à D. Domingo Fontan, auteur d'une carte de la Galice; mais celui-ci ne put pas même commencer son cours.

L'observatoire continuait à dépérir: par décision de la direction des études, il avait été borné à la météorologie et l'on est redevable à l'ingénieur D. Jeronimo del Campo, qui depuis 1840 était chargé de sa garde, d'une série d'observations assez étendue.

Enfin, en 1846, le ministre Pidal, sur le rapport qui lui fut présenté par le directeur général de l'instruction publique, D. Antonio Gil de Zárate, prit des mesures pour restaurer et achever sans délai l'observatoire, sur les plans de Villanueva. L'architecte Colomer poussa les travaux avec une telle ardeur qu'en peu de mois il parvint à terminer l'édifice dont la première pierre avait été posée, il y avait plus d'un demi-siècle. La dépense s'éleva à près de 157,500 francs. Si l'on ajoute à cette somme les 1,744,332 réaux que les constructions avaient déjà coûté au 31 décembre 1799, et qu'on fasse une hypothèse modérée sur ce qu'elles durent encore absorber jusqu'au moment de l'invasion française, il n'y aura pas grande exagération à estimer la dépense totale à près de 610,000 francs. L'édifice terminé, il fallait songer au personnel et aux instruments. Les officiers de marine seuls en Espagne étaient initiés aux connaissances astronomiques: on tâcha de trouver parmi eux un directeur pour l'observatoire de Madrid, mais la position offrait peu d'avenir, et aucun de ceux à qui l'on s'adressa ne se montra disposé à l'accepter et à renoncer à sa carrière. On prit alors le parti d'envoyer deux [illegible] professeurs à l'observatoire de San Fernando pour s'y [illegible] à l'astronomie pratique et théorique. Après deux ans de [illegible] ces jeunes gens devaient, pendant deux autres années, [illegible] les principaux observatoires de l'Europe, et prendre des [illegible] sur les instruments qu'il serait nécessaire d'acquérir [illegible] les plus capables de les construire.

L'un des jeunes savants sur qui s'arrêta le choix du gou-ernement, D. Antonio Aguilar y Vela, venait (1847) d'emporter au oncours la place de professeur de mathématiques supérieures à université de Santiago. A son retour, il fut nommé directeur e la section astronomique de l'observatoire; la section météoro-ogique fut confiée au professeur de physique de l'université. epuis, ces deux sections ont été réunies sous la même direction, t, en 1865, quand je visitai Madrid, le personnel était ainsi com-osé: un directeur (M. Aguilar), un premier astronome, deux se-onds et un aide.

Les instruments qui ont été acquis pour l'observatoire sont ous de premier ordre: le cercle méridien, des plus grandes di-ensions connues, de Repsold à Hambourg, à coûté 90,000 réaux; e grand équatorial, de dix pouces d'ouverture, de Merz à Munich, 60,000 réaux. Nous citerons encore un théodolite, de Repsold; n sextant, de Oertling; une pendule sidérale, de Dent, et trois hronomètres du même.

L'édifice, conçu par Villanueva, fort élégant du reste, ne ré-ondait pas tout à fait aux besoins de l'astronomie moderne: il llut songer à ériger de nouvelles constructions pour loger le di-cteur et les aides, pour établir l'équatorial, etc. Et comme, en hors du petit monticule sur lequel il était bâti, l'observatoire possédait aucun terrain, on fit des démarches auprès de la ine à qui le Buen Retiro appartenait, et l'on obtint de Sa Ma-sté la concession de 26,200 mètres carrés autour de l'édifice principal. ors on éleva un nouvel édifice dans lequel on monta l'équato-al sous un dôme tournant: ce fut une nouvelle dépense de 260,000 ré-x. Des habitations contiguës furent préparées pour les astronomes.

Le cercle méridien a été monté dans une des ailes de l'an-en observatoire. Sous la coupole, on a placé l'anémomètre et lectromètre; les autres instruments pour la météorologie et la ysique du globe sont disséminés.

L'observatoire de Madrid fait paraître un *Annuaire* depuis 860: on y trouve, outre les éphémérides et les données propres cette sorte de publication, des notices destinées à répandre les onnaissances astronomiques et météorologiques.

Il publiera également des *Annales* dans lesquelles seront im-rimées les observations (1).

(1) J'ignore si ces Annales ont déjà paru: j'ai rapporté d'Espagne, n 1865, des planches qui devaient figurer dans le premier volume et

M. Aguilar, le directeur, est en même temps professeur à l'université et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences dont nous parlerons bientôt: il a été activement employé dans les travaux de la triangulation du pays, dont il sera question plus tard.

XI. Les astronomes espagnols du XVIIIme siècle.

On a déjà pu voir, dans ce qui précède, combien le dixhuitième siècle avait été favorable au développement de l'astronomie en Espagne. La liste des astronomes qu'il produisit est brillante: on y voit figurer, entres autres, Jorge Juan, Ulloa, Mendoza, Rodriguez, Chaix, Ferrer, Medina, Doz, Vigastro.

Nous avons rappelé la part brillante que D. Jorge Juan et Ulloa avaient prise à l'expédition du Pérou, organisée par les académiciens français en 1735. Trente-quatre ans après, D. Vicente Doz et D. Salvador Medina accompagnaient l'abbé Chappe en Californie, pour y observer le passage de Vénus du 3 juin 1769, et près d'un demi-siècle plus tard (le 29 décembre 1815), D. José Joaquin Ferrer terminait à Cadix un mémoire dans lequel il discutait à nouveau toutes les observations de ce passage, qui avaient été faites sur différents points de la terre, et entrepenait d'en tirer la parallaxe du soleil avec toute l'exactitude qu'elle comporte et d'examiner les causes des écarts des déterminations auxquelles étaient arrivés des savants célèbres (1).

Ferrer, officier supérieur dans la marine espagnole, avait été employé pendant plusieurs années aux Indes occidentales et dans l'Amérique du nord, à la détermination des positions géographiques d'un grand nombre de lieux. Il mourut en 1818.

D. Manuel Munoz de Vigastro publia à Valence en 1785 une éphéméride de la nouvelle planète Herschel (Uranus) pour l'année 1786, avec l'histoire de la découverte de cette planète. „Je remarque, dit Montucla ou son éditeur Lalande (2), que cet astro-

---

qui donnaient le plan du terrain et des constructions de l'observatoire, ainsi que les dessins détaillés des principaux instruments.

(1) Le mémoire de Ferrer avait été communiqué en 1832 par Cerquero à la Société astronomique de Londres; il a paru dans le tome V des Mémoires de la Société, publié en 1833. Ferrer y prend les titres de membre de la Société royale d'histoire de Madrid et de la Société philosophique de Philadelphie, et de correspondant de l'Académie des sciences de Paris.

(2) *Histoire des mathématiques*, t. IV.

opérations géodésiques exécutées sur le littoral de l'Espagne par Biot et Arago, refit en entier les calculs laborieux auxquels donnèrent lieu les travaux géodésiques du colonel Lambton dans l'Inde, et découvrit diverses erreurs qui avaient conduit Delambre à une valeur trop grande de l'aplatissement du globe terrestre.

Pour terminer ce que nous avons à dire de l'astronomie en Espagne au dix-huitième siècle, nous rappellerons le voyage autour du monde, entrepris par les ordres et aux frais du gouvernement, pour enrichir la géographie et l'histoire naturelle. Les navigateurs partirent de Cadix, le 30 juillet 1789, sur deux sloops, *la Découverte et le Subtil*, le premier commandé par Malespina et le second par Bustamente, et ils rentrèrent vers la fin de 1793. Durant ces cinq années ils exécutèrent la série la plus complète de travaux astronomiques et physiques qui eût été entreprise jusqu'alors sur les côtes des deux hémisphères: nous citerons la détermination de la gravité par les observations du pendule.

XII. Les Académies en Espagne. — Fondation de l'Académie des sciences exactes, physiques et naturelles.

L'Espagne qui, à l'époque d'Alphonse X, avait donné le premier exemple d'une réunion de savants arabes, juifs et chrétiens, installés dans le palais du roi pour s'y occuper librement de questions scientifiques, devait voir passer plusieurs siècles avant de posséder une Académie établie sur des bases durables.

Le duc d'Escalona, ancien vice-roi de Naples, eut un instant, sous Philippe V, le projet de fonder une Académie générale des sciences et des arts, où l'on aurait adopté la classification des connaissances humaines de Bacon, mais cette idée ne se réalisa pas. On se borna à créer, en 1713, l'*Académie espagnole*, dont l'objet principal fut „de rétablir, de cultiver et de fixer l'élégance et la pureté de la langue castillane dans tout son lustre et sa splendeur.“ L'Académie espagnole a publié un dictionnaire et une grammaire, a fait imprimer beaucoup d'oeuvres inédites des poëtes antérieurs au quinzième siècle et a distribué des prix de poésie et d'éloquence, à la suite de concours publics. Vingt-cinq ans après, un décret royal établit l'*Académie de l'histoire*, chargée „d'éclaircir l'histoire de l'Espagne dans toutes ses parties, en la purgeant des erreurs et des fables, en élucidant les doutes relatifs aux faits et en mettant en lumière les événements les plus remarquables, leurs effets, leur influence sur l'état moral et phy-

que de la nation et ses relations avec les autres pays.“ Plus ard, sous Charles IV, l'Académie d'histoire fut également chargée de l'inspection et de la conservation des monuments antiques. Elle a fait des publications importantes et formé une precieuse ollection de documents originaux (1).

Les Académies dont nous venons de parler suscitèrent naturellement les réclamations des Espagnols qui s'intéressaient encore aux sciences: ils demandèrent qu'on créât pour celles-ci une nstitution semblable; c'était, disaient-ils, un moyen de les relever et d'en propager le goût. Mais rien ne se fit du temps de Philippe V, et il fallut attendre le règne de Ferdinand VI. Alors, par l'ordre du ministre Carvajal, on prépara le plan d'une Académie générale des sciences, des lettres et des arts, dont le siége devait être à Madrid; on dépêcha à Rome, Paris, Londres, Amsterdam, Bologne, un grand nombre de pharmaciens, médecins, ntiquaires et hommes de lettres, pour y étudier les diverses méthodes suivies dans l'enseignement des sciences et des différentes branches de la littérature, et l'on acheta à Londres une collection d'instruments de physique et de mathématiques destinés la future Académie. Mais le projet du ministre Carvajal échoua omme avait échoué celui du duc d'Escalona: les instruments u'on avait achetés furent déposés au séminaire des nobles, et fallut attendre encore longtemps.

Le 7 février 1834, un décret royal institua l'*Académie des ciences naturelles de Madrid.* Le moment n'était pas très-faorable, l'Espagne se débattait au milieu de la guerre civile et on ne pouvait songer à doter la nouvelle institution; mais c'était beaucoup déjà d'avoir créé un centre de réunions scientifiques, et l'Académie de 1834 doit être considérée comme le germe et l'avant-coureur de l'*Académie des sciences exactes, physiques et naturelles,* qui fut fondée par un décret royal du 25 février 1847 et à laquelle furent attribués les avantages et les prérogatives dont jouissaient les autres Académies nationales.

XIII. *L'organisation de l'Académie des sciences. Son objet.*

Le décret du 25 février 1847 fixait à trente-six le nombre des membres de l'Académie des sciences; la moitié étaient nommés

(1) Outre l'Académie espagnole et l'Académie d'histoire, Philippe V fonda encore (en 1744) l'Académie de Saint-Ferdinand, pour la culture des beaux-arts.

par le décret même, et ceux-ci procédèrent le 3 avril à l'élection des dix huit membres restants.

L'installation solennelle eut lieu le 25 du même mois. Le ministre du commerce, de l'instruction et des travaux publics, qui présidait la cérémonie, prononça un discours auquel répondit le président intérimaire, le marquis del Socorro.

L'Académie s'occupa ensuite de dresser ses statuts en prenant pour modèles les meilleures constitutions académiques de tous les pays.

Ce travail terminé et les statuts ayant reçu l'approbation de la reine, l'Académie se constitua définitivement le 5 avril 1848. Don Antonio Remon Zarco del Valle fut élu président, le marquis del Socorro, vice-président, et don Mariano Lorente, secrétaire général[1]. On nomma également les présidents et les secrétaires des trois sections des sciences exactes, des sciences physiques et des sciences naturelles entre lesquelles les membres avaient été répartis d'une manière égale.

Les statuts créaient trente six places de membres correspondants nationaux et un même nombre de places de correspondants étrangers. Les membres effectifs devaient, au moment de leur élection, avoir leur résidence habituelle à Madrid.

L'objet de l'Académie était la culture, l'avancement et la propagation des sciences exactes, physiques et naturelles.

Les moyens de remplir cet objet comprenaient: les investigations de toute espèce sur les différentes branches des sciences prémentionnées, l'acquisition de données relatives aux progrès des dites sciences au dedans et au dehors de l'Espagne; la correspondance avec les corporations et les savants nationaux et étrangers; la discussion des traités, mémoires et autres écrits présentés à l'Académie; la formation d'une bibliothèque spéciale, composée des ouvrages et recueils périodiques scientifiques les plus accrédités; la formation d'un cabinet de physique et de mécanique et celle d'un laboratoire de chimie; la formation de collections d'objets d'histoire naturelle, particulièrement des provinces de la Péninsule et de celles d'outre-mer, la publication annuelle

[1] M. Lorente avait rempli les mêmes fonctions, à partir de 1836, à [illegible] des sciences naturelles de Madrid: c'était un médecin fami[illegible] les sciences physiques et naturelles. Il mourut en 1861 et [illegible] par M. Aguilar, directeur de l'observatoire de Madrid.

résumé des actes de l'Académie; la publication de ses mé- oires, rapports et autres écrits qu'elle jugerait opportun d'im- imer; la mise au concours et l'adjudication de prix sur des estions importantes des sciences exactes, physiques et natu- lles.

Les membres et les correspondants nationaux pouvaient être émissionnés, les uns pour avoir cessé de remplir leurs fonctions endant un an sans empêchement légitime au jugement de l'Aca- émie, les autres pour avoir cessé d'exécuter les travaux qui leur aient été recommandés ou pour n'avoir remis aucun travail à a corporation pendant plus de deux ans.

Le président était élu pour trois ans, le vice-président et le ice-secrétaire pour deux ans, le trésorier et le comptable pour n an. Le secrétaire général était perpétuel.

L'Académie se réunissait en séance publique, au commence- ent de novembre, pour rendre le compte annuel de ses travaux t proclamer les prix qui avaient été décernés. La réception des cadémiciens nouvellement élus avait également lieu en séance ublique: le récipiendaire devait lire un discours auquel répondait président (1).

XIV. Les travaux de l'Académie des sciences.

Les statuts portaient que l'Académie publierait une revue ensuelle des progrès des sciences exactes, physiques et naturelles. ette revue devait offrir un résumé ou une analyse de ce que s actes périodiques et scientifiques d'Espagne et de l'étranger ntiendraient de plus remarquable. L'Académie s'en occupa im- édiatement, et, à la fin de 1857, le secrétaire perpétuel consta- it dans son rapport que le tome VII de cette utile publication tait sur le point d'être terminé. M. Aguilar y avait inséré un émoire sur la latitude de son observatoire et ses observations es occultations d'étoiles et de planètes par la lune; les observa- ions météorologiques faites à Madrid et en d'autres points de Espagne y paraissaient également.

L'Académie eut aussi le projet de former un dictionnaire ou ocabulaire des termes techniques usités dans les différentes bran- ches des sciences qui étaient de son ressort. Mais cette idée

---

(1) L'Académie décida, en 1859, que le président pourrait se faire remplacer pour cet objet par un autre membre.

description d'une des provinces de l'Espagne sans désigna-on (1).

L'Académie fut également consultée sur le meilleur système e télégraphes électriques, aérien ou souterrain, à préférer pour vaste réseau que le gouvernement avait résolu d'établir. Son pport, qui a été inséré dans le recueil des mémoires, renferme ne discussion étendue de la question scientifique, et après avoir xaminé les résultats des deux systèmes, se prononce en faveur u système aérien.

Plus tard, nous la voyons, toujours à la demande de l'État, 'occuper de former des catalogues d'instruments et appareils né-essaires aux cabinets de physique et de chimie des universités t des établissements d'enseignement moyen.

Pendant l'année académique de 1861 à 1862, elle est appelée donner son avis sur le projet de publier le *Code du savoir tronomique* (Saber de astronomia) du roi Alphonse; et le 24 i 1862, la reine décrète que le texte original sera imprimé aux is de l'État, avec les annotations et commentaires de l'acadé-cien don Manuel Rico y Sinobas.

Le décret dont nous venons de parler était une nouvelle euve de l'intérêt que le gouvernement espagnol portait à l'astro-nie. En 1860, il avait, à la demande de l'Académie, pris tou-s les mesures nécessaires pour faciliter l'observation de l'éclipse ale du soleil du 18 juillet, qui devait être visible dans une ne étendue du territoire espagnol. Par ses soins et par ceux s directeurs des observatoires de San Fernando et de Madrid, excellent accueil fut fait aux astronomes étrangers et toutes facilités leur furent données pour accomplir la mission dont étaient chargés.

J'ai dit que les académiciens devaient, en vertu des statuts, ononcer un discours lors de leur réception. Le sujet en est is ordinairement dans la science qui a été l'occupation princi-le du récipiendiaire, et le discours présente un aperçu des pro-s de cette science depuis une époque plus ou moins éloignée: lquefois il est complété par la réponse du président ou de délégué.

(1) On se rappellera que l'Académie de Belgique proposa successi-ment la description géologique de ses différentes provinces et facilita si l'exécution de la carte générale de M. Dumont.

Voici quelques-uns de ces discours que j'ai remarqués et dont j'ai tiré parti dans la rédaction de mon travail: — Discours sur l'immense développement que les mathématiques ont reçu depuis le dix-septième siècle; par D. Manuel Monteverde. — Résumé de l'histoire et des progrès de l'astronomie; par D. Antonio Aguilar y Vela; et réponse du président, D. Antonio Remon Zarco del Valle. — Discours sur les progrès de la géodésie; par D. Frutos Saavedra Meneses. — Discours sur l'importance et les applications des études géologiques; par D. Ramon Pellico; et réponse de D. Rafael de Amar de la Torre. — Discours sur l'influence des sciences exactes et naturelles dans les arts de construction et particulièrement dans ceux où le fer entre comme élément principal; par D. Lucio del Valle; et réponse de D. Cipriano Segundo Montesino. — Discours sur l'origine et les progrès des instruments d'astronomie et de géodésie; par D. Carlos Ibañez é Ibañez; et réponse de D. Antonio Aguilar y Vela.

L'Académie des sciences de Madrid eut d'abord à lutter contre l'indifférence du public: „L'existence, les travaux et l'objet de l'Académie sont mieux connus à l'étranger que dans notre propre pays", disait en 1853 le secrétaire perpétuel. Peu à peu, une réaction s'opéra à son profit; tout le monde voulut en faire partie, les places d'académicien étaient recherchées avec une ardeur sans égale; on mettait en campagne des protecteurs puissants pour les obtenir, mais les statuts exigeaient que les candidats se fussent distingués notablement dans une des sciences exactes, physiques ou naturelles et les intrigues allaient se briser contre cet obtacle insurmontable. D'un autre côté, quand l'Académie eut acquis de l'autorité, les chercheurs de la quadrature du cercle, les inventeurs de machines impossibles, les auteurs de projets ridicules ou de livres ineptes s'appliquèrent à exploiter cette autorité et à placer sous le manteau de l'Académie leurs rêves ou leurs sottises; pour réussir, ils se servaient de l'intermédiaire du gouvernement, mais ils échouèrent comme les demandeurs de places.

L'Académie éprouva aussi une certaine peine à se loger convenablement: quand je la visitai en 1865, en compagnie de M. Aguilar, son secrétaire perpétuel, elle était installée dans une dépendance de la direction générale de l'instruction publique. Sa bibliothèque réunissait déjà un grand nombre d'ouvrages offerts pour la plupart en présent, mais je ne me rappelle pas avoir vu le laboratoire ni les collections d'instruments que les statuts rangeaient au nombre des moyens propres à remplir l'objet de l'institution.

XXX.) La carte géodésique de l'Espagne.*

On avait pensé à différentes reprises en Espagne à lever la arte géodésique du pays: nous avons vu que, vers la fin du iècle dernier, un corps d'ingénieurs cosmographes de l'État avait té créé dans ce but, mais rien ne se fit et il fallut attendre enore cinquante ans avant qu'on ne mit sérieusement la main à oeuvre.

C'est au ministère du *fomento* qu'on doit l'initiative de ce rand projet: l'arrêté royal du 12 juillet 1849 établissant la comaission de la carte géologique instituait une section chargée de a carte géographique. Le 11 janvier 1853, cette section était emplacée par une junte directrice avec le général don Manuel le Monteverde pour président. Le 14 octobre suivant, la nouvelle unte devenait, à titre de corps consultatif, une dépendance immédiate du ministère de la guerre, et le brigadier don Fernando Garcia de San Pedro prenait la direction des travaux, le général le Monteverde ayant reçu une mission à l'étranger. Dès le 27 ctobre, San Pedro avait terminé un plan d'opérations qui fut pprouvé par le gouvernement et n'a pas subi depuis d'altération ssentielle.

Le plan dont nous parlons consistait à reconnaître le pays ans toute son étendue, afin de former les projets de différentes haînes géodésiques de premier ordre dans les directions du nord u sud et de l'est à l'ouest, et de diviser le territoire en quadriatères d'environ deux degrés de côté, en prenant comme lignes e départ le méridien et le parallèle de Madrid: une autre chaîne, galement de premier ordre, devait suivre la direction des côtes t déterminer leur contour. Une base devait être mesurée au cene de l'Espagne, et d'autres bases de vérification serviraient à conôler la marche du travail: de plus, des observations astronomiues seraient faites aux points qu'on jugerait le plus avantageux. nfin, un réseau de triangles couvrirait l'espace intérieur de chaue quadrilatère, en partant des côtés des chaînes géodésiques t compléterait ainsi l'ensemble des travaux de premier ordre.

Les opérations commencèrent le 23 mars 1854: deux sections, omposées chacune de trois officiers, entrèrent en campagne; eux autres officiers partirent pour l'étranger avec la mission 'acheter des instruments et d'étudier les méthodes les plus nouelles employées chez les autres nations dans l'exécution de urs cartes géographiques. Avant de se mettre en route, ces fficiers avaient proposé et fait accepter un projet d'appareil per-

*) v. pag. 379.

fectionné pour mesurer les bases, appareil qui fut exécuté à Paris sous leur direction (1) par Brunner et servit plus tard pour l'opération dont il est question. A la mort du brigadier San Pedro, survenue en juillet 1854, on apporta quelques modifications à son plan, dans le but de l'améliorer. Il fut résolu qu'on mesurerait un arc de parallèle et un arc de méridien avec toute la rigueur possible. M. Aguilar, directeur de l'observatoire de Madrid, se chargea des opérations astronomiques du méridien et du parallèle de Madrid, afin que les longitudes et latitudes, déterminées avec la plus grande exactitude, pussent être comparées avec celles déduites des triangulations géodésiques; il entreprit en même temps de former un catalogue d'étoiles circomzénithales entre les parallèles dans lesquels le territoire espagnol se trouve compris, pour servir à la détermination des latitudes géographiques.

Jusqu'à la fin de 1859, le nombre des officiers employés aux travaux de la carte n'alla jamais au delà de onze: le premier soin de la commission de statistique, qui, à partir de 1860, fut chargée de la continuation des travaux (2), fut d'augmenter le personnel et le matériel, afin d'activer les opérations. Mais la guerre contre le Maroc vint contrarier ses projets, et elle dut attendre la fin de cette lutte pour voir porter à dix-huit le nombre des officiers de la carte. Il n'entre pas dans notre cadre de décrire les travaux qui ont été exécutés depuis; nous nous bornerons à dire que, dès l'année 1862, la triangulation de l'Espagne était reliée à celles de la France et du Portugal.

XXXI. Le cadastre. Les travaux géologiques, forestiers et hydrographiques. Les travaux météorologiques.

La junte de statistique était également chargée de former le *cadastre*, c'est-à-dire de déterminer l'étendue et la valeur des biens-fonds, afin d'arriver à une répartition équitable de l'impôt. La topographie du pays était la base essentielle de ce travail: elle se rattachait, d'un autre côté, à la carte géodésique dont elle était le complément: la junte y apporta donc tous ses soins.

Il fallut avant tout créer un personnel capable: une école

---

(1) *Experiencias hechas con el aparato de medir bases perteneciente à la comision del mapa de España*, 1 vol. in-8°. Madrid, 1859. Cet ouvrage a été traduit en français par M. Laussedat, capitaine d'état-major.

(2) En vertu de la loi du 5 juin 1859.

oder die Grösse:

$$u^2 = (a+\gamma y-\beta z)^2+(b+\alpha z-\gamma x)^2+(c+\beta x-\alpha y)^2,$$

ein Minimum wird, wobei wir natürlich annehmen müssen, dass die Grössen α, β, γ nicht sämmtlich verschwinden, weil ja, wenn dies der Fall wäre, u den constanten Werth

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

haben würde, und also von der Bestimmung der Grössen x, y, z in der angegebenen Weise offenbar gar nicht die Rede sein könnte.

Setzt man für x, y, z beliebige andere Werthe, die wir im Allgemeinen beziehungsweise durch $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ bezeichnen wollen, und bezeichnet den diesen letzteren Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden Werth von u durch u_1; so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}
u_1{}^2 = u^2 &+ 2(a+\gamma y-\beta z)(\gamma\Delta y-\beta\Delta z)\\
&+2(b+\alpha z-\gamma x)(\alpha\Delta z-\gamma\Delta x)\\
&+2(c+\beta x-\alpha y)(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)\\
&+(\gamma\Delta y-\beta\Delta z)^2+(\alpha\Delta z-\gamma\Delta x)^2+(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)^2\\
= u^2 &+ 2\{\beta(c+\beta x-\alpha y)-\gamma(b+\alpha z-\gamma x)\}\Delta x\\
&+2\{(\gamma(a+\gamma y-\beta z)-\alpha(c+\beta x-\alpha y)\}\Delta y\\
&+2\{\alpha(b+\alpha z-\gamma x)-\beta(a+\gamma y-\beta z)\}\Delta z\\
&+(\gamma\Delta y-\beta\Delta z)^2+(\alpha\Delta z-\gamma\Delta x)^2+(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)^2.
\end{aligned}$$

Bestimmt man nun die Grössen x, y, z so, dass den drei Gleichungen:

$$\alpha(b+\alpha z-\gamma x)-\beta(a+\gamma y-\beta z)=0,$$

$$\beta(c+\beta x-\alpha y)-\gamma(b+\alpha z-\gamma x)=0,$$

$$\gamma(a+\gamma y-\beta z)-\alpha(c+\beta x-\alpha y)=0$$

genügt wird; so ist offenbar, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}_1$ die den auf diese Weise bestimmten Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden Werthe von u und u_1 bezeichnen, für alle Werthe von Δx, Δy, Δz immer $\mathfrak{u}_1 \overset{=}{>} \mathfrak{u}$, also $\mathfrak{u}$ der kleinste Werth oder das Minimum von u. Bezeichnen wir jetzt die Werthe von x, y, z, welchen das Minimum $\mathfrak{u}$ von u entspricht, respective durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so müssen also $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ nach dem Obigen aus den Gleichungen:

$$\alpha(\beta c-\gamma b)+\beta(\gamma a-\alpha c)+\gamma(\alpha b-\beta a)=0,$$

$$a(\beta c-\gamma b)+b(\gamma a-\alpha c)+c(\alpha b-\beta a)=0$$

ist, so ergeben sich aus den Formeln 4) unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}+\gamma\mathfrak{z}=0, \\ a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}+c\mathfrak{z}=0. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus denselben Formeln:

$$a+\gamma\mathfrak{y}-\beta\mathfrak{z}=a-\frac{\gamma(\gamma a-\alpha c)-\beta(\alpha b-\beta a)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$b+\alpha\mathfrak{z}-\gamma\mathfrak{x}=b-\frac{\alpha(\alpha b-\beta a)-\gamma(\beta c-\gamma b)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$c+\beta\mathfrak{x}-\alpha\mathfrak{y}=c-\frac{\beta(\beta c-\gamma b)-\alpha(\gamma a-\alpha c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

oder:

$$a+\gamma\mathfrak{y}-\beta\mathfrak{z}=a-\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a-\alpha(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$b+\alpha\mathfrak{z}-\gamma\mathfrak{x}=b-\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)b-\beta(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$c+\beta\mathfrak{x}-\alpha\mathfrak{y}=c-\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)c-\gamma(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

also:

$$6) \quad \begin{cases} a+\gamma\mathfrak{y}-\beta\mathfrak{z}=\dfrac{\alpha(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \\ b+\alpha\mathfrak{z}-\gamma\mathfrak{x}=\dfrac{\beta(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, \\ c+\beta\mathfrak{x}-\alpha\mathfrak{y}=\dfrac{\gamma(\alpha a+\beta b+\gamma c)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}; \end{cases}$$

folglich nach dem Obigen:

$$7) \quad u^2=\frac{(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

oder:

$$8) \quad u=\pm\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $\alpha a+\beta b+\gamma c$ positiv oder negativ ist; dies ist der kleinste Werth oder das Minimum von u.

Bemerken mag man auch noch die folgenden Relationen:

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=\frac{(\alpha b-\beta a)^2+(\beta c-\gamma b)^2+(\gamma a-\alpha c)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)-(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-\mathfrak{u}^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

also:

$$\mathfrak{u}^2=a^2+b^2+c^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)$$

oder:

$$9)\ldots\quad \mathfrak{u}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)}.$$

Ferner ist:

$$(\beta c-\gamma b)\mathfrak{x}+(\gamma a-\alpha c)\mathfrak{y}+(\alpha b-\beta a)\mathfrak{z}=-\frac{(\alpha b-\beta a)^2+(\beta c-\gamma b)^2+(\gamma a-\alpha c)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$=-\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)-(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$=\mathfrak{u}^2-(a^2+b^2+c^2),$$

also:

$$\mathfrak{u}^2=a^2+b^2+c^2+\{(\beta c-\gamma b)\mathfrak{x}+(\gamma a-\alpha c)\mathfrak{y}+(\alpha b-\beta a)\mathfrak{z}\}$$

oder:

$$10)\ldots\mathfrak{u}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+\{(\beta c-\gamma b)\mathfrak{x}+(\gamma a-\alpha c)\mathfrak{y}+(\alpha b-\beta a)\mathfrak{z}\}}.$$

§. 2.

Durch zwei Punkte A und B (Taf. VIII. Fig. 1.) in einer Ebene, deren Entfernung von einander nicht kleiner als die Grösse E ist, lassen sich in derselben Ebene immer einander parallele Gerade ziehen, deren Entfernung von einander der Grösse E gleich ist.

Aus dem Punkte A (oder B) als Mittelpunkt beschreibe man mit der Grösse E als Halbmesser einen Kreis. Ist nun $AB>E$, so liegt der Punkt B (oder A) ausserhalb dieses Kreises, und man kann also durch B (oder A) zwei Berührende an denselben ziehen; zieht man dann durch A (oder B) Parallelen mit diesen Berührenden, so erhält man offenbar zwei (zwei) Paare durch A und B gehender paralleler Geraden, deren Entfernung von einander die Grösse E ist, wie verlangt wurde. Wenn $AB=E$ ist, so geht der beschriebene Kreis durch B (oder A), und zwei

und B auf AB errichtete Perpendikel werden in diesem offenbar die beiden verlangten, durch A und B gehenden der parallelen Geraden sein.

§. 3.

Vir wollen jetzt die Entfernung, eigentlich die kürzeste Entng, zweier einander parallelen geraden Linien, deren Gleigen gegeben sind, von einander bestimmen.

Die Gleichungen der beiden Geraden seien:

$$\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}(x-a_0)\cos\beta=(y-b_0)\cos\alpha,\\(y-b_0)\cos\gamma=(z-c_0)\cos\beta,\\(z-c_0)\cos\alpha=(x-a_0)\cos\gamma\\\qquad\text{und}\\(x-a_1)\cos\beta=(y-b_1)\cos\alpha,\\(y-b_1)\cos\gamma=(z-c_1)\cos\beta,\\(z-c_1)\cos\alpha=(x-a_1)\cos\gamma;\end{array}\right.$$

wie man dies der Kürze wegen bekanntlich auch zu schreiflegt:

$$\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-a_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-b_0}{\cos\beta}=\dfrac{z-c_0}{\cos\gamma}\\\qquad\text{und}\\\dfrac{x-a_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma}.\end{array}\right.$$

lehmen wir nun in den beiden gegebenen Geraden zwei e $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ so an, dass die durch diese Punkte nmte Gerade auf den beiden gegebenen Geraden senkrecht ; so ist nach 1):

$$\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}(x_0-a_0)\cos\beta=(y_0-b_0)\cos\alpha,\\(y_0-b_0)\cos\gamma=(z_0-c_0)\cos\beta,\\(z_0-c_0)\cos\alpha=(x_0-a_0)\cos\gamma\\\qquad\text{und}\\(x_1-a_1)\cos\beta=(y_1-b_1)\cos\alpha,\\(y_1-b_1)\cos\gamma=(z_1-c_1)\cos\beta,\\(z_1-c_1)\cos\alpha=(x_1-a_1)\cos\gamma;\end{array}\right.$$

wenn man subtrahirt:

deren
ist, l
rade

An
mit der
so liegt
man kan
ziehen;
Berühren
und *B* ge
ander die
ist, so geht

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ aus nach dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ hin gehende Gerade mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so ist:

$$x_1 = x_0 + E\cos\varphi,\ y_1 = y_0 + E\cos\psi,\ z_1 = z_0 + E\cos\chi;$$

also:

$$x_0 - x_1 = -E\cos\varphi,\ y_0 - y_1 = -E\cos\psi,\ z_0 - z_1 = -E\cos\chi;$$

folglich:

$$\begin{aligned}&(x_0-x_1)\cos\alpha + (y_0-y_1)\cos\beta + (z_0-z_1)\cos\gamma\\ &= -E(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi).\end{aligned}$$

Weil nun aber die durch die Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ gehende Gerade auf den beiden gegebenen einander parallelen Geraden senkrecht steht, so ist:

$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0,$$

also wegen der vorstehenden Gleichung:

$$(x_0-x_1)\cos\alpha + (y_0-y_1)\cos\beta + (z_0-z_1)\cos\gamma = 0,$$

und daher nach dem Obigen:

$$E^2 = \left\{\begin{aligned} &\{(a_0-a_1)\cos\beta - (b_0-b_1)\cos\alpha\}^2\\ +&\{(b_0-b_1)\cos\gamma - (c_0-c_1)\cos\beta\}^2\\ +&\{(c_0-c_1)\cos\alpha - (a_0-a_1)\cos\gamma\}^2,\end{aligned}\right.$$

also:

$$6)\ldots E = \sqrt{\left\{\begin{aligned} &[(a_0-a_1)\cos\beta - (b_0-b_1)\cos\alpha]^2\\ +&[(b_0-b_1)\cos\gamma - (c_0-c_1)\cos\beta]^2\\ +&[(c_0-c_1)\cos\alpha - (a_0-a_1)\cos\gamma]^2\end{aligned}\right\}},$$

oder nach der schon oben angewandten Transformation:

$$E = \sqrt{\left\{\begin{aligned} &[(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(c_0-c_1)^2](\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\\ -&[(a_0-a_1)\cos\alpha + (b_0-b_1)\cos\beta + (c_0-c_1)\cos\gamma]^2\end{aligned}\right\}},$$

also:

$$7)\ldots E = \sqrt{\left\{\begin{aligned} &(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(c_0-c_1)^2\\ -&[(a_0-a_1)\cos\alpha + (b_0-b_1)\cos\beta + (c_0-c_1)\cos\gamma]^2\end{aligned}\right\}}.$$

II.

Betrachtung nur eines Kräftepaars.

§. 4.

Unter einem Kräftepaar oder kürzer einem Paar versteht man zwei nach einander parallelen entgegengesetzten, aber nicht direct entgegengesetzten, also nicht in eine Gerade fallenden, Richtungen wirkende einander absolut gleiche Kräfte.

Ein Kräftepaar wird im Allgemeinen bestimmt:

1. durch die Angriffspunkte der beiden dasselbe bildenden Kräfte, wofür man natürlich alle Punkte in den Richtungslinien der beiden Kräfte sich gesetzt denken kann; die Coordinaten der Angriffspunkte werden wir für die beiden das Paar bildenden Kräfte immer durch x, y, z und ξ, η, ζ bezeichnen, indem wir diese Symbole mit verschiedenen unteren Indices versehen;

2. durch die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche übereinstimmende oder gleichstimmige Richtungen der beiden einander parallelen Richtungslinien der Kräfte des Paars mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliessen; diese Winkel werden wir immer durch die mit denselben unteren Indices wie vorher versehenen Buchstaben α, β, γ bezeichnen;

3. durch die beiden einander absolut gleichen das Paar bildenden Kräfte, welche wir wie gewöhnlich als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie nach den durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtungen, oder nach den entgegengesetzten Richtungen hin wirken; mit Rücksicht hierauf werden wir diese beiden an den Punkten (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ wirkenden Kräfte beziehungsweise durch P und Π bezeichnen, indem wir auch diese Symbole mit denselben unteren Indices wie vorher versehen. Offenbar findet hiernach für jedes Kräftepaar die Gleichung:

$$P+\Pi=0$$

Statt.

Die durch die beiden einander parallelen Richtungslinien der Kräfte P und Π bestimmte Ebene wird die Ebene des Paars genannt; jede beliebige unter den auf dieser Ebene senkrecht stehenden Geraden heisst die Axe des Paars, wobei man weiterer Bestimmungen wegen nachher §. 9. zu vergleichen hat; die gerade Linie, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte mit einander verbindet, wird der Arm des Paars genannt; die Entfernung, eigentlich die kürzeste Entfernung, der parallelen Richtungslinien

r beiden Kräfte P und Π von einander heisst die **Breite** des aars. Das Product der Breite in den absoluten Werth der räfte heisst das **Moment** des Paars.

§. 5.

Wir wollen jetzt die im vorhergehenden Paragraphen näher arakterisirten Elemente eines beliebigen Paars durch

$$x_0, y_0, z_0; \quad \xi_0, \eta_0, \zeta_0; \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \quad P_0, \Pi_0$$

zeichnen.

Die von den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ ausgehenden, durch Winkel α_0, β_0, γ_0 bestimmten Geraden denken wir uns auf Ebene der xy — wofür übrigens auch jede andere Coordina-ebene gesetzt werden kann — projicirt, und bezeichnen die diesen, von den Punkten (x_0y_0) und $(\xi_0\eta_0)$ ausgehenden Pro-ionen mit den positiven Theilen der Axen der x, y einge-ossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α_0', β_0'; ind die Gleichungen der Geraden, in denen die beiden Pro-onen liegen:

$$(x-x_0)\cos\beta_0' = (y-y_0)\cos\alpha_0',$$
$$(x-\xi_0)\cos\beta_0' = (y-\eta_0)\cos\alpha_0';$$

Gleichungen dieser Geraden sind aber nach den Lehren der ytischen Geometrie auch:

$$(x-x_0)\cos\beta_0 = (y-y_0)\cos\alpha_0,$$
$$(x-\xi_0)\cos\beta_0 = (y-\eta_0)\cos\alpha_0;$$

etzen wir nun:

$$\cos\alpha_0 = k_0\cos\alpha_0',$$

t, weil:

$$(x-x_0).k_0\cos\beta_0 = (y-y_0).k_0\cos\alpha_0,$$
$$(x-\xi_0).k_0\cos\beta_0 = (y-\eta_0).k_0\cos\alpha_0$$

offenbar auch:

$$\cos\beta_0 = k_0\cos\beta_0';$$

$$\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 = k_0^2(\cos\alpha_0'^2 + \cos\beta_0'^2),$$

, weil:

$$\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 = 1 - \cos\gamma_0^2 = \sin\gamma_0^2,$$
$$\cos\alpha_0'^2 + \cos\beta_0'^2 = 1$$

ist:

$$\sin\gamma_0{}^2 = k_0{}^2,$$

also:

$$k_0 = \pm\sin\gamma_0.$$

Nun erhellet aber mittelst einer ganz einfachen Betracht auf der Stelle, dass $\cos\alpha_0$ und $\cos\alpha_0'$ immer gleiche Vorzeic haben; daher ist wegen der Gleichung

$$\cos\alpha_0 = k_0\cos\alpha_0'$$

offenbar k_0 positiv, folglich, weil $\sin\gamma_0$ stets eine positive Grösse

$$k_0 = \sin\gamma_0,$$

und daher nach dem Obigen:

$$\cos\alpha_0 = \cos\alpha_0'\sin\gamma_0, \quad \cos\beta_0 = \cos\beta_0'\sin\gamma_0.$$

Wir wollen jetzt von dem Punkte $(\xi_0\eta_0)$ auf die Gerade, welcher die von dem Punkte (x_0y_0) ausgehende Projection li ein Perpendikel fällen, und dieses Perpendikel durch p_0, sei Fusspunkt durch $(x_0'y_0')$ bezeichnen; dann haben wir offen die folgenden Gleichungen:

$$(x_0'-x_0)\cos\beta_0' = (y_0'-y_0)\cos\alpha_0',$$
$$(x_0'-\xi_0)\cos\alpha_0' + (y_0'-\eta_0)\cos\beta_0' = 0;$$

oder:

$$(x_0'-x_0)\cos\beta_0' - (y_0'-y_0)\cos\alpha_0' = 0,$$
$$(x_0'-\xi_0)\cos\alpha_0' + (y_0'-\eta_0)\cos\beta_0' = 0;$$

oder:

$$(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0' = (x_0-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0-\eta_0)\cos$$
$$(x_0'-\xi_0)\cos\alpha_0' + (y_0'-\eta_0)\cos\beta_0' = 0;$$

und hieraus:

$$x_0'-\xi_0 = \quad \{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}\cos\beta_0',$$
$$y_0'-\eta_0 = -\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}\cos\alpha_0';$$

also:

$$(x_0'-\xi_0)^2 + (y_0'-\eta_0)^2 = \{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}$$

folglich:

$$p_0{}^2 = \{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}^2,$$

oder nach dem Obigen:

$$p_0{}^2 = \{(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0' - (y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0'\}^2.$$

Weil nach dem Obigen:

$$_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0=\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}\sin\gamma_0$$

d $\sin\gamma_0$ positiv ist, so hat

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

t

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0',$$

so nach dem Obigen auch mit

$$(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0'$$

eiches Vorzeichen.

Denkt man sich nun an dem Punkte $(x_0'y_0')$ eine Kraft in r Ebene der (xy) nach der durch die Winkel α_0', β_0' bestimm- n Richtung hin wirkend, so erhellet aus Taf. VIII. Fig. 2., wenn n nur bedenkt, dass $x_0'-\xi_0$, $y_0'-\eta_0$ die Coordinaten des nktes $(x_0'y_0')$ in Bezug auf $(\xi_0\eta_0)$ als Anfangspunkt sind, leicht lgendes:

Wenn die in Rede stehende Kraft eine Drehung um den Punkt $\eta_0)$ in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x nach m positiven Theile der Axe der y hin hervorzubringen strebt, ist gleichzeitig:

$x_0'-\xi_0$	$y_0'-\eta_0$	$\cos\alpha_0'$	$\cos\beta_0'$
positiv	positiv	negativ	positiv
negativ	positiv	negativ	negativ
negativ	negativ	positiv	negativ
positiv	negativ	positiv	positiv

so in allen Fällen

$$(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0'$$

sitiv.

Wenn die in Rede stehende Kraft eine Drehung um den Punkt $\eta_0)$ in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x nach m negativen Theile der Axe der y hin hervorzubringen strebt, ist gleichzeitig:

$x_0'-\xi_0$	$y_0'-\eta_0$	$\cos\alpha_0'$	$\cos\beta_0'$
positiv	positiv	positiv	negativ
negativ	positiv	positiv	positiv
negativ	negativ	negativ	positiv
positiv	negativ	negativ	negativ

also in allen Fällen

$$(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0'$$

negativ.

Nennen wir nun der Kürze wegen Drehungen in dem S von dem positiven Theile der Axe der x nach dem posi Theile der Axe der y hin positive Drehungen, dagegen Dr gen in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x dem negativen Theile der Axe der y hin negative Drehun so ergiebt sich aus dem Obigen Folgendes:

Jenachdem die in Rede stehende Kraft um den Punkt (eine positive oder eine negative Drehung hervorzubringen streb

$$(x_0'-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0'-\eta_0)\cos\alpha_0',$$

also nach dem Obigen auch

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'$$

und

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

beziehungsweise positiv oder negativ.

Nach dem Obigen ist auch

$$p_0=\pm\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'\}$$

oder

$$p_0\sin\gamma_0=\pm\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}$$

zu setzen, indem man die oberen oder die unteren Zeichen ni jenachdem die in Rede stehende Kraft um den Punkt $(\xi_0\eta_0)$ positive oder eine negative Drehung hervorzubringen strebt; nur man p_0 selbst als positiv oder negativ betrachtet, jenachden in Rede stehende Kraft um den Punkt $(\xi_0\eta_0)$ eine positive eine negative Drehung hervorzubringen strebt, kann man allge

$$p_0=(x_0-\xi_0)\cos\beta_0'-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0'$$

oder

$$p_0\sin\gamma_0=(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

setzen.

Wenn p_0 nicht verschwindet, so kann wegen der vorst den Gleichung die Grösse

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

nur dann verschwinden, wenn $\sin\gamma_0$ verschwindet; dann steh Richtungslinien der Kräfte P_0, Π_0 auf der Ebene der xy recht, und die vorhergehenden Sätze hören auf, ohne Zwe tigkeit anwendbar zu sein. In einem solchen Falle muss

statt der Ebene der xy eine andere Coordinatenebene, oder überhaupt ein anderes Coordinatensystem, zu Grunde legen, eine Bemerkung, welche man für alles Folgende festzuhalten hat. Dasselbe hat man zu beachten, wenn p_0 verschwindet. In beiden Fällen steht die Ebene des Paars auf der Ebene der xy senkrecht. Im ersten Falle sind die Projectionen der Geraden auf der Ebene der xy eigentlich an sich unbestimmt.

§. 6.

Um über die Drehung eines Kräftepaars P_0, Π_0 zu urtheilen, denken wir uns die Angriffspunkte der Kräfte und ihre Richtungen auf die Ebene der xy, wofür aber auch jede andere Coordinatenebene gesetzt werden kann, projicirt, und die bloss nach ihren absoluten Werthen, welche wir durch (P_0), (Π_0) bezeichnen wollen, aufgefassten Kräfte des Paars nach den Projectionen ihrer Richtungen an den Punkten $(x_0 y_0)$ und $(\xi_0 \eta_0)$ in der Ebene der xy wirkend; dies nennen wir die Projection des Paars auf der Ebene der xy. Die Drehung des Paars nennen wir nun positiv oder negativ, jenachdem die Drehung seiner Projection auf der Ebene der xy um den Mittelpunkt der die Punkte $(x_0 y_0)$ und $(\xi_0 \eta_0)$ verbindenden Geraden im Sinne von dem positiven Theile der Axe der x nach dem positiven Theile der Axe der y, oder von dem positiven Theile der Axe der x nach dem negativen Theile der Axe der y hin erfolgt.

Dies vorausgesetzt, überzeugt man sich nun leicht von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die Drehung des Paars $P_0 \Pi_0$ ist positiv oder negativ, jenachdem das Product

$$P_0 \{(x_0 - \xi_0)\cos\beta_0 - (y_0 - \eta_0)\cos\alpha_0\}$$

positiv oder negativ ist, was sich natürlich auch umkehren lässt.

Wenn nämlich P_0 positiv ist, so ist nach dem, was im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden ist, die Drehung des Paars offenbar positiv oder negativ, jenachdem

$$(x_0 - \xi_0)\cos\beta_0 - (y_0 - \eta_0)\cos\alpha_0$$

beziehungsweise positiv oder negativ ist.

Wenn dagegen P_0 negativ ist, so ist nach dem, was im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden ist, die Drehung des Paars offenbar positiv oder negativ, jenachdem

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

beziehungsweise negativ oder positiv ist.

Also ist die Drehung des Paars positiv oder negativ, jenachdem

$$P_0 \text{ und } (x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, folglich jenachdem das Product

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}$$

beziehungsweise positiv oder negativ ist, wie behauptet wurde.

§. 7.

Die Gleichung der Ebene des Paars sei:

$$A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)+C_0(z-z_0)=0,$$

so ist:

$$A_0(x_0-\xi_0)+B_0(y_0-\eta_0)+C_0(z_0-\zeta_0)=0.$$

Bezeichnen wir ferner einen beliebigen, von $(x_0y_0z_0)$ verschiedenen Punkt in der durch $(x_0y_0z_0)$ gehenden Richtungslinie durch $(x_0'y_0'z_0')$, und die Entfernung der beiden Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_0'y_0'z_0')$ von einander durch G_0; so ist bekanntlich:

$$x_0'-x_0=\pm G_0\cos\alpha_0,$$
$$y_0'-y_0=\pm G_0\cos\beta_0,$$
$$z_0'-z_0=\pm G_0\cos\gamma_0.$$

Weil nun aber der Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ in der Ebene des Paars liegt, so ist:

$$A_0(x_0'-x_0)+B_0(y_0'-y_0)+C_0(z_0'-z_0)=0,$$

folglich:

$$G_0(A_0\cos\alpha_0+B_0\cos\beta_0+C_0\cos\gamma_0)=0,$$

also, weil G_0 nicht verschwindet:

$$A_0\cos\alpha_0+B_0\cos\beta_0+C_0\cos\gamma_0=0.$$

Wegen der beiden Gleichungen:

$$A_0(x_0-\xi_0)+B_0(y_0-\eta_0)+C_0(z_0-\zeta_0)=0,$$
$$A_0\cos\alpha_0+B_0\cos\beta_0+C_0\cos\gamma_0=0$$

kann man offenbar:

$$A_0 = (y_0 - \eta_0)\cos\gamma_0 - (z_0 - \zeta_0)\cos\beta_0,$$
$$B_0 = (z_0 - \zeta_0)\cos\alpha_0 - (x_0 - \xi_0)\cos\gamma_0,$$
$$C_0 = (x_0 - \xi_0)\cos\beta_0 - (y_0 - \eta_0)\cos\alpha_0$$

etzen, und die Gleichung der Ebene des Paars ist folglich:

$$\left.\begin{array}{l} \{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}(x-x_0) \\ +\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}(y-y_0) \\ +\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}(z-z_0) \end{array}\right\} = 0,$$

der auch:

$$\left.\begin{array}{l} \{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}(x-\xi_0) \\ +\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}(y-\eta_0) \\ +\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}(z-\zeta_0) \end{array}\right\} = 0.$$

§. 8.

Wenn wir die Breite des Paars durch E_0 bezeichnen, so ist nach §. 3.:

$$E_0 = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} [(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2 \\ +[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2 \\ +[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2 \end{array}\right\}}$$

der:

$$E_0 = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} (x_0-\xi_0)^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2 \\ -[(x_0-\xi_0)\cos\alpha_0+(y_0-\eta_0)\cos\beta_0+(z_0-\zeta_0)\cos\gamma_0]^2 \end{array}\right\}}.$$

§. 9.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen der Axe des Paars mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, seien φ_0, ψ_0, χ_0.

Weil die Axe des Paars auf der Ebene des Paars, also auf den Richtungen der Kräfte senkrecht steht, so ist:

$$\cos\alpha_0\cos\varphi_0+\cos\beta_0\cos\psi_0+\cos\gamma_0\cos\chi_0 = 0.$$

Bezeichnet man die Entfernung der beiden Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ von einander durch G_0, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen der durch

die beiden genannten Punkte gehenden Geraden mit den positi Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch θ_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$; so

$$x_0-\xi_0=\pm G_0\cos\theta_0,\quad y_0-\eta_0=\pm G_0\cos\omega_0,\quad z_0-\zeta_0=\pm G_0\cos$$

also:

$$\begin{aligned}&(x_0-\xi_0)\cos\varphi_0+(y_0-\eta_0)\cos\psi_0+(z_0-\zeta_0)\cos\chi_0\\ &=\pm G_0(\cos\theta_0\cos\varphi_0+\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\overline{\omega}_0\cos\chi_0),\end{aligned}$$

folglich, weil

$$\cos\theta_0\cos\varphi_0+\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\overline{\omega}_0\cos\chi_0=0$$

ist:

$$(x_0-\xi_0)\cos\varphi_0+(y_0-\eta_0)\cos\psi_0+(z_0-\zeta_0)\cos\chi_0=0.$$

Wegen der beiden Gleichungen:

$$\begin{gathered}\cos\alpha_0\cos\varphi_0+\cos\beta_0\cos\psi_0+\cos\gamma_0\cos\chi_0=0,\\ (x_0-\xi_0)\cos\varphi_0+(y_0-\eta_0)\cos\psi_0+(z_0-\zeta_0)\cos\chi_0=0\end{gathered}$$

kann, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, offenbar:

$$\begin{aligned}\cos\varphi_0&=G\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\},\\ \cos\psi_0&=G\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\},\\ \cos\chi_0&=G\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}\end{aligned}$$

gesetzt werden, woraus sich, weil

$$\cos\varphi_0^2+\cos\psi_0^2+\cos\chi_0^2=1$$

ist, sogleich:

$$G=\pm\frac{1}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\ +[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\ +[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}}$$

ergiebt. Also ist nach dem Obigen:

$$\cos\varphi_0=\pm\frac{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\ +[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\ +[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}},$$

$$\cos\psi_0=\pm\frac{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\ +[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\ +[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}},$$

$$\cos\chi_0 = \pm \frac{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\ +[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\ +[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}};$$

in welchen Formeln man den Nenner auch unter der Form:

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x_0-\xi_0)^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2\\ -[(x_0-\xi_0)\cos\alpha_0+(y_0-\eta_0)\cos\beta_0+(z_0-\zeta_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}$$

darstellen kann.

Wir wollen uns jetzt die Axe durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ gelegt denken und nur einen der beiden von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ ausgehenden Theile derselben in's Auge fassen, von nun an auch bloss diesen Theil die Axe nennen.

Von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ denken wir uns ferner eine mit dem positiven Theile der Axe der z gleich gerichtete Gerade ausgehend, und nehmen in dieser Geraden einen beliebigen von $(x_0 y_0 z_0)$ verschiedenen Punkt $(x_0 y_0 z_0')$ an, wo also offenbar $z_0' > z_0$, folglich $z_0' - z_0$ positiv ist.

Der den Werthen x_0, y_0, z_0' von x, y, z entsprechende Werth der Function der Gleichung der Ebene des Paars (§. 7.) ist:

$$\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}(z_0'-z_0),$$

und hat also, weil $z_0'-z_0$ positiv ist, mit

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

gleiches Vorzeichen.

Bezeichnen von jetzt an $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die als von $(x_0 y_0 z_0)$ ausgehend gedachte Axe mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, so sind, wenn r_0 eine positive nicht verschwindende beliebige Grösse bezeichnet:

$$x_0+r_0\cos\varphi_0,\quad y_0+r_0\cos\psi_0,\quad z_0+r_0\cos\chi_0$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Axe, und der diesen Werthen von x, y, z entsprechende Werth der Function der Gleichung der Ebene des Paars (§. 7.) hat also nach dem Obigen offenbar mit der Grösse:

$$\pm\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\+[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\+[z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}$$

gleiches Vorzeichen.

Wenn die Drehung des Paars positiv ist, ist nach §. 6. das Product

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}$$

positiv, und

$$P_0 \text{ und } (x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

haben also gleiche Vorzeichen. Nimmt man nun in diesem Falle die Axe des Paars mit der von $(x_0y_0z_0)$ gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der z ausgehenden Geraden auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene des Paars, jenachdem P_0 positiv oder negativ ist, so muss man nach einem bekannten Satze in den obigen Formeln offenbar die oberen Zeichen nehmen.

Wenn die Drehung des Paars negativ ist, ist nach §. 6. das Product

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}$$

negativ, und

$$P_0 \text{ und } (x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0$$

haben also entgegengesetzte Vorzeichen. Nimmt man nun in diesem Falle die Axe des Paars mit der von $(x_0y_0z_0)$ gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der z ausgehenden Geraden auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene des Paars, jenachdem P_0 negativ oder positiv ist, so muss man nach dem schon vorher angewandten Satze in den obigen Formeln offenbar wieder die oberen Zeichen nehmen.

Dies lässt sich auf folgende Art zusammenfassen:

Wenn man, jenachdem die Drehung des Paars und die Kraft P_0 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, die Axe des Paars mit der von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ aus gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der z gezogenen Geraden auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene des Paars nimmt, so hat man in den obigen Formeln immer die oberen Zeichen zu nehmen und muss also setzen:

$$\cos\varphi_0 = \frac{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\+[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\+[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}},$$

$$\cos\psi_0 = \frac{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\+[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\+[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}},$$

$$\cos\chi_0 = \frac{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\+[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\+[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}};$$

wo man den Nenner auch unter der Form:

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x_0-\xi_0)^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2\\-[(x_0-\xi_0)\cos\alpha_0+(y_0-\eta_0)\cos\beta_0+(z_0-\zeta_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}}$$

darstellen kann; auch lässt sich nach §. 8. schreiben:

$$\cos\varphi_0 = \frac{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0}{E_0},$$

$$\cos\psi_0 = \frac{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0}{E_0},$$

$$\cos\chi_0 = \frac{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0}{E_0};$$

also:

$$E_0\cos\varphi_0 = (y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0,$$
$$E_0\cos\psi_0 = (z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0,$$
$$E_0\cos\chi_0 = (x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0.$$

Hieraus erhellet auch, dass die Grössen

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0,$$
$$(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0,$$
$$(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0$$

nie zugleich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, da im Fall eines Kräftepaars E_0 nicht verschwindet, die Grössen

$\cos\varphi_0$, $\cos\psi_0$, $\cos\chi_0$ zugleich verschwinden würden, was wegen der Gleichung

$$\cos\varphi_0{}^2+\cos\psi_0{}^2+\cos\chi_0{}^2=1$$

nicht möglich ist.

§ 10.

Wir wollen jetzt die folgende allgemeine Aufgabe lösen:

Man soll die Elemente eines Kräftepaars, welche wir durch

$$P,\ \Pi;\quad x,\ y,\ z;\quad \xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

bezeichnen wollen, so bestimmen, dass, wenn A, B, C drei gegebene, nicht sämmtlich verschwindende Grössen bezeichnen, den Gleichungen:

$$P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=C,$$

$$P\{(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos\beta\}=A,$$

$$P\{(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos\gamma\}=B$$

genügt wird.

Zu dem Ende bestimme man die Grösse M und die natürlich der Gleichung

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

genügenden Winkel φ, ψ, χ so, dass

$$M\cos\varphi=A,\quad M\cos\psi=B,\quad M\cos\chi=C$$

ist, was mittelst der, unter der gemachten Voraussetzung stets endliche völlig bestimmte Werthe liefernden Formeln:

$$M=\sqrt{A^2+B^2+C^2};$$

$$\cos\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\psi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\chi=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

jederzeit möglich ist.

Die so bestimmte Grösse M zerlege man nun auf beliebige Weise in zwei positive Factoren $\mathfrak{P}$ und E, so dass also:

$$M=\mathfrak{P}E$$

ist.

Hierauf nehme man eine Gerade im Raume an, welche, in-
lem (abc) ein beliebiger Punkt im Raume ist und die laufenden
Coordinaten jetzt durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden, durch die
Gleichungen:

$$(\mathfrak{y}-b)\cos\varphi=(\mathfrak{x}-a)\cos\psi,$$
$$(\mathfrak{z}-c)\cos\psi=(\mathfrak{y}-b)\cos\chi,$$
$$(\mathfrak{x}-a)\cos\chi=(\mathfrak{z}-c)\cos\varphi;$$

lso nach dem Obigen durch die Gleichungen:

$$A(\mathfrak{y}-b)=B(\mathfrak{x}-a),$$
$$B(\mathfrak{z}-c)=C(\mathfrak{y}-b),$$
$$C(\mathfrak{x}-a)=A(\mathfrak{z}-c)$$

charakterisirt wird, und lege durch den Punkt (abc) eine auf die-
ser Geraden senkrecht stehende Ebene.

Nimmt man in dieser Ebene, um ihre Gleichung zu finden,
inen ganz beliebigen Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ an, und bezeichnet die 180°
icht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Rich-
ungen der durch die Punkte (abc) und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ der Lage nach be-
timmten Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen
nschliesst, durch θ, ω, $\overline{\omega}$; so ist:

$$\cos\varphi\cos\theta+\cos\psi\cos\omega+\cos\chi\cos\overline{\omega}=0,$$

so nach dem Obigen:

$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0.$$

un ist aber, wenn r die Entfernung der Punkte (abc) und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$
on einander bezeichnet:

$$\mathfrak{x}-a=\pm r\cos\theta,$$
$$\mathfrak{y}-b=\pm r\cos\omega,$$
$$\mathfrak{z}-c=\pm r\cos\overline{\omega};$$

lglich, weil nach dem Obigen:

$$A.r\cos\theta+B.r\cos\omega+C.r\cos\overline{\omega}=0$$

t:

$$A(\mathfrak{x}-a)+B(\mathfrak{y}-b)+C(\mathfrak{z}-c)=0,$$

elche Gleichung für **jeden** in der in Rede stehenden Ebene
egenden Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ gilt, und daher die Gleichung dieser Ebene ist.

Nimmt man nun in dieser Ebene zwei beliebige Punkte (xyz)
d $(\xi\eta\zeta)$ an, so ist:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$A(\xi-a)+B(\eta-b)+C(\zeta-c)=0;$$

also:

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0,$$

und die Gleichung der Ebene lässt sich offenbar auch unter e
der beiden folgenden Formen:

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0,$$
$$A(\mathfrak{x}-\xi)+B(\mathfrak{y}-\eta)+C(\mathfrak{z}-\zeta)=0$$

darstellen.

Die beiden Punkte (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ lassen sich in der in R
stehenden Ebene offenbar immer so annehmen, dass ihre Ent
nung von einander nicht kleiner als E ist; dann kann man d
die beiden Punkte (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ in der Ebene nach §. 2. im
parallele Gerade ziehen, deren Entfernung, eigentlich deren klein
Entfernung, von einander der Grösse E gleich ist; die Gleich
gen zweier solcher Parallelen seien:

$$(\mathfrak{x}-x)\cos\beta=(\mathfrak{y}-y)\cos\alpha,$$
$$(\mathfrak{y}-y)\cos\gamma=(\mathfrak{z}-z)\cos\beta,$$
$$(\mathfrak{z}-z)\cos\alpha=(\mathfrak{x}-x)\cos\gamma$$

und:

$$(\mathfrak{x}-\xi)\cos\beta=(\mathfrak{y}-\eta)\cos\alpha,$$
$$(\mathfrak{y}-\eta)\cos\gamma=(\mathfrak{z}-\zeta)\cos\beta,$$
$$(\mathfrak{z}-\zeta)\cos\alpha=(\mathfrak{x}-\xi)\cos\gamma.$$

Für jeden Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ der ersten Geraden ist also:

$$(\mathfrak{x}-x)\cos\alpha=(\mathfrak{x}-x)\cos\alpha,$$
$$(\mathfrak{x}-x)\cos\beta=(\mathfrak{y}-y)\cos\alpha,$$
$$(\mathfrak{x}-x)\cos\gamma=(\mathfrak{z}-z)\cos\alpha;$$

also, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit A, I
multiplicirt und dann zu einander addirt:

$$(\mathfrak{x}-x)(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)$$
$$=\{A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)\}\cos\alpha,$$

folglich, weil der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in der in Rede stehenden E
liegt und daher:

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

ist:

$$(\mathfrak{x}-x)(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)=0,$$

also, weil diese Gleichung unabhängig von besonderen Werthen von x gilt:

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$A(x-\xi) + B(y-\eta) + C(z-\zeta) = 0,$$
$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

ergiebt sich, dass, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$A = G\{(y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta\},$$
$$B = G\{(z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma\},$$
$$C = G\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, wo der Factor G nicht verschwindet, weil nach der Voraussetzung die Grössen A, B, C nicht zugleich verschwinden.

Nach §. 3. ist:

$$E^2 = \{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}^2$$
$$+ \{(y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta\}^2$$
$$+ \{(z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$E^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{G^2},$$

und daher:

$$E = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{G} = \pm\frac{M}{G},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem G positiv oder negativ ist. Folglich ist:

$$\pm GE = M,$$

und daher, weil nach dem Obigen:

$$\mathfrak{P}E = M$$

ist:

$$\mathfrak{P} = \pm G,$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem G positiv oder negativ ist. Weil also:

$$G = \pm\mathfrak{P}$$

ist, so ist nach dem Obigen:

ntwickelung

— cos β,

cos γ,

— cos α;

$= C,$

$= A,$

$= B;$

enmen hat, jenachdem

zu lösen:

gleich D setzen,

nachdem die Grössen

Man muss also die

absoluter Werth D

durch die

Richtung hin

fo
lie

ist:

$$P = + \mathfrak{P}$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die
:l α, β, γ bestimmten Richtung hin wirken lassen. Weil
sem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

ʼ ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paars positiv.

ʼenn C positiv und

$$(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha$$

v, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

v ist, so muss man

$$P = - \mathfrak{P}$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die
l $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ bestimmten Richtung hin
ı lassen. Weil in diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

· ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paars positiv.

ʼenn C negativ und

$$(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha$$

, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

v ist, so muss man

$$P = - \mathfrak{P}$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die
:l $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ bestimmten Richtung hin wir-
ıssen. Weil in diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

v ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paars negativ.

ʼenn C negativ und

$$(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha$$

v, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

positiv ist, so muss man

$$P = +\mathfrak{p}$$

setzen, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch Winkel α, β, γ bestimmten Richtung hin wirken lassen. We diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}$$

negativ ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paars negativ.

Im Allgemeinen ergiebt sich hieraus Folgendes:

Jenachdem das Product

$$C\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\},$$

welches nach dem Vorhergehenden immer einerlei Vorzeic mit P hat, positiv oder negativ ist, muss man die Kraft an Punkte (xyz) nach der durch die Winkel α, β, γ oder nach durch die Winkel $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$, $180^\circ-\gamma$ bestimmten Ri tung hin wirken lassen; die Drehung des Paars hat immer gl ches Vorzeichen mit der Grösse C.

Aus diesen Entwickelungen ergiebt sich ganz von selbst, da unsere Aufgabe sich zwar auf unendlich viele verschiedene Art lösen lässt, dass aber alle Paare, welche man durch diese erhält, das Gemeinsame mit einander haben:

1. dass alle ihre Ebenen und alle ihre Axen unter einan parallel sind;

2. dass alle ihre Momente einander gleich sind;

3. dass ihre Drehungen alle gleiche Vorzeichen haben o in gleichem Sinne vor sich zu gehen streben.

III.

Betrachtung zweier Kräftepaare.

§. 11.

Indem wir wie gewöhnlich die Elemente der beiden zu trachtenden Kräftepaare durch:

$$P_0,\ \Pi_0;\quad x_0,\ y_0,\ z_0;\quad \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0;\quad \alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;$$

$$P_1,\ \Pi_1;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$$

zeichnen, wollen wir jetzt zunächst die **nothwendigen** allgeeinen Bedingungen für das Gleichgewicht dieser beiden Paare fstellen, wozu natürlich nur die Aufstellung der Bedingungen r das Gleichgewicht der vier unter den besonderen Umständen r Kräftepaare wirkenden vier Kräfte P_0, Π_0; P_1, Π_1 erforderh ist. Diese Bedingungen sind aber bekanntlich *) die Gleiungen:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + \Pi_0 \cos\alpha_0 + \Pi_1 \cos\alpha_1 = 0,$$
$$P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + \Pi_0 \cos\beta_0 + \Pi_1 \cos\beta_1 = 0,$$
$$P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + \Pi_0 \cos\gamma_0 + \Pi_1 \cos\gamma_1 = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x_0 \cos\beta_0 - y_0 \cos\alpha_0) + P_1(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) \\ + \Pi_0(\xi_0 \cos\beta_0 - \eta_0 \cos\alpha_0) + \Pi_1(\xi_1 \cos\beta_1 - \eta_1 \cos\alpha_1) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(y_0 \cos\gamma_0 - z_0 \cos\beta_0) + P_1(y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1) \\ + \Pi_0(\eta_0 \cos\gamma_0 - \zeta_0 \cos\beta_0) + \Pi_1(\eta_1 \cos\gamma_1 - \zeta_1 \cos\beta_1) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(z_0 \cos\alpha_0 - x_0 \cos\gamma_0) + P_1(z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1) \\ + \Pi_0(\zeta_0 \cos\alpha_0 - \xi_0 \cos\gamma_0) + \Pi_1(\zeta_1 \cos\alpha_1 - \xi_1 \cos\gamma_1) \end{array}\right\} = 0.$$

Im Falle der Kräftepaare ist nun aber

$$\Pi_0 = -P_0, \quad \Pi_1 = -P_1;$$

her werden die drei ersten Gleichungen Identitäten, und die edingungen des Gleichgewichts der beiden Kräftepaare sind llständig in den drei folgenden Gleichungen enthalten:

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}+P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\}=0,$$
$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}+P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\}=0,$$
$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}+P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}=0.$$

§. 12.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die beiden Kräftepaare im leichgewichte seien; dann finden nach dem vorhergehenden Paraaphen die Gleichungen:

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}+P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\}=0,$$
$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}+P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\}=0,$$
$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}+P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}=0$$

*) M. s. Thl. XLVI. No. XIII. §. 6. S. 203.

oder

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}=-P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\text{co}$$

$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}=-P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\text{co}$$

$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}=-P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\text{c}$$

Statt.

Also ist:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0}{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1}\\ =&\frac{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0}{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1}\\ =&\frac{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0}{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1}\end{aligned}\right\}=-\frac{P_1}{P_0},$$

woraus sich nach §. 7. und den Lehren der analytischen Geo trie ergiebt, dass die Ebenen der beiden Kräftepaare einan parallel sind.

Wenn man die drei obigen Gleichungen quadrirt und zu ei ander addirt, so erhält man die Gleichung:

$$P_0^2\left\{\begin{aligned}&[(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0]^2\\ +&[(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0]^2\\ +&[(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0]^2\end{aligned}\right\}$$

$$=P_1^2\left\{\begin{aligned}&[(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1]^2\\ +&[(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1]^2\\ +&[(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1]^2\end{aligned}\right\},$$

also nach §. 8. in bekannter Bezeichnung die Gleichung:

$$P_0^2E_0^2=P_1^2E_1^2,$$

woraus sich ergiebt, dass die Momente der beiden Kräftepa einander gleich sind.

Weil endlich nach dem Obigen die Producte:

$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}$ und $P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\text{co}$

$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}$ und $P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\text{co}$

$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}$ und $P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\text{co}$

offenbar entgegengesetzte Vorzeichen haben, so haben nach die beiden Kräftepaare entgegengesetzte Drehungen.

Fassen wir das Vorstehende zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn zwei Kräftepaare mit einander im Gleichgewichte sind, so sind:

1. ihre Ebenen einander parallel;
2. ihre Momente einander gleich;
3. ihre Drehungen einander entgegengesetzt.

Wir wollen nun sehen, ob sich dies auch umkehren, ob sich nämlich behaupten lässt, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die beiden Kräftepaare jederzeit im Gleichgewichte sein müssen.

Weil wegen der ersten Bedingung die Ebenen der beiden Kräftepaare einander parallel sind, so ist nach §. 7. und den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0}{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1}$$
$$=\frac{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0}{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1}$$
$$=\frac{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0}{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1},$$

also, wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Brüche durch G_{01} bezeichnen:

$$(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0=G_{01}\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\},$$
$$(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0=G_{01}\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\},$$
$$(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0=G_{01}\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}.$$

Quadrirt man nun diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach §. 8. die Gleichung:

$$E_0^2=G_{01}^2E_1^2,$$

und weil nun nach der zweiten Bedingung wegen der Gleichheit der Momente der beiden Paare:

$$P_0^2E_0^2=P_1^2E_1^2$$

ist, so ist offenbar:

$$G_{01}^2=\frac{P_1^2}{P_0^2},\quad \text{also}\quad G_{01}=\pm\frac{P_1}{P_0};$$

folglich nach dem Obigen:

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}=\pm P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\},$$

$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}=\pm P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\},$$

$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}=\pm P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}.$$

Weil endlich nach der dritten Bedingung die beiden Kräftepaare entgegengesetzte Drehungen haben, so haben nach §. 6. die Producte

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\} \text{ und } P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\},$$

$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\} \text{ und } P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\},$$

$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\} \text{ und } P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und man muss also in den vorstehenden Gleichungen offenbar die unteren Zeichen nehmen, folglich:

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}=-P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\},$$

$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}=-P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\},$$

$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}=-P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}$$

setzen, woraus sich die Gleichungen:

$$P_0\{(x_0-\xi_0)\cos\beta_0-(y_0-\eta_0)\cos\alpha_0\}+P_1\{(x_1-\xi_1)\cos\beta_1-(y_1-\eta_1)\cos\alpha_1\}=0,$$

$$P_0\{(y_0-\eta_0)\cos\gamma_0-(z_0-\zeta_0)\cos\beta_0\}+P_1\{(y_1-\eta_1)\cos\gamma_1-(z_1-\zeta_1)\cos\beta_1\}=0,$$

$$P_0\{(z_0-\zeta_0)\cos\alpha_0-(x_0-\xi_0)\cos\gamma_0\}+P_1\{(z_1-\zeta_1)\cos\alpha_1-(x_1-\xi_1)\cos\gamma_1\}=0$$

ergeben, und daher nach dem vorhergehenden Paragraphen das Gleichgewicht der beiden Kräftepaare folgt.

Also haben wir den folgenden Satz:

Wenn für zwei Kräftepaare:

1. ihre Ebenen einander parallel sind;
2. ihre Momente einander gleich sind;
3. ihre Drehungen einander entgegengesetzt sind;

so sind dieselben mit einander im Gleichgewichte.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen ergiebt sich der folgende Satz:

Die **nothwendigen** Bedingungen für das Gleichgewicht zweier Kräftepaare sind:

1. **dass ihre Ebenen, also auch ihre Axen, einander parallel sind;**

2. **dass ihre Momente einander gleich sind;**

3. **dass ihre Drehungen einander entgegengesetzt sind.**

Hieraus ergiebt sich auch unmittelbar der folgende Hauptsatz:

Die Wirkung eines Kräftepaars bleibt ungeändert, wenn nur:

1. **die Lage seiner Ebene, also auch seiner Axe, im Raume sich nicht ändert, nämlich sich selbst parallel bleibt;**

2. **sein Moment keine Aenderung erleidet;**

3. **seine Drehung in gleichem Sinne vor sich geht.**

IV.

Betrachtung beliebig vieler Kräfte und Kräftepaare.

§. 13.

Wir denken uns jetzt ein System beliebig vieler einzelner Kräfte und Kräftepaare; die Elemente des Systems der einzelnen Kräfte bezeichnen wir durch:

$$P_0',\ P_1',\ P_2',\ P_3',\ P_4',\ldots;$$

$$x_0',\ y_0',\ z_0';\quad x_1',\ y_1',\ z_1';\quad x_2',\ y_2',\ z_2';\quad x_3',\ y_3',\ z_3';\ldots;$$

$$\alpha_0',\ \beta_0',\ \gamma_0';\quad \alpha_1',\ \beta_1',\ \gamma_1';\quad \alpha_2',\ \beta_2',\ \gamma_2';\quad \alpha_3',\ \beta_3',\ \gamma_3';\ldots;$$

die Elemente des Systems der Kräftepaare durch:

$$\begin{array}{llll}
P_0,\ \Pi_0; & x_0,\ y_0,\ z_0; & \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0; & \alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\\
P_1,\ \Pi_1; & x_1,\ y_1,\ z_1; & \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1; & \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\\
P_2,\ \Pi_2; & x_2,\ y_2,\ z_2; & \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2; & \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\\
P_3,\ \Pi_3; & x_3,\ y_3,\ z_3; & \xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3; & \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;
\end{array}$$

u. s. w.

Wenn nun das ganze System aller einzelnen Kräfte und Kräftepaare völlig frei ist, so sind, wie leicht erhellet, die Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts desselben *):

*) M. s. Thl. XLVI. No. XIII. §. 6. S. 203.

$$\Sigma P' \cos\alpha' + \Sigma P \cos\alpha + \Sigma \Pi \cos\alpha = 0,$$
$$\Sigma P' \cos\beta' + \Sigma P \cos\beta + \Sigma \Pi \cos\beta = 0,$$
$$\Sigma P' \cos\gamma' + \Sigma P \cos\gamma + \Sigma \Pi \cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + \Sigma \Pi(\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + \Sigma \Pi(\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + \Sigma \Pi(\zeta\cos\alpha - \xi\cos\gamma) = 0;$$

also, weil

$$P_0 + \Pi_0 = 0, \quad P_1 + \Pi_1 = 0, \quad P_2 + \Pi_2 = 0, \quad P_3 + \Pi_3 = 0, \ldots$$

ist:

$$\Sigma P' \cos\alpha' = 0, \quad \Sigma P' \cos\beta' = 0, \quad \Sigma P' \cos\gamma' = 0;$$
$$\Sigma P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\} = 0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \Sigma P\{(y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta\} = 0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \Sigma P\{(z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma\} = 0.$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt auch, dass eine Kraft mit Kräftepaaren nie im Gleichgewichte sein kann, weil dies nach vorstehenden Gleichungen immer die Bedingungsgleichungen

$$P' \cos\alpha' = 0, \quad P' \cos\beta' = 0, \quad P' \cos\gamma' = 0$$

als erfüllt voraussetzen würde, aus denen

$$P'^2(\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2) = P'^2 = 0,$$

also $P' = 0$ folgt. Eine Kraft und ein Kräftepaar können also hiernach auch nie durch ein Kräftepaar ersetzt werden.

Bezeichnet man die Bestimmungswinkel der Axen der Kräftepaare durch

$$\varphi_0, \psi_0, \chi_0; \quad \varphi_1, \psi_1, \chi_1; \quad \varphi_2, \psi_2, \chi_2; \quad \varphi_3, \psi_3, \chi_3; \ldots;$$

so werden die vorstehenden Bedingungsgleichungen, weil nach §. 9. allgemein:

$$E\cos\varphi = (y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta,$$
$$E\cos\psi = (z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma,$$
$$E\cos\chi = (x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha$$

ist:

$$\Sigma P'\cos\alpha'=0,\quad \Sigma P'\cos\beta'=0,\quad \Sigma P'\cos\gamma'=0;$$

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma PE\cos\chi=0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')+\Sigma PE\cos\varphi=0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')+\Sigma PE\cos\psi=0.$$

Verschwinden die einzelnen Kräfte sämmtlich, so sind die Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts:

$$\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=0,$$
$$\Sigma P\{(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos\beta\}=0,$$
$$\Sigma P\{(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos\gamma\}=0$$

oder:

$$\Sigma PE\cos\varphi=0,\quad \Sigma PE\cos\psi=0,\quad \Sigma PE\cos\chi=0.$$

Wenn das System um einen festen Punkt drehbar ist, so sind, wenn man diesen festen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, die Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe des Systems *):

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)+\Sigma\Pi(\xi\cos\beta-\eta\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')+\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+\Sigma P(\eta\cos\gamma-\zeta\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')+\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)+\Sigma P(\zeta\cos\alpha-\xi\cos\gamma)=0;$$

also wie vorher:

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')+\Sigma P\{(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos\beta\}=0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')+\Sigma P\{(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos\gamma\}=0;$$

oder:

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma PE\cos\chi=0,$$
$$\Sigma P'(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')+\Sigma PE\cos\varphi=0,$$
$$\Sigma P'(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')+\Sigma PE\cos\psi=0.$$

Verschwinden die einzelnen Kräfte sämmtlich, so sind die Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe:

$$\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=0,$$
$$\Sigma P\{(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos\beta\}=0,$$
$$\Sigma P\{(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos\gamma\}=0$$

*) Thl. XLVI. No. XIII. §. 8. S. 225.

oder:

$$\Sigma PE\cos\varphi = 0,\quad \Sigma PE\cos\psi = 0,\quad \Sigma PE\cos\chi = 0;$$

wobei es offenbar nicht mehr nöthig ist, den festen Punkt als Anfang der Coordinaten anzunehmen, weil bei parallelen Verschiebungen der Coordinatensysteme die Differenzen der Coordinaten dieselben bleiben.

Wenn das System um eine feste Axe drehbar ist, so ist, wenn man diese feste Axe als Axe der z annimmt, die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems *):

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)+\Sigma\Pi(\xi\cos\beta-\eta\cos\alpha)=0,$$

also wie vorher:

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=0$$

oder:

$$\Sigma P'(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')+\Sigma PE\cos\chi=0.$$

Verschwinden die einzelnen Kräfte sämmtlich, so ist die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe:

$$\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos\alpha\}=0$$

oder:

$$\Sigma PE\cos\chi=0.$$

§. 14.

Wir wollen nun den wichtigen Satz beweisen, dass sich jedes System von einzelnen Kräften und Kräftepaaren auf eine einzelne Kraft und ein Kräftepaar zurückführen lässt.

Das gegebene System der einzelnen Kräfte und Kräftepaare bezeichnen wir eben so wie im vorhergehenden Paragraphen; bezeichnen wir dann die Elemente der gesuchten Kraft und des gesuchten Kräftepaars beziehungsweise durch:

$$R';\quad X',\ Y',\ Z';\quad \theta',\ \omega',\ \varpi'$$

und

$$R,\ \mathrm{R};\quad X,\ Y,\ Z;\quad \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z};\quad \theta,\ \omega,\ \varpi;$$

so haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die folgenden Gleichungen:

*) Thl. XLVI. No. XIII. §. 9. S. 227.

$$\Sigma P' \cos\alpha' - R' \cos\theta' = 0;$$
$$\Sigma P' \cos\beta' - R' \cos\omega' = 0;$$
$$\Sigma P' \cos\gamma' - R' \cos\overline{\omega}' = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma P' (x' \cos\beta' - y' \cos\alpha') - R' (X' \cos\omega' - Y' \cos\theta') \\ + \Sigma P \{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\} - R\{(X-\mathrm{X})\cos\omega - (Y-\mathrm{Y})\cos\theta\}\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma P' (y' \cos\gamma' - z' \cos\beta') - R' (Y' \cos\overline{\omega}' - Z' \cos\omega') \\ + \Sigma P \{(y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta\} - R\{(Y-\mathrm{Y})\cos\overline{\omega} - (Z-\mathrm{Z})\cos\omega\}\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma P' (z' \cos\alpha' - x' \cos\gamma') - R' (Z' \cos\theta' - X' \cos\overline{\omega}') \\ + \Sigma P \{(z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma\} - R\{(Z-\mathrm{Z})\cos\theta - (X-\mathrm{X})\cos\overline{\omega}\}\end{array}\right\} = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$L' = \Sigma P' \cos\alpha', \quad M' = \Sigma P' \cos\beta', \quad N' = \Sigma P' \cos\gamma';$$
$$N_1' = \Sigma P' (x' \cos\beta' - y' \cos\alpha'),$$
$$L_1' = \Sigma P' (y' \cos\gamma' - z' \cos\beta'),$$
$$M_1' = \Sigma P' (z' \cos\alpha' - x' \cos\gamma');$$

$$N_1 = \Sigma P \{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\},$$
$$L_1 = \Sigma P \{(y-\eta)\cos\gamma - (z-\zeta)\cos\beta\},$$
$$M_1 = \Sigma P \{(z-\zeta)\cos\alpha - (x-\xi)\cos\gamma\}$$

setzen:

$$R' \cos\theta' = L', \quad R' \cos\omega' = M', \quad R' \cos\overline{\omega}' = N';$$
$$R'(X'\cos\omega' - Y'\cos\theta') + R\{(X-\mathrm{X})\cos\omega - (Y-\mathrm{Y})\cos\theta\} = N_1' + N_1;$$
$$R'(Y'\cos\overline{\omega}' - Z'\cos\omega') + R\{(Y-\mathrm{Y})\cos\overline{\omega} - (Z-\mathrm{Z})\cos\omega\} = L_1' + L_1;$$
$$R'(Z'\cos\theta' - X'\cos\overline{\omega}') + R\{(Z-\mathrm{Z})\cos\theta - (X-\mathrm{X})\cos\overline{\omega}\} = M_1' + M_1.$$

Aus den drei ersten Gleichungen erhält man zur Bestimmung von R' und θ', ω', $\overline{\omega}'$ die folgenden Formeln:

$$R' = \pm\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2};$$
$$\cos\theta' = \pm\frac{L'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}},$$
$$\cos\omega' = \pm\frac{M'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}},$$
$$\cos\overline{\omega}' = \pm\frac{N'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}};$$

wo es aber bekanntlich *) genügt, die oberen Zeichen zu nehmen, und daher:

$$R' = \sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2};$$
$$\cos\theta' = \frac{L'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}},$$
$$\cos\omega' = \frac{M'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}},$$
$$\cos\overline{\omega}' = \frac{N'}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2}}$$

zu setzen. Wenn die Grössen L', M', N' sämmtlich verschwinden, und daher auch R' verschwindet, bleiben die Winkel θ', ω', $\overline{\omega}'$ unbestimmt, wie es auch ganz in der Natur der Sache liegt; man kann dafür alle Winkel setzen, welche der Gleichung

$$\cos\theta'^2 + \cos\omega'^2 + \cos\overline{\omega}'^2 = 1$$

genügen.

In allen Fällen bleiben die Coordinaten X', Y', Z' oder der Punkt $(X'Y'Z')$ ganz unbestimmt, und es können für diese Coordinaten alle beliebigen Werthe gesetzt werden.

Hat man nun aber für X', Y', Z' gewisse beliebige Werthe gesetzt, so muss man für diese Werthe der in Rede stehenden Coordinaten, oder diesen Werthen der Coordinaten entsprechend, das Kräftepaar

$$R,\ \mathrm{R};\quad X,\ Y,\ Z;\quad \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z};\quad \theta,\ \omega,\ \overline{\omega}$$

so bestimmen, dass den Gleichungen:

$$R\{(X-\mathrm{X})\cos\omega-(Y-\mathrm{Y})\cos\theta\} = N_1'+N_1-R'(X'\cos\omega'-Y'\cos\theta'),$$
$$R\{(Y-\mathrm{Y})\cos\overline{\omega}-(Z-\mathrm{Z})\cos\omega\} = L_1'+L_1-R'(Y'\cos\overline{\omega}'-Z'\cos\omega'),$$
$$R\{(Z-\mathrm{Z})\cos\theta-(X-\mathrm{X})\cos\overline{\omega}\} = M_1'+M_1-R'(Z'\cos\theta'-X'\cos\overline{\omega}');$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$\mathfrak{L}_1 = L_1'+L_1,\quad \mathfrak{M}_1 = M_1'+M_1,\quad \mathfrak{N}_1 = N_1'+N_1$$

und:

$$A = \mathfrak{L}_1 - R'(Y'\cos\overline{\omega}' - Z'\cos\omega'),$$
$$B = \mathfrak{M}_1 - R'(Z'\cos\theta' - X'\cos\overline{\omega}'),$$
$$C = \mathfrak{N}_1 - R'(X'\cos\omega' - Y'\cos\theta')$$

*) M. s. Thl. XLVI. No. XIII. S. 207—S. 209.

esetzt wird, den Gleichungen:

$$R\{(X-\mathrm{X})\cos\omega-(Y-\mathrm{Y})\cos\theta\}=C,$$
$$R\{(Y-\mathrm{Y})\cos\varpi-(Z-\mathrm{Z})\cos\omega\}=A,$$
$$R\{(Z-\mathrm{Z})\cos\theta-(X-\mathrm{X})\cos\varpi\}=B$$

genügt wird.

Wie diese Bestimmung in allen Fällen ausgeführt werden kann, ist in §. 10. ausführlich gezeigt worden, und darüber also hier nichts weiter zu sagen. Bekanntlich ist diese Bestimmung auf unendlich viele verschiedene Arten möglich.

Bezeichnen wir das gemeinsame oder constante Moment aller Kräftepaare durch M, so ist nach §. 10.:

$$\mathrm{M}^2=A^2+B^2+C^2,$$

und folglich, weil nach dem Obigen offenbar:

$$A=\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z',$$
$$B=\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X',$$
$$C=\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y'$$

t:

$$\mathrm{M}^2=(\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z')^2+(\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X')^2+(\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y')^2$$

$$=\mathfrak{L}_1^2+\mathfrak{M}_1^2+\mathfrak{N}_1^2-2\mathfrak{L}_1(N'Y'-M'Z')-2\mathfrak{M}_1(L'Z'-N'X')-2\mathfrak{N}_1(M'X'-L'Y')+(N'Y'-M'Z')^2+(L'Z'-N'X')^2+(M'X'-L'Y')^2$$

$$=\mathfrak{L}_1^2+\mathfrak{M}_1^2+\mathfrak{N}_1^2-2\mathfrak{L}_1(N'Y'-M'Z')-2\mathfrak{M}_1(L'Z'-N'X')-2\mathfrak{N}_1(M'X'-L'Y')+(L'^2+M'^2+N'^2)(X'^2+Y'^2+Z')-(L'X'+M'Y'+N'Z')^2,$$

so:

$$^2=\mathfrak{L}_1^2+\mathfrak{M}_1^2+\mathfrak{N}_1^2+R'^2(X'^2+Y'^2+Z'^2)-2\mathfrak{L}_1(N'Y'-M'Z')-2\mathfrak{M}_1(L'Z'-N'X')-2\mathfrak{N}_1(M'X'-L'Y')-(L'X'+M'Y'+N'Z')^2.$$

Die Gleichungen aller einander parallelen Ebenen der Kräftepaare sind nach §. 10., wenn wir die laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen:

$$A(\mathfrak{x}-a)+B(\mathfrak{y}-b)+C(\mathfrak{z}-c)=0,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z')(\mathfrak{x}-a)\\+(\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X')(\mathfrak{y}-b)\\+(\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y')(\mathfrak{z}-c)\end{array}\right\}=0.$$

Die Gleichungen der sämmtlich unter einander parallelen Axen der Kräftepaare sind nach §. 10.:

$$\begin{aligned}A(\mathfrak{y}-b)&=B(\mathfrak{x}-a),\\B(\mathfrak{z}-c)&=C(\mathfrak{y}-b),\\C(\mathfrak{x}-a)&=A(\mathfrak{z}-c);\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z')(\mathfrak{y}-b)&=(\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X')(\mathfrak{x}-a),\\(\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X')(\mathfrak{z}-c)&=(\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y')(\mathfrak{y}-b),\\(\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y')(\mathfrak{x}-a)&=(\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z')(\mathfrak{z}-c).\end{aligned}$$

Jenachdem das Product

$$C\{(X-\mathrm{X})\cos\omega-(Y-\mathrm{Y})\cos\theta\}$$

positiv oder negativ ist, muss man die Kraft an dem Punkte (XYZ) nach der durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ oder nach der durch die Winkel $180^0-\theta$, $180^0-\omega$, $180^0-\overline{\omega}$ bestimmten Richtung hin wirken lassen; die Drehung der Paare hat immer gleiches Vorzeichen mit C.

§. 15.

Verschiedenen Werthen von X', Y', Z' entsprechen nach dem vorhergehenden Paragraphen Kräftepaare mit verschiedenen Momenten M; wir wollen nun diejenigen Werthe $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ von X', Y', Z' bestimmen, für welche das Moment M seinen kleinsten Werth $\mathfrak{M}$ erhält.

Der allgemeine Werth von M^2 ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^2=\;&(\mathfrak{L}_1-N'Y'+M'Z')^2\\&+(\mathfrak{M}_1-L'Z'+N'X')^2\\&+(\mathfrak{N}_1-M'X'+L'Y')^2,\end{aligned}$$

woraus zuvörderst erhellet, dass von einer Bestimmung des kleinsten Werths von M überhaupt nur dann die Rede sein kann, wenn die Grössen L', M', N' nicht zugleich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, M den constanten Werth

$$\mathrm{M} = \sqrt{\mathfrak{L}_1{}^2 + \mathfrak{M}_1{}^2 + \mathfrak{N}_1{}^2}$$

ben würde, wobei man auch §. 1. zu vergleichen hat.

Nach §. 1. 4) erhält man sogleich:

$$\mathfrak{X} = \frac{M'\mathfrak{N}_1 - N'\mathfrak{M}_1}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{N'\mathfrak{L}_1 - L'\mathfrak{N}_1}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{L'\mathfrak{M}_1 - M'\mathfrak{L}_1}{L'^2 + M'^2 + N'^2};$$

lso nach §. 14.:

$$R'^2\mathfrak{X} = M'\mathfrak{N}_1 - N'\mathfrak{M}_1,$$

$$R'^2\mathfrak{Y} = N'\mathfrak{L}_1 - L'\mathfrak{N}_1,$$

$$R'^2\mathfrak{Z} = L'\mathfrak{M}_1 - M'\mathfrak{L}_1;$$

raus sich die Relationen:

$$L'\mathfrak{X} + M'\mathfrak{Y} + N'\mathfrak{Z} = 0,$$

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{X} + \mathfrak{M}_1\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}_1\mathfrak{Z} = 0$$

geben.

Nach §. 1. 7) ist:

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)^2}{L'^2 + M'^2 + N'^2}.$$

Mittelst der obigen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ erhält man ferner icht:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z}\\ &= \mathfrak{L}_1 - \frac{N'(N'\mathfrak{L}_1 - L'\mathfrak{N}_1) - M'(L'\mathfrak{M}_1 - M'\mathfrak{L}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2}\\ &= \mathfrak{L}_1 - \frac{(L'^2 + M'^2 + N'^2)\mathfrak{L}_1 - L'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= \mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X}\\ &= \mathfrak{M}_1 - \frac{L'(L'\mathfrak{M}_1 - M'\mathfrak{L}_1) - N'(M'\mathfrak{N}_1 - N'\mathfrak{M}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2}\\ &= \mathfrak{M}_1 - \frac{(L'^2 + M'^2 + N'^2)\mathfrak{M}_1 - M'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} &= \mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y}\\ &= \mathfrak{N}_1 - \frac{M'(M'\mathfrak{N}_1 - N'\mathfrak{M}_1) - L'(N'\mathfrak{L}_1 - L'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2}\\ &= \mathfrak{N}_1 - \frac{(L'^2 + M'^2 + N'^2)\mathfrak{N}_1 - N'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2};\end{aligned}$$

also:

$$\mathfrak{A} = \frac{L'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$
$$\mathfrak{B} = \frac{M'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$
$$\mathfrak{C} = \frac{N'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2}.$$

Die allgemeine Gleichung der Ebenen der Paare ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x} - a) + \mathfrak{B}(\mathfrak{y} - b) + \mathfrak{C}(\mathfrak{z} - c) = 0,$$

also nach den vorstehenden Formeln, wenn nicht

$$L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1 = 0$$

ist:

$$L'(\mathfrak{x} - a) + M'(\mathfrak{y} - b) + N'(\mathfrak{z} - c) = 0;$$

folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$(\mathfrak{x} - a)\cos\theta' + (\mathfrak{y} - b)\cos\omega' + (\mathfrak{z} - c)\cos\overline{\omega}' = 0,$$

woraus sich nach den Lehren der analytischen Geometrie ergiebt, dass diese Ebene auf der Richtungslinie der Kraft R' senkrecht steht.

Wenn

$$L'\mathfrak{L}_1 + M\mathfrak{M}_1 + N\mathfrak{N}_1 = 0,$$

und folglich nach dem Obigen auch das kleinste Moment $\mathfrak{M} = 0$ ist, erhält die Gleichung der Ebene der Paare eine identische Form, was auch ganz in der Natur der Sache liegt, weil ja offenbar in diesem Falle von Paaren im eigentlichen Sinne gar nicht mehr die Rede sein kann.

Die Drehung der Paare hat mit $\mathfrak{C}$, nach dem Obigen also mit

$$N'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1),$$

gleiches Vorzeichen.

Die durch den Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ parallel mit der Richtungslinie der Kraft R', also senkrecht auf den vorher bestimmten parallelen Ebenen, gezogene Gerade heisst die **Centralaxe** des gegebenen Systems von Kräften und Kräftepaaren; ihre Gleichungen sind:

$$L'(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}) = M'(\mathfrak{x} - \mathfrak{X}),$$
$$M'(\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}) = N'(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}),$$
$$N'(\mathfrak{x} - \mathfrak{X}) = L'(\mathfrak{z} - \mathfrak{Z});$$

r:

$$L'\mathfrak{y} - M'\mathfrak{x} = L'\mathfrak{Y} - M'\mathfrak{X},$$
$$M'\mathfrak{z} - N'\mathfrak{y} = M'\mathfrak{Z} - N'\mathfrak{Y},$$
$$N'\mathfrak{x} - L'\mathfrak{z} = N'\mathfrak{X} - L'\mathfrak{Z};$$

r:

$$L'\mathfrak{y} - M'\mathfrak{x} + \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y},$$
$$M'\mathfrak{z} - N'\mathfrak{y} + \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z},$$
$$N'\mathfrak{x} - L'\mathfrak{z} + \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X};$$

o nach dem Obigen:

$$L'\mathfrak{y} - M'\mathfrak{x} + \mathfrak{N}_1 = \frac{N'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$
$$M'\mathfrak{z} - N'\mathfrak{y} + \mathfrak{L}_1 = \frac{L'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2},$$
$$N'\mathfrak{x} - L'\mathfrak{z} + \mathfrak{M}_1 = \frac{M'(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)}{L'^2 + M'^2 + N'^2}.$$

Das Quadrat des allgemeinen Moments **M** kann man nach Obigen auf folgende Art ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^2 = &\{\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z} - N'(Y' - \mathfrak{y}) + M'(Z' - \mathfrak{z})\}^2 \\ &+ \{\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X} - L'(Z' - \mathfrak{z}) + N'(X' - \mathfrak{x})\}^2 \\ &+ \{\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y} - M'(X' - \mathfrak{x}) + L'(Y' - \mathfrak{y})\}^2,\end{aligned}$$

aus sich:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^2 = &(\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z})^2 \\ &+ (\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X})^2 \\ &+ (\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y})^2 \\ &+ \{M'(X' - \mathfrak{x}) - L'(Y' - \mathfrak{y})\}^2 \\ &+ \{N'(Y' - \mathfrak{y}) - M'(Z' - \mathfrak{z})\}^2 \\ &+ \{L'(Z' - \mathfrak{z}) - N'(X' - \mathfrak{x})\}^2 \\ &- 2(\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z})\{N'(Y' - \mathfrak{y}) - M'(Z' - \mathfrak{z})\} \\ &- 2(\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X})\{L'(Z' - \mathfrak{z}) - N'(X' - \mathfrak{x})\} \\ &- 2(\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y})\{M'(X' - \mathfrak{x}) - L'(Y' - \mathfrak{y})\}\end{aligned}$$

ebt. Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z})\{N'(Y' - \mathfrak{y}) - M'(Z' - \mathfrak{z})\} \\ &+ (\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X})\{L'(Z' - \mathfrak{z}) - N'(X' - \mathfrak{x})\} \\ &+ (\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y})\{M'(X' - \mathfrak{x}) - L'(Y' - \mathfrak{y})\}\end{aligned}$$

$$\frac{L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1}{L'^2 + M'^2 + N'^2}\left\{\begin{aligned}&L'[N'(Y' - \mathfrak{y}) - M'(Z' - \mathfrak{z})] \\ &+ M'[L'(Z' - \mathfrak{z}) - N'(X' - \mathfrak{x})] \\ &+ N'[M'(X' - \mathfrak{x}) - L'(Y' - \mathfrak{y})]\end{aligned}\right\} = 0.$$

also:

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^2 = &\ (\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z})^2\\ &+ (\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X})^2\\ &+ (\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y})^2\\ &+ \{M'(X'-\mathfrak{X}) - L'(Y'-\mathfrak{Y})\}^2\\ &+ \{N'(Y'-\mathfrak{Y}) - M'(Z'-\mathfrak{Z})\}^2\\ &+ \{L'(Z'-\mathfrak{Z})^2 - N'(X'-\mathfrak{X})\}^2.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(X'Y'Z')$ von mit der Richtungslinie der Kraft R' parallelen Centralaxe d p, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\begin{aligned}p^2 = &\ (X'-\mathfrak{X})^2 + (Y'-\mathfrak{Y})^2 + (Z'-\mathfrak{Z})^2\\ &-\{(X'-\mathfrak{X})\cos\theta' + (Y'-\mathfrak{Y})\cos\omega' + (Z'-\mathfrak{Z})\cos\varpi'\}^2,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}p^2 = &\ \{(X'-\mathfrak{X})\cos\omega' - (Y'-\mathfrak{Y})\cos\theta'\}^2\\ &+\{(Y'-\mathfrak{Y})\cos\varpi' - (Z'-\mathfrak{Z})\cos\omega'\}^2\\ &+\{(Z'-\mathfrak{Z})\cos\theta' - (X'-\mathfrak{X})\cos\varpi'\}^2,\end{aligned}$$

und folglich offenbar:

$$\begin{aligned}p^2R'^2 = &\ \{M'(X'-\mathfrak{X}) - L'(Y'-\mathfrak{Y})\}^2\\ &+\{N'(Y'-\mathfrak{Y}) - M'(Z'-\mathfrak{Z})\}^2\\ &+\{L'(Z'-\mathfrak{Z}) - N'(X'-\mathfrak{X})\}^2.\end{aligned}$$

Ueberlegt man nun noch, dass offenbar:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^2 = &\ (\mathfrak{L}_1 - N'\mathfrak{Y} + M'\mathfrak{Z})^2\\ &+(\mathfrak{M}_1 - L'\mathfrak{Z} + N'\mathfrak{X})^2\\ &+(\mathfrak{N}_1 - M'\mathfrak{X} + L'\mathfrak{Y})^2\end{aligned}$$

st, so erhält man aus dem Obigen die merkwürdige Gleichu

$$\mathrm{M}^2 = \mathfrak{M}^2 + p^2R'^2 \quad \text{oder} \quad \mathrm{M}^2 - \mathfrak{M}^2 = p^2R'^2.$$

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Axen der im vorh gehenden Paragraphen bestimmten Kräftepaare, deren Gleichung

$$\begin{aligned}A(\mathfrak{y}-b) &= B(\mathfrak{x}-a),\\ B(\mathfrak{z}-c) &= C(\mathfrak{y}-b),\\ C(\mathfrak{x}-a) &= A(\mathfrak{z}-c)\end{aligned}$$

sind, mit der Centralaxe einschliessen, im Allgemeinen durch so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie, wie sogle erhellet:

$$\cos\Omega = \pm\frac{A\cos\theta' + B\cos\omega' + C\cos\bar{\omega}'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

so nach §. 14.:

$$\cos\Omega = \pm\frac{A\cos\theta' + B\cos\omega' + C\cos\bar{\omega}'}{\mathrm{M}},$$

folglich, wenn man im Zähler und Nenner dieses Bruchs mit multiplicirt:

$$\cos\Omega = \pm\frac{AL' + BM' + CN'}{R'\mathrm{M}}.$$

l aber nach §. 14.:

$$A = \mathfrak{L}_1 - N'Y' + M'Z',$$
$$B = \mathfrak{M}_1 - L'Z' + N'X',$$
$$C = \mathfrak{N}_1 - M'X' + L'Y'$$

so ist:

$$AL' + BM' + CN' = L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1,$$

folglich:

$$\cos\Omega = \pm\frac{L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1}{R'\mathrm{M}}.$$

ch dem Obigen ist nun:

$$(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)^2 = (L'^2 + M'^2 + N'^2)\mathfrak{M}^2 = R'^2\mathfrak{M}^2,$$

o:

$$L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1 = R'\mathfrak{M},$$

folglich, ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen einander:

$$\cos\Omega = \pm\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{M}}.$$

raus folgt:

$$\sin\Omega^2 = \frac{\mathrm{M}^2 - \mathfrak{M}^2}{\mathrm{M}^2} = \frac{p^2R'^2}{\mathrm{M}^2},$$

:

$$pR' = \mathrm{M}\sin\Omega.$$

Nimmt man, was verstattet ist, den Winkel Ω spitz, so ist:

$$\mathfrak{M} = \mathrm{M}\cos\Omega,\quad pR' = \mathrm{M}\sin\Omega.$$

Schliesslich wollen wir noch die Entfernung des Punktes 5) von dem Anfange der Coordinaten bestimmen. Nach dem igen ist:

$$(L'^2+M'^2+N'^2)^2(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)$$
$$=(L'\mathfrak{M}_1-M'\mathfrak{L}_1)^2+(M'\mathfrak{N}_1-N'\mathfrak{M}_1)^2+(N'\mathfrak{L}_1-L'\mathfrak{N}_1)^2$$
$$=(L'^2+M'^2+N'^2)(\mathfrak{L}_1{}^2+\mathfrak{M}_1{}^2+\mathfrak{N}_1{}^2)-(L'\mathfrak{L}_1+M'\mathfrak{M}_1+N'\mathfrak{N}_1)^2,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$(L'^2+M'^2+N'^2)^2(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)$$
$$=(L'^2+M'^2+N'^2)\{(\mathfrak{L}_1{}^2+\mathfrak{M}_1{}^2+\mathfrak{N}_1{}^2)-\mathfrak{M}^2\},$$

also die Entfernung des Punktes $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ von dem Anfange
Coordinaten:

$$\sqrt{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}=\sqrt{\frac{(\mathfrak{L}_1{}^2+\mathfrak{M}_1{}^2+\mathfrak{N}_1{}^2)-\mathfrak{M}^2}{L'^2+M'^2+N'^2}}.$$

§. 16.

Wenn Kräftepaare in beliebiger Anzahl durch ein Kräft-paar ersetzt werden sollen, so hat man, indem wir die in §. 1 gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, zur Bestimmung dies sogenannten Resultantenpaars

$$R,\ \mathrm{R};\quad X,\ Y,\ Z;\quad \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z};\quad \theta,\ \omega,\ \overline{\omega}$$

nach §. 14. die folgenden Gleichungen:

$$R\{(X-\mathrm{X})\cos\omega-(Y-\mathrm{Y})\cos\theta\}=\Sigma P\{(x-\xi)\cos\beta-(y-\eta)\cos$$
$$R\{(Y-\mathrm{Y})\cos\overline{\omega}-(Z-\mathrm{Z})\cos\omega\}=\Sigma P\{(y-\eta)\cos\gamma-(z-\zeta)\cos$$
$$R\{(Z-\mathrm{Z})\cos\theta-(X-\mathrm{X})\cos\overline{\omega}\}=\Sigma P\{(z-\zeta)\cos\alpha-(x-\xi)\cos$$

mittelst welcher das Resultantenpaar ganz nach der in §. 10. gebenen allgemeinen Anleitung bestimmt werden muss, worü also hier nichts weiter zu sagen ist.

Bezeichnen wir den Arm oder die Breite des Resultant-paars durch $\mathfrak{E}$, die Winkel seiner Axe durch Φ, Ψ, X; so w den die vorstehenden Gleichungen nach §. 9.:

$$R\mathfrak{E}\cos\Phi=\Sigma PE\cos\varphi,$$
$$R\mathfrak{E}\cos\Psi=\Sigma PE\cos\psi,$$
$$R\mathfrak{E}\cos X=\Sigma PE\cos\chi;$$

woraus sich, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann einander addirt, die Gleichung:

$$(R\mathfrak{E})^2=(\Sigma PE\cos\varphi)^2+(\Sigma PE\cos\psi)^2+(\Sigma PE\cos\chi)^2$$

ergiebt. Mittelst dieser Gleichungen bestimmt man R, $\mathfrak{E}$ u Φ, Ψ, X auf bekannte Weise.

XXXI.

Oberfläche und Inhalt der Körper, welche durch Rotation eines regulären Polygons um einen beliebigen Durchmesser entstehen.

von

Herrn Dr. *L. Sohncke*

in Königsberg i. Pr.

---

§. 1.

Einleitung und Hülfssätze. Bisher sind, soviel mir bekannt, nur solche Körper behandelt, welche durch Rotation eines regulären Polygons um einen grössten oder kleinsten Halbmesser entstehen. Die dort angewandte Methode, die bekanntlich auch auf die Kugel Anwendung findet, lässt sich nun leicht auf den allgemeineren Fall der Rotation um einen beliebigen Durchmesser übertragen.

Hülfssatz 1. An einen Kreis mit dem Radius r sei eine Tangente AB so gezogen, dass sie im Berührungspunkte C halbirt wird. Rotirt diese Figur um einen beliebigen Durchmesser des Kreises, dessen Verlängerung aber die Tangente AB nicht durchschneiden soll, so ist die Mantelfläche des von der Tangente beschriebenen abgestumpften Kegels (der in speciellen Fällen ein Cylinder oder ganzer Kegel sein kann), gleich dem Product aus der Kreisperipherie und der Höhe h des Kegelstumpfs.

Beweis: (Taf. VIII. Fig. 1.). Die Mantelfläche des Kegelstumpfs ist bekanntlich

$$M = 2\pi . AB . \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2},$$

wo $\varrho_1 = AD$ und $\varrho_2 = BE$ die Radien der unteren und oberen Grundfläche des Kegelstumpfs sind. Weil nun:

$$CF : CO = BG : AB,$$

worin $CF = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ und $BG = ED = h$, so folgt:

$$AB . \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = r . h,$$

also die Mantelfläche $M = 2r\pi h$. q. e. d.

(Dieser Satz ist bekannt.)

Hülfssatz 2. Ist Alles wie vorher, schneidet aber die verlängerte Rotationsaxe die Tangente AB, so lässt sich die Mantelfläche des durch die Tangente beschriebenen Doppelkegels durch einen zweigliedrigen Ausdruck darstellen, dessen erstes Glied mit dem vorigen übereinstimmt.

Beweis: (Taf. VIII. Fig. 2.). Der Schnittpunkt der Rotationsaxe mit der Tangente heisse J, die Höhen der beiden entstehenden Kegel $DJ = h_1$ und $EJ = h_2$, ihre Summe $DE = h_1 + h_2 = h$. Die Theile der Tangente seien $AJ = s_1$, $BJ = s_2$; die Radien der Kegelgrundflächen $AD = \varrho_1$, $BE = \varrho_2$. Dann ist die Mantelfläche des Doppelkegels:

$$\begin{aligned} M &= \pi . (\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2) \\ &= \pi . (\varrho_1 s_1 - \varrho_2 s_1 + \varrho_2 s_1 + \varrho_2 s_2). \end{aligned}$$

Aber $\varrho_1 : s_1 = \varrho_2 : s_2$, folglich:

$$M = \pi . (\varrho_1 s_1 - \varrho_1 s_2 + \varrho_2 s_1 + \varrho_2 s_2),$$

$$M = 2\pi . \left\{ \frac{\varrho_1 (s_1 - s_2)}{2} + \frac{\varrho_2 (s_1 + s_2)}{2} \right\}.$$

Weil $r : CJ = \varrho_1 : h_1 = \varrho_2 : h_2$ und $CJ = \frac{s_1 + s_2}{2} - s_2$, so hat man:

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad rh_1 = \varrho_1 . \frac{(s_1 - s_2)}{2}.$$

Ferner:

$$rh_2 = \varrho_2 . \frac{(s_1 + s_2)}{2} - \varrho_2 s_2,$$

also:

2) . . . . $rh_2 + \varrho_2 s_2 = \varrho_2 . \frac{(s_1+s_2)}{2}$.

Mit Benutzung der Gleichungen 1) und 2) verwandelt sich der Werth unserer Oberfläche in folgenden:

$$M = 2\pi . (rh_1 + rh_2 + \varrho_2 s_2),$$

oder:

$$M = 2r\pi h + 2\pi\varrho_2 s_2, \text{ q. e. d.}$$

Zusatz. Lässt man aus dem eben gefundenen Werth der Mantelfläche des Doppelkegels den Werth der oberen, von BJ beschriebenen, Kegelfläche, welcher $\pi\varrho_2 s_2$ ist, fort, so bleibt als Werth der anderen Kegelfläche, (welche von AJ beschrieben wird,) übrig: $Ms_1 = 2r\pi h + \pi\varrho_2 s_2$.

§. 2.

Oberfläche der Rotationskörper. Lässt man ein um den Kreis beschriebenes reguläres Polygon um einen beliebigen Durchmesser rotiren, so wird im Allgemeinen von jedem der beiden Theile, in welche das Polygon durch die Rotationsaxe getheilt wird, ein anderer Mantel beschrieben, ohne dass die beiden Mäntel zusammenfallen; jedoch gehen sie an den Enden der Rotationsaxe, an denen sich übrigens im Allgemeinen kegelförmige Vertiefungen bilden, in einander über; auch können sie sich ausserdem schneiden. Die von jedem von beiden Theilen beschriebene Oberfläche lässt sich nun vermittelst der beiden Hülfssätze leicht angeben.

Von allen Ecken des Polygons seien Lothe auf die Rotationsaxe gefällt; das zwischen den Fusspunkten der beiden äussersten Lothe enthaltene Stück der Axe mag „Länge der Rotationsaxe“ heissen; die Ecken, von denen die äussersten Lothe ausgehen, sollen „äusserste Ecken“ heissen. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist das Polygon von ungerader Seitenzahl, so liegen nämlich beide äusserste Ecken im Allgemeinen auf derselben Seite der Axe; ist das Polygon von gerader Seitenzahl, so liegen sie auf verschiedenen Seiten. Im ersten Fall sind die beiden Theile des Perimeters ungleich gestaltet, im zweiten sind sie gleich.

A) Polygone von ungerader Seitenzahl. (Taf. VIII. Fig. 3. zeigt als Beispiel das reguläre Siebeneck.)

Die Fläche, welche durch Rotation des Perimetertheils $JBC..J'$,

... entsteht, ist zusam-
... jedem Ende aus einem
... beschriebenen Kreises r, das
... Abschnitt der geschnittenen
... Rotation der ganzen Seite
... ist die vom Abschnitt
... dem Zusatz zu Hülfssatz 2)

... Axe vom Abschnitt DJ'

... äussersten Abschnitt
... Höhe des durch Rotation von
... bedeutet. — Jeder der von den
... abgestumpften Kegel hat

... Kegelstumpfs bedeutet.

... erhält man die ganze
... beschriebene Oberfläche:

... bedeutet.

... des anderen Perimeter-
... abgestumpften Kegeln und
... Vertiefung. Die abge-
... fläche von der Grösse

... die Länge der Rota-
... Kegelmäntel an den Enden

... Seite der Axe ge-
... schieden gestaltete,
... Oberfläche von der-
als ... durch Rotation des

ganzen Polygons von ungerader Seitenzahl entstandene zweimäntelige Oberfläche ist demnach:

I') . . . . . . $2F_u = 4r\pi A + 2\pi\varrho a + 2\pi\varrho' a'$.

B) Polygone von gerader Seitenzahl. (Taf. VIII. Fig. 4. zeigt als Beispiel das reguläre Achteck.)

Die beiden Theile, in welche die Rotationsaxe den Perimeter zerlegt, sind gleich; jeder enthält eine „äusserste Ecke." Die durch Rotation beider Hälften entstehenden Flächen sind natürlich gleich, wenn sie auch nicht auf einander fallen; jede dieser Flächen ist zusammengesetzt aus abgestumpften Kegeln, und am einen Ende aus einem Kegel, am anderen aus einer kegelförmigen Vertiefung. Der Kegel, der von dem Stück JB der geschnittenen Seite AB beschrieben wird, hat die Mantelfläche:

$$2r\pi h + \pi\varrho a,$$

wo die Buchstaben die vorige Bedeutung haben. Der vom Stück EJ' beschriebene vertiefte Kegel hat die Mantelfläche:

$$\pi\varrho' a'.$$

Die von den zwischenliegenden Seiten beschriebenen abgestumpften Kegel haben die Mäntel

$$2r\pi h_1.$$

Also erkennt man, dass die von der Hälfte $JBC...EJ'$ beschriebene Fläche durch die schon vorher gefundene Formel I) dargestellt ist. Aber sie vereinfacht sich noch etwas, weil hier $\varrho = \varrho'$, $a = a'$ ist, und lautet:

II) . . . . $F_g = 2r\pi A + 2\pi\varrho a$.

Die durch Rotation des ganzen Polygons von gerader Seitenzahl entstandene zweimäntelige Oberfläche hat also den Werth:

II') . . . . $2F_g = 4r\pi A + 4\pi\varrho a$.

Somit ist allgemein der **Satz** bewiesen:

„Rotirt ein reguläres Polygon von gerader oder ungerader Seitenzahl um irgend einen Durchmesser, so hat die von einem der beiden Perimetertheile beschriebene Fläche den Werth:

$$2r\pi A + \pi\varrho a + \pi\varrho' a',$$

wo r den Radius des eingeschriebenen Kreises, A die

31*

Länge der Rotationsaxe, soweit sie zwischen den von den äussersten Ecken gefällten Lothen liegt, ϱ und ϱ' diese äussersten Lothe, a und a' die äussersten Abschnitte der geschnittenen Seiten bedeuten.

Anwendungen auf besondere Fälle.

1) Die Grösse der Fläche, welche durch Rotation eines Polygons von ungerader Seitenzahl um eine durch eine Ecke und eine Seitenmitte gehende Axe entsteht, wird erhalten, wenn man in Gleichung I) $\varrho = 0$, $a = 0$, $\varrho' = a' = \frac{1}{2}s$ setzt, (unter s eine Polygonseite verstanden). Man findet:

III) . . . . $2r\pi A + \pi(\frac{1}{2}s)^2$.

Das zweite Glied stellt, wie man unmittelbar übersieht, die ebene Kreisfläche vor, welche durch Rotation der von der Axe halbirten Polygonseite erzeugt wird.

2) Die Grösse der Fläche, welche durch Rotation eines Polygons von gerader Seitenzahl um einen grössten Durchmesser entsteht, wird erhalten, wenn man in Gleichung II) $\varrho = 0$ und $a = 0$ setzt. Man findet:

IV) . . . . $2r\pi A$.

3) Die Grösse der Fläche, die durch Rotation eines regulären Polygons von gerader Seitenzahl um einen kleinsten Durchmesser entsteht, wird erhalten, wenn man in Gleichung II) $\varrho = a = \frac{1}{2}s$ setzt. Man findet:

V) . . . . $2r\pi A + 2\pi(\frac{1}{2}s)^2$.

Zusätze: Aus der Vergleichung der vorstehenden drei Specialfälle folgt der

Zusatz 1. „Rotirt ein reguläres Polygon von gerader oder ungerader Seitenzahl um einen grössten oder kleinsten Durchmesser, so ist der gesammte krumme Theil der beschriebenen Rotationsfläche gleich $2r\pi A$, wo r den Radius des einbeschriebenen Kreises, A die Länge der Rotationsaxe, soweit sie in das Polygon hineinfällt, bedeutet.“

Bei der Rotation eines regulären Polygons von gerader Seitenzahl um einen kleinsten Durchmesser ist der krumme Theil der beschriebenen Oberfläche gleich $4r^2\pi$, wie aus der Formel V) folgt. Dieser Werth ist von der Seitenzahl und der Grösse der Seiten unabhängig; also ergiebt sich der

Zusatz 2. „Alle regulären Polygone von gerader Seitenzahl, die um denselben Kreis beschrieben sind, geben bei der Rotation um einen kleinsten Durchmesser Flächen, deren krumme Theile sämmtlich unter sich und mit der eingeschriebenen Kugel gleiche Grösse haben."

Das Quadrat ergiebt z. B. einen Cylinder, das reguläre Sechseck zwei Kegelstumpfe von derselben krummen Oberfläche wie die durch Rotation des eingeschriebenen Kreises entstehende Kugel.

Zusatz 3. „Legt man durch irgend zwei nicht in der Rotationsaxe liegende Ecken eines regulären Polygons von beliebiger Seitenzahl, — mögen diese Ecken benachbart sein oder nicht, — Ebenen senkrecht zu dem beliebigen als Rotationsaxe dienenden Durchmesser, so ist die krumme Oberfläche des durch Rotation des Polygons entstehenden Körpers, soweit sie zwischen diese Ebenen fällt, gleich der durch dieselben Ebenen herausgeschnittenen Kugelzone."

Denn beide Flächenstücke haben den Werth $2r\pi H$, wo H den Abstand beider Ebenen darstellt.

§. 3.

Inhalt der Rotationskörper. Wir lassen nur den einen der beiden Theile rotiren, in welche das Polygon durch den beliebigen Durchmesser getheilt wird. Verbinden wir alle Ecken mit dem Mittelpunkte, so wird dadurch das Polygon in Dreiecke getheilt; und nun ist der Rotationskörper zusammengesetzt aus den von diesen einzelnen Dreiecken beschriebenen Körpern; letztere aber lassen sich als Summen oder Differenzen von zwei oder mehr Kegeln ansehen. Die von den Ecken $B, C, D, \ldots, E$ (Taf. VIII. Fig. 5.) auf die Axe gefällten Lothe seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho$. Der vom $\Delta\, OBJ$ beschriebene Doppelkegel hat den Inhalt:

$$\tfrac{1}{3}\varrho_1{}^2\pi \,.\, OJ$$

oder

$$\tfrac{1}{3}\pi \,.\, \varrho_1 \,.\, r \,.\, BJ,$$

weil $\varrho_1 . OJ = r . BJ$ ist. Aber $\varrho_1 \pi BJ$ bedeutet die von BJ beschriebene Rotationsfläche, welche durch $F(BJ)$ bezeichnet werden soll, so dass der Inhalt des vom $\Delta\, OBJ$ beschriebenen Körpers den Werth hat:

$$\text{a)} \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{3}rF(BJ).$$

Der vom folgenden $\Delta\, OBC$ beschriebene Körper lässt sich als Differenz der von den Dreiecken OCP und OBP beschriebenen Körper ansehen; somit hat er den Inhalt:

$$\tfrac{1}{3}\pi . OP . (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)$$

oder:

$$\tfrac{1}{3} r\pi . (\varrho_1 + \varrho_2) BC,$$

weil:

$$\varrho_2 - \varrho_1 : BC = r : OP.$$

Aber $\pi . (\varrho_1 + \varrho_2) . BC$ ist gleich $F(BC)$, so dass der Inhalt des von OBC beschriebenen Körpers den Werth hat:

b) . . . . $\tfrac{1}{3} r F . (BC)$.

Einen entsprechenden Werth leitet man für den vom $\Delta\, OCD$ beschriebenen Körper ab, welcher als Differenz der von den Dreiecken KCQ, KCO und ODQ beschriebenen Körper anzusehen ist. So fährt man fort. Das $\Delta\, OEJ'$ endlich liefert einen Körper vom Inhalte:

$$\tfrac{1}{3}\varrho^2 . OJ' . \pi.$$

Weil aber $r : OJ' = \varrho : EJ'$, und $\pi\varrho . EJ' = F(EJ')$ ist, so ist auch dieser Inhalt gleich:

n) . . . . $\tfrac{1}{3} r . F(EJ')$.

Durch Addition der Werthe a), b), ... n) erhält man den Inhalt des ganzen durch die Rotation von $JBC \dots EJ'$ entstandenen Körpers gleich:

VI) . . . . $\tfrac{1}{3} r . F(JBC \dots EJ')$.

Auch die besonderen Fälle, dass eine Seite des Polygons senkrecht oder parallel zu der Rotationsaxe ist, liefern keine abweichenden Resultate. Also haben wir den

Satz: „Theilt man ein reguläres Polygon durch irgend einen Durchmesser in zwei Theile und lässt den einen von beiden um den Durchmesser rotiren, so ist der Inhalt des Rotationskörpers gleich der mit dem dritten Theil des Radius multiplicirten Rotationsfläche."

Rotirt ein Polygon von gerader Seitenzahl um einen kleinsten Durchmesser, so ist der Inhalt des Rotationskörpers, mit Benutzung der Formel V), gleich:

$$\tfrac{1}{3} r . (4 r^2 \pi + 2\pi (\tfrac{1}{2} s)^2)$$

oder:

$$\tfrac{4}{3}r^3\pi + 2.\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}s)^2\pi.r.$$

Dies liefert den

Satz: „Rotirt ein Polygon von gerader Seitenzahl um einen kleinsten Durchmesser, so ist der Ueberschuss dieses Rotationskörpers über die vom eingeschriebenen Kreise beschriebene Kugel gleich einem geraden Doppelkegel, dessen Basis die Polygonseite zum Durchmesser hat, und dessen Gesammthöhe gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises ist.“

XXXII.

Erster Nachtrag zu der Abhandlung: Betrachtungen über das ebene Dreieck in Thl. XLV. Nr. XXVII.

Von

dem Herausgeber.

Aus den in meiner oben genannten Abhandlung erhaltenen, drei durch die Spitzen eines Dreiecks ABC und ein und denselben ganz beliebigen Punkt M gezogene Gerade betreffenden Resultaten lassen sich noch verschiedene bemerkenswerthe Folgerungen ziehen, welche in jener Abhandlung theils absichtlich, theils unabsichtlich vorläufig übergangen worden sind. Nach und nach will ich aber, wenn sich mir dazu in dem Archiv zufällig Raum darbietet, einige Nachträge zu der genannten Abhandlung liefern, wobei ich mich natürlich ganz derselben Bezeichnungen wie dort bedienen werde. Bemerken will ich nur, dass g_a, g_b, g_c die drei von dem Punkte M auf die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC gefällten Perpendikel bezeichnen, welche als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem sie von a, b, c oder BC, CA, AB aus nach den Seiten von A, B, C oder nach den entgegengesetzten Seiten hin liegen.

Nach Thl. XLV. Nr. XXVII. 33) ist:

$$\overline{AA'}^2 = 4R^2 \sin B^2 \sin C^2 \frac{g_b^2 + 2g_bg_c \cos A + g_c^2}{(g_b \sin B + g_c \sin C)^2},$$

$$\overline{BB'}^2 = 4R^2 \sin C^2 \sin A^2 \frac{g_c^2 + 2g_cg_a \cos B + g_a^2}{(g_c \sin C + g_a \sin A)^2},$$

$$\overline{CC'}^2 = 4R^2 \sin A^2 \sin B^2 \frac{g_a^2 + 2g_ag_b \cos C + g_b^2}{(g_a \sin A + g_b \sin B)^2};$$

und nach Thl. XLV. Nr. XXVII. 30) ist:

$$\overline{A'M}^2 = \frac{g_b^2 + 2g_bg_c \cos A + g_c^2}{(g_b \sin B + g_c \sin C)^2} g_a^2,$$

$$\overline{B'M}^2 = \frac{g_c^2 + 2g_cg_a \cos B + g_a^2}{(g_c \sin C + g_a \sin A)^2} g_b^2,$$

$$\overline{C'M}^2 = \frac{g_a^2 + 2g_ag_b \cos C + g_b^2}{(g_a \sin A + g_b \sin B)^2} g_c^2;$$

also:

$$\left(\frac{A'M}{AA'}\right)^2 = \frac{g_a^2}{4R^2 \sin B^2 \sin C^2},$$

$$\left(\frac{B'M}{BB'}\right)^2 = \frac{g_b^2}{4R^2 \sin C^2 \sin A^2},$$

$$\left(\frac{C'M}{CC'}\right)^2 = \frac{g_c^2}{4R^2 \sin A^2 \sin B^2}.$$

Betrachtet man nun die Verhältnisse:

$$\frac{A'M}{AA'}, \quad \frac{B'M}{BB'}, \quad \frac{C'M}{CC'}$$

als positiv oder negativ, jenachdem beziehungsweise die Grösse

$$g_a, \quad g_b, \quad g_c$$

positiv oder negativ sind, und bezeichnet diese Verhältnisse i
Beziehung hierauf durch:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right], \quad \left[\frac{B'M}{BB'}\right], \quad \left[\frac{C'M}{CC'}\right];$$

so ist nach dem Obigen:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right] = \frac{g_a}{2R \sin B \sin C},$$

$$\left[\frac{B'M}{BB'}\right] = \frac{g_b}{2R \sin C \sin A},$$

$$\left[\frac{C'M}{CC'}\right] = \frac{g_c}{2R \sin A \sin B};$$

also:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right]+\left[\frac{B'M}{BB'}\right]+\left[\frac{C'M}{CC'}\right]=\frac{g_a\sin A+g_b\sin B+g_c\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C},$$

und folglich, weil nach Thl. XLV. Nr. XXVII. 22)

$$g_a\sin A+g_b\sin B+g_c\sin C=2R\sin A\sin B\sin C$$

ist:

$$1)\ \ldots\ldots\left[\frac{A'M}{AA'}\right]+\left[\frac{B'M}{BB'}\right]+\left[\frac{C'M}{CC'}\right]=1,$$

welche Formel ganz allgemein ist.

Ist der Punkt M der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so ist bekanntlich

$$\frac{A'M}{AA'}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{B'M}{BB'}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{C'M}{CC'}=\tfrac{1}{3}$$

und g_a, g_b, g_c sind offenbar sämmtlich positiv; also ist:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right]=\tfrac{1}{3},\quad \left[\frac{B'M}{BB'}\right]=\tfrac{1}{3},\quad \left[\frac{C'M}{CC'}\right]=\tfrac{1}{3};$$

folglich:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right]+\left[\frac{B'M}{BB'}\right]+\left[\frac{C'M}{CC'}\right]=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}=1,$$

wie es nach 1) sein muss.

Ist M der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen des bei C stumpfwinkligen Dreiecks ABC, so sind offenbar

$$g_a,\quad g_b,\quad g_c$$

respective

negativ, negativ, positiv;

und es ist also zu setzen:

$$\left[\frac{A'M}{AA'}\right]=-\frac{A'M}{AA'},$$

$$\left[\frac{B'M}{BB'}\right]=-\frac{B'M}{BB'},$$

$$\left[\frac{C'M}{CC'}\right]=+\frac{C'M}{CC'};$$

folglich:

$$-\frac{A'M}{AA'}-\frac{B'M}{BB'}+\frac{C'M}{CC'}=1,$$

oder:

$$\frac{A'M}{AA'}+\frac{B'M}{BB'}-\frac{C'M}{CC'}=-1.$$

Nach Thl. XLV. Nr. XXVII. 31) ist:

$$\overline{AM}^2=\frac{g_b{}^2+2g_bg_c\cos A+g_c{}^2}{\sin A^2},$$

$$\overline{BM}^2=\frac{g_c{}^2+2g_cg_a\cos B+g_a{}^2}{\sin B^2},$$

$$\overline{CM}^2=\frac{g_a{}^2+2g_ag_b\cos C+g_b{}^2}{\sin C^2};$$

also nach dem Obigen:

$$\left(\frac{AM}{AA'}\right)^2=\frac{(g_b\sin B+g_c\sin C)^2}{4R^2\sin A^2\sin B^2\sin C^2},$$

$$\left(\frac{BM}{BB'}\right)^2=\frac{(g_c\sin C+g_a\sin A)^2}{4R^2\sin A^2\sin B^2\sin C^2},$$

$$\left(\frac{CM}{CC'}\right)^2=\frac{(g_a\sin A+g_b\sin B)^2}{4R^2\sin A^2\sin B^2\sin C^2}.$$

Betrachtet man nun die Verhältnisse:

$$\frac{AM}{AA'},\quad \frac{BM}{BB'},\quad \frac{CM}{CC'}$$

als positiv oder negativ, jenachdem die Grössen:

$$g_b\sin B+g_c\sin C=2R\sin A\sin B\sin C-g_a\sin A,$$

$$g_c\sin C+g_a\sin A=2R\sin A\sin B\sin C-g_b\sin B,$$

$$g_a\sin A+g_b\sin B=2R\sin A\sin B\sin C-g_c\sin C$$

respective positiv oder negativ sind, und bezeichnet dieselb mit Rücksicht hierauf durch:

$$\left\{\frac{AM}{AA'}\right\},\quad \left\{\frac{BM}{BB'}\right\},\quad \left\{\frac{CM}{CC'}\right\};$$

so ist nach dem Obigen:

$$\left\{\frac{AM}{AA'}\right\}=\frac{g_b\sin B+g_c\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C},$$

$$\left\{\frac{BM}{BB'}\right\}=\frac{g_c\sin C+g_a\sin A}{2R\sin A\sin B\sin C},$$

$$\left\{\frac{CM}{CC'}\right\}=\frac{g_a\sin A+g_b\sin B}{2R\sin A\sin B\sin C};$$

also:

$$\left\{\frac{AM}{AA'}\right\}+\left\{\frac{BM}{BB'}\right\}+\left\{\frac{CM}{CC'}\right\}=\frac{2(g_a\sin A+g_b\sin B+g_c\sin C)}{2R\sin A\sin B\sin C},$$

folglich, weil wie oben

$$g_a\sin A+g_b\sin B+g_c\sin C=2R\sin A\sin B\sin C$$

ist:

$$2)\ \ldots\ldots\quad \left\{\frac{AM}{AA'}\right\}+\left\{\frac{BM}{BB'}\right\}+\left\{\frac{CM}{CC'}\right\}=2.$$

Nach dem Obigen ist offenbar immer:

$$3)\ \ldots\ldots\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\frac{A'M}{AA'}\right]+\left\{\frac{AM}{AA'}\right\}=1,\\ \left[\frac{B'M}{BB'}\right]+\left\{\frac{BM}{BB'}\right\}=1,\\ \left[\frac{C'M}{CC'}\right]+\left\{\frac{CM}{CC'}\right\}=1;\end{array}\right.$$

oder:

$$4)\ \ldots\ldots\quad \left\{\begin{array}{l}\left\{\frac{AM}{AA'}\right\}=1-\left[\frac{A'M}{AA'}\right],\\ \left\{\frac{BM}{BB'}\right\}=1-\left[\frac{B'M}{BB'}\right],\\ \left\{\frac{CM}{CC'}\right\}=1-\left[\frac{C'M}{CC'}\right].\end{array}\right.$$

Mittelst dieser Formeln wird sich immer leicht über die Zeichen von

$$\left\{\frac{AM}{AA'}\right\},\quad \left\{\frac{BM}{BB'}\right\},\quad \left\{\frac{CM}{CC'}\right\}$$

urtheilen lassen, da die Beurtheilung der Zeichen von

$$\left[\frac{AM}{AA'}\right],\quad \left[\frac{BM}{BB'}\right],\quad \left[\frac{CM}{CC'}\right]$$

nach dem Obigen in allen Fällen sehr leicht ist.

Betrachten wir

$$AA',\ BB',\ CC'$$

stets als positiv, dagegen

$$A'M,\ B'M,\ C'M$$

als positiv oder negativ, jenachdem die Grössen

$$g_a, \quad g_b, \quad g_c$$

positiv oder negativ sind, und

$$AM, \quad BM, \quad CM$$

als positiv oder negativ, jenachdem die Grössen

$$g_b \sin B + g_c \sin C, \quad g_c \sin C + g_a \sin A, \quad g_a \sin A + g_b \sin B$$

d. h. die Ergänzungen von

$$g_a \sin A, \quad g_b \sin B, \quad g_c \sin C$$

zu $2R \sin A \sin B \sin C$, positiv oder negativ sind; so ist na[ch]
in ganz ähnlicher Bezeichnung wie vorher:

$$5) \ldots \ldots \begin{cases} [A'M] + \{AM\} = AA', \\ [B'M] + \{BM\} = BB', \\ [C'M] + \{CM\} = CC'. \end{cases}$$

Hiernach ist:

$$1 + \frac{\{AM\}}{[A'M]} = \frac{AA'}{[A'M]},$$

$$1 + \frac{\{BM\}}{[B'M]} = \frac{BB'}{[B'M]},$$

$$1 + \frac{\{CM\}}{[C'M]} = \frac{CC'}{[C'M]};$$

also:

$$\frac{1}{1 + \frac{\{AM\}}{[A'M]}} = \frac{[A'M]}{AA'} = \left[\frac{A'M}{AA'}\right],$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\{BM\}}{[B'M]}} = \frac{[B'M]}{BB'} = \left[\frac{B'M}{BB'}\right],$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\{CM\}}{[C'M]}} = \frac{[C'M]}{CC'} = \left[\frac{C'M}{CC'}\right];$$

folglich, wenn man addirt, nach 1):

$$6) \ldots \frac{1}{1 + \frac{\{AM\}}{[A'M]}} + \frac{1}{1 + \frac{\{BM\}}{[B'M]}} + \frac{1}{1 + \frac{\{CM\}}{[C'M]}} = 1.$$

Betrachtet man die Verhältnisse

$$\frac{AM}{A'M},\quad \frac{BM}{B'M},\quad \frac{CM}{C'M}$$

ls positiv oder negativ, jenachdem beziehungsweise die Grössen:

$$g_a \text{ und } g_b\sin B+g_c\sin C=2R\sin A\sin B\sin C-g_a\sin A,$$

$$g_b \text{ und } g_c\sin C+g_a\sin A=2R\sin A\sin B\sin C-g_b\sin B,$$

$$g_c \text{ und } g_a\sin A+g_b\sin B=2R\sin A\sin B\sin C-g_c\sin C$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, und bezeichnet mit Rücksicht hierauf die obigen Verhältnisse durch:

$$\left\{\left[\frac{AM}{A'M}\right]\right\},\quad \left\{\left[\frac{BM}{B'M}\right]\right\},\quad \left\{\left[\frac{CM}{C'M}\right]\right\};$$

kann man setzen:

$$7)\ldots\frac{1}{1+\left\{\left[\frac{AM}{A'M}\right]\right\}}+\frac{1}{1+\left\{\left[\frac{BM}{B'M}\right]\right\}}+\frac{1}{1+\left\{\left[\frac{CM}{C'M}\right]\right\}}=1.$$

Weitere Bemerkungen über diesen Gegenstand behalte ich ir vor.

XXXIII.

Zweiter Nachtrag zu der Abhandlung: Betrachtungen über das ebene Dreieck in Thl. XLV. Nr. XXVII.

Von

dem Herausgeber.

Vor Kurzem machte mir Herr M. Curtze, Lehrer am Gymsium in Thorn, die briefliche Mittheilung, dass Herr Professor assbender daselbst ihm den folgenden Satz vom Dreieck mittheilt habe:

Die Summe der Cotangenten der drei Winkel, unt denen die von den Spitzen eines Dreiecks nach de Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transve salen in diesen Mittelpunkten gegen die entspreche den Seiten geneigt sind, wenn man diese Winkel v den Transversalen aus nach denselben Seiten hin od in gleichem Sinne nimmt, ist gleich Null.

Da dieser Satz mir neu war — aber wer kann alle sol Sätze, wenn sie bereits existiren sollten, kennen!! — so stel ich, gegründet auf die in meiner in der Ueberschrift genannt Abhandlung entwickelten Formeln und Gleichungen, eine einge hendere Untersuchung über denselben an, welche ich im Folge den mittheile, indem ich aber bemerke, dass diese Untersuchun überhaupt drei durch die Spitzen des Dreiecks und einen ga beliebigen Punkt gezogene Transversalen betrifft. Den ganze Inhalt der oben genannten Abhandlung, so wie auch den der Ab handlung Thl. XXXVI. Nr. XVIII., setze ich als bekannt voraus und bediene mich aller in der Abhandlung Thl. XLV. Nr. XXVI gebrauchten Bezeichnungen ohne Weiteres auch hier, jede b sondere Erläuterung darüber unterlassend.

In den drei in Thl. XLV. Nr. XXVII. zu Grunde gelegt Coordinatensystemen, sind die Gleichungen der drei Transv salen

$$AA',\quad BB',\quad CC'$$

welche wir als durch die Punkte A und A', B und B', C und bestimmt betrachten, respective die folgenden:

$$1)\ldots\left\{\begin{aligned} y&=\frac{2R\sin B\sin C}{2R\cos B\sin C-(BA')}\{x-(BA')\},\\ y&=\frac{2R\sin C\sin A}{2R\cos C\sin A-(CB')}\{x-(CB')\},\\ y&=\frac{2R\sin A\sin B}{2R\cos A\sin B-(AC')}\{(x-(AC')\};\end{aligned}\right.$$

wobei wir wegen der Coordinaten von A, B, C in den drei Grunde gelegten Coordinatensystemen auf Thl. XXXVI. Nr. XV S. 326. verweisen.

Bezeichnen wir nun die drei von den Richtungen

$$BC \text{ und } A'A,\quad CA \text{ und } B'B,\quad AB \text{ und } C'C$$

an den Punkten A', B', C' eingeschlossenen, 180° nicht üb

steigenden Winkel respective durch A′, B′, C′; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$2) \ldots \quad \begin{cases} \cot A' = \dfrac{2R\cos B\sin C-(BA')}{2R\sin B\sin C}, \\ \cot B' = \dfrac{2R\cos C\sin A-(CB')}{2R\sin C\sin A}, \\ \cot C' = \dfrac{2R\cos A\sin B-(AC')}{2R\sin A\sin B}; \end{cases}$$

oder auch, wenn man diese Brüche auf einerlei Benennung bringt:

$$3) \ldots \begin{cases} \cot A' = \dfrac{2R\sin A\cos B\sin C-(BA').\sin A}{2R\sin A\sin B\sin C}, \\ \cot B' = \dfrac{2R\sin A\sin B\cos C-(CB').\sin B}{2R\sin A\sin B\sin C}, \\ \cot C' = \dfrac{2R\cos A\sin B\sin C-(AC').\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Zähler der Summe

$$\cot A' + \cot B' + \cot C'$$

durch Z', so ist hiernach:

$$\begin{aligned} Z' = \; & 2R(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C) \\ & -\{(BA').\sin A+(CB').\sin B+(AC').\sin C\}, \end{aligned}$$

also nach bekannten Relationen, über welche Thl. XXXVI. Nr. XVIII. S. 351. ff. zu vergleichen ist:

$$\begin{aligned} 4) \ldots Z' = \; & R(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2) \\ & -\{(BA').\sin A+(CB').\sin B+(AC').\sin C\} \\ = \; & 2R(1+\cos A\cos B\cos C) \\ & -\{BA').\sin A+(CB').\sin B+(AC').\sin C\}. \end{aligned}$$

Nach Thl XLV. Nr. XXVII. S. 434. 23) ist:

$$\begin{aligned} & (BA').\sin A+(CB').\sin B+(AC').\sin C \\ = \; & \{a-(CA')\}.\sin A+\{b-(AB')\}.\sin B+\{c-(BC')\}.\sin C \\ = \; & a\sin A+b\sin B+c\sin C \\ & -\{(CA').\sin A+(AB').\sin B+(BC').\sin C\} \\ = \; & 2R(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2) \\ & -\{(CA').\sin A+(AB').\sin B+(BC').\sin C\} \\ = \; & 4R(1+\cos A\cos B\cos C) \\ & -\{(CA').\sin A+(AB').\sin B+(BC').\sin C\}, \end{aligned}$$

folglich nach 4):

$$5) \;.\;.\;.\; Z' = -R(\sin A^2+\sin B^2+\sin C^2) + \{(CA').\sin A+(AB').\sin B+(BC').\sin C\}$$
$$= -2R(1+\cos A\cos B\cos C) + \{(CA').\sin A+(AB').\sin B+(BC').\sin C\}.$$

Nach 4) und 5) ist also:

$$6) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2Z' = \{(CA')-(BA')\}\sin A + \{(AB')-(CB')\}\sin B + \{(BC')-(AC')\}\sin C.$$

Die Bedingungsgleichung, dass

$$\cot A'+\cot B'+\cot C' = 0$$

ist, ist $Z'=0$, also nach 6):

$$7)$$
$$\{(CA')-(BA')\}\sin A+\{(AB')-(CB')\}\sin B+\{(BC')-(AC')\}\sin C = 0.$$

Wir wollen nun diese Bedingungsgleichung zuvörderst auf einige besondere Fälle anwenden.

Für die drei von den Spitzen des Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen, wo also der in der Abhandlung Thl. XLV. Nr. XXVII. im Allgemeinen durch M bezeichnete Punkt, dessen Coordinaten in den drei angenommenen Coordinatensystemen f_c, g_c; f_a, g_a; f_b, g_b sind, der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser drei Transversalen ist, ist offenbar:

$$(CA') = (BA') = \tfrac{1}{2}a,$$
$$(AB') = (CB') = \tfrac{1}{2}b,$$
$$(BC') = (AC') = \tfrac{1}{2}c;$$

also:

$$(CA')-(BA') = 0,\; (AB')-(CB') = 0,\; (BC')-(AC') = 0$$

und die Bedingungsgleichung 7) ist folglich im Allgemeinen erfüllt, in diesem Falle also wirklich im Allgemeinen

$$\cot A'+\cot B'+\cot C' = 0,$$

der von Herrn Professor **Fassbender** mitgetheilte Satz daher völlig richtig.

Wenn der Punkt M der Mittelpunkt des um das Dreieck

C beschriebenen Kreises ist, so ist nach Thl. XXXVI. Nr. III. S. 329. 2):

$$g_a = R\cos A,\quad g_b = R\cos B,\quad g_c = R\cos C;$$

lich nach Thl. XLV. Nr. XXVII. S. 434. 24), 25):

$$(AC') = -\frac{2R\sin B\cos B}{\cos C - 2\sin A\sin B},$$

$$(BC') = -\frac{2R\sin A\cos A}{\cos C - 2\sin A\sin B};$$

, wenn man

$$\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A\cos B + \sin A\sin B$$

zt, offenbar:

$$(AC') = \frac{R\sin 2B}{\cos(A-B)},\quad (BC') = \frac{R\sin 2A}{\cos(A-B)};$$

raus:

$$\begin{aligned}(BC') - (AC') &= \frac{R(\sin 2A - \sin 2B)}{\cos(A-B)} \\ &= 2R\,\text{tang}(A-B)\cos(A+B) \\ &= -2R\,\text{tang}(A-B)\cos C\end{aligned}$$

gt; daher ist:

$$\begin{aligned}(CA') - (BA') &= -2R\,\text{tang}(B-C)\cos A, \\ (AB') - (CB') &= -2R\,\text{tang}(C-A)\cos B, \\ (BC') - (AC') &= -2R\,\text{tang}(A-B)\cos C;\end{aligned}$$

glich die Bedingungsgleichung 7) in diesem Falle offenbar:

$$8)$$

$$\text{tang}(B-C)\sin 2A + \text{tang}(C-A)\sin 2B + \text{tang}(A-B)\sin 2C = 0.$$

Für ein rechtwinkliges Dreieck sei $A = 90^0$, so ist $\sin 2A =$ $180^0 = 0$, und die vorstehende Bedingungsgleichung wird also diesem Falle:

$$\text{tang}(C - 90^0)\sin 2B + \text{tang}(90^0 - B)\sin 2C = 0,$$

$$\cot B\sin 2C = \cot C\sin 2B,$$

$$\cos B\sin C^2\cos C = \cos C\sin B^2\cos B;$$

o $\sin B^2 = \sin C^2$, $\sin B = \sin C$, $B = C = 45^0$, in welchem Falle s rechtwinklige Dreieck *ABC* gleichschenklig ist; für das nicht ichschenklige rechtwinklige Dreieck *ABC* gilt die obige Bedingungsgleichung nicht, und ist daher überhaupt nicht allgemein ltig.

Ist M der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei hen des Dreiecks, so ist $A' = 90^0$, $B' = 90^0$, $C' = 90^0$; natürlich:

$$\cot A' + \cot B' + \cot C' = 0,$$

in welchem Falle also diese Gleichung offenbar gültig ist. obige Gleichung 7) ist es also auch.

Wir wollen die Bedingungsgleichung 7) noch auf andere ausdrücken.

Nach Thl. XLV. Nr. XXVII. S. 434. 24), 25) ist:

$$(AC') = -\frac{2Rg_b \sin B}{g_c - 2R \sin A \sin B},$$

$$(BA') = -\frac{2Rg_c \sin C}{g_a - 2R \sin B \sin C},$$

$$(CB') = -\frac{2Rg_a \sin A}{g_b - 2R \sin C \sin A}$$

und:

$$(BC') = -\frac{2Rg_a \sin A}{g_c - 2R \sin A \sin B},$$

$$(CA') = -\frac{2Rg_b \sin B}{g_a - 2R \sin B \sin C},$$

$$(AB') = -\frac{2Rg_c \sin C}{g_b - 2R \sin C \sin A};$$

folglich die Bedingungsgleichung 7):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(g_b \sin B - g_c \sin C) \sin A}{g_a - 2R \sin B \sin C} \\ + \dfrac{(g_c \sin C - g_a \sin A) \sin B}{g_b - 2R \sin C \sin A} \\ + \dfrac{(g_a \sin A - g_b \sin B) \sin C}{g_c - 2R \sin A \sin B} \end{array}\right\} = 0.$$

Nach Thl. XLV. Nr. XXVII. S. 433. 22) ist aber:

$$g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C = 2R \sin A \sin B \sin C,$$

also:

$$g_a - 2R \sin B \sin C = -\frac{g_b \sin B + g_c \sin C}{\sin A},$$

$$g_b - 2R \sin C \sin A = -\frac{g_c \sin C + g_a \sin A}{\sin B},$$

$$g_c - 2R \sin A \sin B = -\frac{g_a \sin A + g_b \sin B}{\sin C};$$

lglich die obige Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{g_b \sin B - g_c \sin C}{g_b \sin B + g_c \sin C} \sin A^2 \\ + \frac{g_c \sin C - g_a \sin A}{g_c \sin C + g_a \sin A} \sin B^2 \\ + \frac{g_a \sin A - g_b \sin B}{g_a \sin A + g_b \sin B} \sin C^2 \end{array}\right\} = 0,$$

elche Gleichung offenbar durch die folgende Gleichung vertreten ird:

9)

$$\begin{array}{l}(g_b \sin B - g_c \sin C)(g_c \sin C + g_a \sin A)(g_a \sin A + g_b \sin B) \sin A^2 \\ +(g_c \sin C - g_a \sin A)(g_a \sin A + g_b \sin B)(g_b \sin B + g_c \sin C) \sin B^2 \\ +(g_a \sin A - g_b \sin B)(g_b \sin B + g_c \sin C)(g_c \sin C + g_a \sin A) \sin C^2 \\ = 0.\end{array}$$

un ist aber, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{array}{l}(g_c \sin C + g_a \sin A)(g_a \sin A + g_b \sin B) \\ = g_a(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin A + g_b g_c \sin B \sin C, \\ (g_a \sin A + g_b \sin B)(g_b \sin B + g_c \sin C) \\ = g_b(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin B + g_c g_a \sin C \sin A, \\ (g_b \sin B + g_c \sin C)(g_c \sin C + g_a \sin A) \\ = g_c(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin C + g_a g_b \sin A \sin B;\end{array}$$

d folglich die obige Bedingungsgleichung:

10)

$$\begin{array}{l}(g_b \sin B - g_c \sin C)\{g_a(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin A \\ \qquad + g_b g_c \sin B \sin C\} \sin A^2 \\ (g_c \sin C - g_a \sin A)\{g_b(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin B \\ \qquad + g_c g_a \sin C \sin A\} \sin B^2 \\ (g_a \sin A - g_b \sin B)\{g_c(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C) \sin C \\ \qquad + g_a g_b \sin A \sin B\} \sin C^2 \\ = 0\end{array}$$

er:

11)

$$(g_a \sin A + g_b \sin B + g_c \sin C)\left\{\begin{array}{l} g_a(g_b \sin B - g_c \sin C)\sin A^3 \\ + g_b(g_c \sin C - g_a \sin A)\sin B^3 \\ + g_c(g_a \sin A - g_b \sin B)\sin C^3 \end{array}\right.$$

$$+ \sin A \sin B \sin C \left\{\begin{array}{l} g_b g_c(g_b \sin B - g_c \sin C)\sin A \\ + g_c g_a(g_c \sin C - g_a \sin A)\sin B \\ + g_a g_b(g_a \sin A - g_b \sin B)\sin C \end{array}\right.$$

$$= 0,$$

oder:

12)

$$2R\left\{\begin{array}{l} g_a(g_b \sin B - g_c \sin C)\sin A^3 \\ + g_b(g_c \sin C - g_a \sin A)\sin B^3 \\ + g_c(g_a \sin A - g_b \sin B)\sin C^3 \end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} g_b g_c(g_b \sin B - g_c \sin C)\sin A \\ + g_c g_a(g_c \sin C - g_a \sin A)\sin B \\ + g_a g_b(g_a \sin A - g_b \sin B)\sin C \end{array}\right\}$$

$$= 0.$$

Wenn M der Mittelpunkt und r der Halbmesser des in Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist, so ist $g_a = g_b = g_c$ und die obige Bedingungsgleichung wird also in diesem Falle

$$(\sin B - \sin C)\sin A^3 + (\sin C - \sin A)\sin B^3 + (\sin A - \sin B)\sin C^3 =$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \sin A \sin B(\sin A^2 - \sin B^2) \\ + \sin B \sin C(\sin B^2 - \sin C^2) \\ + \sin C \sin A(\sin C^2 - \sin A^2) \end{array}\right\} = 0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \sin A \sin B(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) \\ + \sin B \sin C(\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C) \\ + \sin C \sin A(\sin C + \sin A)(\sin C - \sin A) \end{array}\right\} = 0,$$

also, wie man leicht durch die bekannte Zerlegung der Summen und Differenzen der Sinus findet:

$$\left.\begin{array}{l} \sin A \sin B \sin(A + B)\sin(A - B) \\ + \sin B \sin C \sin(B + C)\sin(B - C) \\ + \sin C \sin A \sin(C + A)\sin(C - A) \end{array}\right\} = 0,$$

oder:

$$\sin A \sin B \sin C \{ \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) \} = 0,$$

also:

$$13) \ldots \quad \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$14) \ldots \quad \sin\tfrac{1}{2}(A-B) \sin\tfrac{1}{2}(B-C) \sin\tfrac{1}{2}(C-A) = 0,$$

aus welcher ein Jeder leicht selbst weitere Folgerungen ziehen wird. Dass bei'm gleichschenkligen Dreieck in diesem Falle, wie sich aus der vorstehenden Bedingungsgleichung ergiebt, immer $\cot A' + \cot B' + \cot C' = 0$ ist, erhellet auch sogleich aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung.

Ich möchte die verehrten Herren, deren gütige Mittheilungen zu diesen Betrachtungen Veranlassung gegeben haben, bitten, ihre eigenen Untersuchungen über diesen Gegenstand, die wahrscheinlich einen noch etwas mehr elementaren Charakter als die vorhergehenden haben werden, recht bald im Archiv zu veröffentlichen, wofür ihnen der Dank der Leser gewiss nicht entgehen wird.

XXXIV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Schreiben des Lehrers Herrn M. Curtze am Gymnasium in Thorn an den Herausgeber.

1. Halbirt man in einem Dreieck einen Winkel oder den zugehörigen Aussenwinkel, so ist das Quadrat der Halbirungslinie gleich dem Rechteck aus den beiden Seiten, die den Winkel bilden, weniger dem Rechteck aus den Abschnitten, welche die Halbirungslinie auf der dritten Seite bildet, diese Differenz positiv oder negativ genommen, jenachdem der Winkel selbst oder der Aussenwinkel halbirt ist. In Taf. III. Fig. 5. (a) und (b) hat man also

$$\pm \overline{AD}^2 = \overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{DC}.$$

2. Unter denselben Bedingungen hat man für beide Figuren gleichgeltend:

$$\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2.$$

Von Herrn Professor Dr. Ligowski in Berlin.

Man soll rationale Dreiecke finden, deren Seiten in arithmetischer Progression stehen.

Man erhält:

$$a = \alpha^2 + 9\beta^2, \quad b = 3(\alpha^2 + \beta^2), \quad c = 2(\alpha^2 + 3\beta^2).$$

Soll der Unterschied der Seiten gleich 1 sein, dann muss

$$\alpha^2 = 3\beta^2 \pm 1$$

oder

$$\alpha^2 = 3\beta^2 \pm 2$$

sein. Man erhält:

	a	b	c
1)	3	4	5
2)	13	14	15
3)	51	52	53
4)	193	194	195
5)	723	724	725
6)	2701	2702	2703
7)	10083	10084	10085

u. s. w.

Man soll rationale Dreiecke finden, in welchen ein Winkel ɔppelt so gross ist, als ein anderer:

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad b = 2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2), \quad c = (3\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - 3\beta^2).$$

Es ergeben sich:

	a	b	c
1)	25	30	11
2)	25	40	39
3)	289	510	611
4)	841	1218	923
5)	4225	4290	131

u. s. w.

Die Grösse

$$\{(a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2\}^3$$

$$8\left\{\begin{array}{l} (a-b)^3(b-c)^3(c-d)^3(d-a)^3 \\ +(a-b)^3(b-d)^3(d-c)^3(c-a)^3 \\ +(c-b)^3(b-d)^3(d-a)^3(a-c)^3 \end{array}\right\}$$

$$24(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2$$

: identisch gleich Null.

(J. J. Walker.)

XXXV.

Miscellen.

Bemerkung über die Bestimmung des Schwerpunkts gewisser Körper.

Von Herrn Professor Dr. Ligowski in Berlin.

Ist die Durchschnittsfläche eines Körpers als Function der Höhe gegeben durch

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$

dann ist bekanntlich das Volumen V desselben:

$$V = \tfrac{1}{6}x[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}x) + f(x)]$$

und der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche $f(0)$ ist:

$$z = \frac{x[2f(\frac{1}{2}x) + f(x)]}{f(0) + 4f(\frac{1}{2}x) + f(x)}.$$

Für den Abstand des Schwerpunkts von der Mittelfläche erhält man die sehr einfache Formel:

$$u = \frac{x^2[f(0) - f(x)]}{12V}.$$

Wenn $f(x)$ die Ordinate einer Curve ist, dann giebt die Formel auch den Abstand des Schwerpunkts der gleichmässig belasteten Fläche.

Für die Halbkugel ist:

$$x = r, \quad f(0) = r^2\pi, \quad 12V = 8r^3\pi,$$
$$f(r) = 0;$$

also:

$$u = \tfrac{1}{8}r.$$

Für das Trapez mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h ist:

$$x = h, \quad f(0) = a, \quad f(x) = b, \quad 12V = 6(a+b)h, \quad u = \frac{h(a-b)}{6(a+b)}.$$

Berlin im März 1868.

Berichtigungen.

S. 355. Z. 4. v. u. statt „$\angle HMO$“ s. m. „$\angle HMC$“.
S. 357. Z. 1. v. o. statt „F“ s. m. „E“.
In Taf. VII. Fig. 5. ist noch die Linie AN zu ziehen.
Auf S. 358. ist die Note am Ende zu streichen.

Literarischer Bericht
CLXXXIX.

Arithmetik.

Nouvelles Tables d'Intégrales définies, par D. Bierens de Haan, Professeur de Mathématiques à l'université de Leide, Membre de l'Académie Royale des sciences d'Amsterdam, etc. etc. Leide, P. Engels, Libraire Éditeur. 1867. 4°.

Die erste Ausgabe dieses wichtigen Werkes ist im Literar. Ber. Nr. CXXVI. S. 1. angezeigt worden, und im Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 3. hatten wir die Freude, unseren Lesern von dem baldigen Erscheinen einer neuen Ausgabe vorläufig Kunde zu geben. Jetzt liegt diese neue Ausgabe in einem trefflich ausgestatteten, 733 Seiten umfassenden grossen Quartbande vor uns.

Zuerst bemerken wir, dass die erste Ausgabe als Band IV. der Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Amsterdam erschien, dass also durch die Unterstützung dieser hohen gelehrten Körperschaft das Erscheinen dieses wichtigen Werkes möglich gemacht wurde, wofür derselben der grösste und wärmste Dank aller Mathematiker gebührt, und wodurch sich dieselbe ein unvergängliches Denkmal in den Annalen der Wissenschaft gesetzt hat. Die uns vorliegende neue Ausgabe ist jetzt als selbstständiges Werk in der oben genannten Buchhandlung erschienen, was nicht möglich gewesen sein würde, wenn nicht

Seine Majestät der König Wilhelm III. der Niederlande dem Herrn Verfasser eine namhafte Unterstützung zu der, sehr grosse Kosten erfordernden Drucklegung gewährt hätte, wofür die Wissenschaft Sr. Majestät nicht dankbar genug sein kann, welche solche Theilnahme hochherziger Fürsten an ihren Fortschritten für ewige Zeiten auf den Tafeln ihrer Geschichte zu verzeichnen hat.

Was nun das Werk selbst betrifft, so tritt diese neue Ausgabe desselben, wenn auch der Grundtypus der älteren Ausgabe mit Recht im Allgemeinen festgehalten worden ist, doch in mehrfach veränderter Gestalt auf, durch welche nach unserer vollkommensten Ueberzeugung in sehr anerkennungswerther Weise die Zweckmässigkeit und Leichtigkeit des Gebrauchs in mehrfacher Beziehung wesentlich gefördert und erleichtert worden ist. Hierüber hat sich der Herr Verfasser in der ausführlichen Vorrede in sehr lehrreicher Weise ausgesprochen, und wir können uns nicht versagen, die allgemeinen Grundsätze, welche ihn bei der Bearbeitung der neuen Ausgabe geleitet haben, mit seinen eigenen Worten unseren Lesern hier mitzutheilen:

„Il était indispensable, vu l'accumulation des matériaux, de simplifier autant que possible le but qu'on se proposait, et le chemin qui devait y conduire. Il fallait, en général, supprimer les intégrales superflues; en outre il semblait nécessaire d'omettre les notices littéraires."

„Comme intégrales superflues, j'ai omis en premier lieu les intégrales déjà connues comme indéfinies, et qui ne tombent dans aucun cas de discontinuité. Ensuite, on pouvait négliger celles qui, par des considérations particulières, pouvaient se réduire aisément à d'autres intégrales. Ainsi, celles où la fonction à intégrer est paire, ou impaire, sont données seulement pour les limites 0 et 1, 0 et ∞, ou 0 et $\frac{1}{2}\pi$, 0 et π, non pour celles -1 et $+1$, $-\infty$ et $+\infty$, ou $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, $-\pi$ et π. Celles où la fonction ne change pas par une substitution de la valeur inverse de la variable, ne sont données que pour les limites 0 et 1, les intégrales entre les limites 1 et ∞, 0 et ∞ pouvant aisément se déduire de celles-ci. De même dans les intégrales où il faut intégrer une fonction de *Sin* x seulement, le *sinus* est changé en *cosinus* par la substitution $x=\frac{1}{2}\pi-y$; ces dernières intégrales sont omises en général."

„De cette manièr on obtenait déjà une veritable simplification; restait encore à snpprimer les notices littéraires. Or, celles-ci avaient un double but: celui de donner un coup d'oeil sur l'état

actuel et sur l'histoire de la science; en second lieu, celui de tenir lieu de démonstration, puisqu'on y renvoyait aux sources elles-mêmes. Donc, en renonçant à ces notices, il fallait absolument y suppléer d'une autre manière, puisqu'il est nécessaire avant tout que chacun, s'il le desire, puisse s'assurer lui-même de la validité du résultat donnè."

Wer wollte diese Grundsätze nicht vollkommen billigen und ihre Richtigkeit anerkennen! denn nur auf diese Weise war es möglich, das Werk nicht in's Ungeheuerliche anschwellen zu lassen. Welche Mittel aber der Herr Verfasser anwandte, um diesen Grundsätzen vollkommen gerecht zu werden, wird man in dem weiteren Verfolg der Vorrede mit besonderem Interesse nachlesen.

Den Inhalt, insofern derselbe die „Division des Tables" betrifft, theilen wir nachstehend vollständig mit:

Partie première. Intégrales à une seule fonction. I. Fonction Algébripue. Table 1—25. II. F. Exponentielle. T. 26—29. III. F. Logarithmique. T. 30—33. IV. F. Circulaire Directe. T. 34—75. V. F. Circulaire Inverse. T. 76—78. VI. Autre Fonction. T. 79. — **Partie deuxième** Intégrales à deux fonctions, dont l'une est algébrique. VII. F. Algébrique et Exponentielle. T. 80—105. VIII. F. Algébrique et Logarithmique. T. 106—148. IX. F. Algébrique et Circulaire Directe. T. 149—228. X. F. Algébrique et Circulaire Inverse. T. 229—254. XI. F. Algébrique et autre Fonction. T. 255.—**Partie troisième.** Intégrales à deux fonctions, dont aucune est algébrique. XII. F. Exponentielle et Logarithmique. T. 256—260. XIII. F. Exponentielle et Circulaire Directe. T. 261—281. XIV. F. Exponentielle et Circulaire Inverse. T. 282. XV. F. Exponentielle et Autre fonction. T. 283. XVI. F. Logarithmique et Circulaire Directe. T. 284—338. XVII. F. Logarithmique et Circulaire Inverse. T. 339. XVIII. F. Logarithmique et Autre Fonction. T. 340. XIX. F. Circulaire Directe et Circulaire Inverse. T. 341—349. XX. F. Circulaire Directe et Autre Fonction. T. 350—351. — **Partie quatrième.** Intégrales à trois fonctions. XXI. F. Algébrique, Exponentielle et Logarithmique. T. 352—360. XXII. F. Algébrique, Exponentielle et Circulaire Directe. T. 361—398. XXIII. F. Algébrique, Exponentielle et Circulaire Inverse. T. 399. XXIV. F. Algébrique, Exponentielle et Autre Fonction. T. 400. XXV. F. Algébrique, Logarithmique et Circulaire Directe. T. 401—434. XXVI. F. Algébrique, Logarithmique et Circulaire Inverse. T. 435—443.

XXVII. F. Algébrique, Logarithmique et Autre Fonction. T. 444. XXVIII. F. Algébrique, Circulaire Directe et Circulaire Inverse. T. 445—459. XXIX. F. Algébrique, Circulaire Directe et Autre Fonction. T. 460—465. XXX. F. Algébrique, Circulaire Inverse et Autre Fonction. T. 466. XXXI. F. Exponentielle, Logarithmique et Circulaire Directe. T. 467—471. XXXII. F. Exponentielle, Circulaire Directe et Circulaire Inverse. T. 472. XXXIII. F. Exponentielle, Circulaire Directe et Autre Fonction. T. 473. XXXIV. F. Logarithmique, Circulaire Directe et Autre Fonction. T. 474. XXXV. F. Logarithmique, Circulaire Directe et Autre Fonction. T. 475. XXXVI. F. Circulaire Directe, Circulaire Inverse et Autre Fonction. T. 476. — **Partie cinquième.** Intégrales à plus de trois fonctions. XXXVII. F. Algébrique et plusieurs fonctions. T. 477—486. **Additions.**

Der beschränkte Raum verbietet uns noch mehr zur Charakterisirung dieses, nach der von dem Herrn Verfasser gegebenen interessanten Uebersicht 8359 Formeln enthaltenden Werks zu sagen, wir glauben aber auch, dass das Vorhergehende für den Kundigen vorläufig hinreichen wird, um sich eine deutliche Anschauung von demselben zu verschaffen. Wir halten dasselbe unbedingt für die wichtigste Publication der neueren Zeit auf dem Gebiete der Integralrechnung, ja der Analysis überhaupt, die Mathematik lernt durch dasselbe endlich den wahren Besitzstand in einer ihrer wichtigsten Theorien kennen, was wohl auf keinem Felde wünschenswerther war als gerade auf diesem; und diesen Besitzstand kennen zu lernen, ist in vielen Theilen der Wissenschaft weit wichtiger als manche sogenannte neue Erfindungen, die oft nur zu dem Vergnügen oder der Belehrung ihrer Urheber gemacht und bloss für diese von Wichtigkeit und Interesse sind. Es ist in diesem schönen Werke nach unserer Meinung allen Anforderungen genügt, die man nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft an eine solche Arbeit zu machen nur irgend berechtigt ist, und dasselbe wird, in Verbindung mit dem gleichfalls trefflichen und grossen Werke desselben Herrn Verfassers:

Exposé de la Théorie, des Propriétés, des Formules de Transformation, et des Méthodes d'Evaluation des Intégrales définies par D. Bierens de Haan. Publié par l'Académie des Sciences à Amsterdam. Amsterdam, C. G. Van der Post. 1862. Gr. 4°. pag. 702. Prix Florins 13. 40 Cts. Holl*).

*) Wie es scheint jetzt in den Verlag von P. Engels in Leiden übergegangen.

wesentlich zu den weiteren Fortschritten der Theorie der bestimmten Integrale beitragen. Beide Werke sind unvergängliche Denkmäler die grösste Bewunderung erregenden holländischen Fleisses, holländischer Gelehrsamkeit und holländischen Scharfsinns, und gereichen dem ganzen Lande, in welchem sie entstanden, zur grössten Ehre. Wir können nur wünschen, dass der Herr Verfasser noch viele Jahre die Früchte seines ganz dem Dienste der Wissenschaft gewidmeten, aus den reinsten und lautersten Motiven hervorgegangenen Strebens geniessen möge.

Sammlung von Aufgaben zur algebraischen Analysis. Bearbeitet von Johann Lieblein, ausserordentlichem Professor am Polytechnikum in Prag. Prag. H. C. J. Satow. 1867. 8°.

Dieses auch äusserlich sehr hübsch ausgestattete Buch hilft, wie es uns scheint, einem wirklichen Bedürfnisse ab, indem es eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben enthält, deren Lösung die Lehren der sogenannten algebraischen Analysis erfordert, bei deren Bearbeitung und Zusammenstellung sich der Herr Verfasser, was natürlich die grösste Anerkennung verdient, ganz dem neueren Zustande der genannten Wissenschaft, so wie dieselbe namentlich von Cauchy in seinem berühmten, bis jetzt unübertroffenen Werke: „Analyse algébrique“ dargestellt worden ist, angeschlossen, übrigens aber auch neueren Untersuchungen gebührend Rechnung getragen hat. Wir halten daher dieses Buch für ein allen Lehrern sehr zu empfehlendes Hülfsmittel bei'm Unterrichte in der algebraischen Analysis, und wünschen demselben recht grosse Verbreitung, indem wir dem Herrn Verfasser für dessen Herausgabe besonderen Dank aussprechen. Wie vollständig der Herr Verfasser alle wichtigeren Lehren berücksichtigt hat, zeigt der folgende Inhalt: I. Ueber die verschiedenen Arten voo Funktionen. II. Ueber cyclometrische Funktionen. III. Ueber Grenzwerthe. IV. Ueber Continuität und Discontinuität der Funktionen. V. Ueber die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen. VI. Ueber Doppelreihen. VII. Ueber Reihenentwickelungen. A) Ueber recurrente Reihen. B) Ueber die Binomial- und Exponentialreihe. C) Ueber logarithmische Reihen. D) Ueber goniometrische und cyclometrische Reihen. VIII. Ueber unendliche Produkte. IX. Ueber die Funktionen complexer Variabeln und über complexe Reihen und Produkte. X. Kettenbrüche. — Erläuterungen und Resultate zu den vorhergehenden Aufgaben, mit welchem letzteren Abschnitte der

Herr Verfasser vielen Lehrern einen besonderen Dienst erwiesen haben wird.

Indem wir dieses Buch nochmals recht sehr zur Beachtung empfehlen, brauchen wir wohl nicht noch darauf besonders hinzuweisen, dass alle darin gegebenen Aufgaben der Functionen- und Reihenlehre entnommen sind; wir heben dies nur deshalb hervor, um daran den Wunsch zu knüpfen, dass es dem Herrn Verfasser recht bald gefallen möge, auch für die Theorie der Gleichungen, als zweiten Theil der algebraischen Analysis, eine mit gleichem Fleisse und gleicher Umsicht bearbeitete Aufgabensammlung herauszugeben, wodurch er sich gewiss die Lehrer der algebraischen Analysis zu neuem Danke verpflichten wird.

Sur les Maxima et Minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile a plusieurs centres fixes. Par L. Lindelöf*). Extrait des Mémoires de la Société des Sciences de Finlande. Helsingfors. 1866. 4°.

Diese sehr zu beachtende Abhandlung behandelt in eigenthümlicher scharfsinniger Weise die auf dem Titel genannte Aufgabe, mit Anwendung auf die drei folgenden besonderen Aufgaben:

I. Déterminer le point O de maniére que la somme des distances de ce point aux sommets d'un triangle donné soit minimum.

II. Déterminer un point O de manière que la somme des distances de ce point aux quatre sommets d'un tétraèdre donné $ABCD$ soit minimum.

III. La somme des carrés des distances d'un point O à n centre fixes doit être minimum.

Die Behandlung dieser drei Aufgaben enthält mehreres Eigenthümliche, was sehr der Beachtung unserer Leser empfohlen werden muss. Aus der Auflösung der Aufgabe I. ist Mehreres für unsere Abhandlung Nr. III. in diesem Hefte benutzt worden, auf welche wir uns daher zu verweisen erlauben. G.

Remarques sur les différentes manières d'établir la formule $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$. Par Lindelöf. (Lu le 22 Janvier 1866).

---

*) Professor an der Kais. Finländischen Alexanders-Universität in Helsingfors.

Diese sehr lehrreiche und beachtenswerthe Abhandlung weiset auf überzeugende Art die Falschheit oder das Ungenügende der von einer grösseren Anzahl von Mathematikern gegebenen Beweise der auf dem Titel genannten Gleichung, deren Erfindung nach Clairaut von Fontaine herrührt, nach. Herr Lindelöf erörtert in der angedeuteten Beziehung in scharfsinniger Weise die von Clairaut, Euler, Bertrand (Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1864. p. 156.) gegebenen Beweise, beschäftigt sich aber ganz besonders mit der von Schlömilch (Compendium der höheren Analysis, 2te Aufl. Braunschweig. 1862. S. 70.) gegebenen Darstellung, die er als eine völlig ungenügende und mangelhafte auf sehr überzeugende und schlagende Art nachweiset. Gegen die von Cauchy und Moigno und denen, die sich diesen Mustern anschliessen, gegebene Darstellung ist natürlich nichts zu erinnern. Wir empfehlen die lesenswerthe und lehrreiche Schrift allen denen, die sich mit dem Studium der Differentiation der Functionen mit mehreren Variabeln beschäftigen, recht sehr zu sorgfältigster Beachtung, namentlich auch Anfängern, die oft Etwas für baare Münze halten, was es keineswegs ist, und nicht selten bei'm Unterrichte in der Differential- und Integralrechnung zu ihrem grössten Schaden sehr in der Irre herumgeführt werden. Erfordert irgend ein Theil des mathematischen Unterrichts völlige Schärfe, Klarheit und Bestimmtheit, so ist es der Unterricht in den genannten Wissenschaften. Herr Lindelöf verdient daher grossen Dank, auf die von ihm gerügten Irrungen und Fehler aufmerksam gemacht zu haben.

Fem-ställiga Logarithm-Tabeller, innehållande de vanliga logarithmerna från 0 till 11000, de naturliga logarithmerna från 0 till 10000, logarithmerna för de trigonometriska funktionerna, jemte en samling Tabeller som med för del kunna användas vid numeriska räkningar, af A. F. D. Wackerbarth, Phil. Dokt., Ledamot af K. Vetenskaps-Societeten i Upsala och af Royal Astronomical Society i London, R. N. O. Upsala. P Hanselli. 1867.

Diese schönen, in kleinem Format mit Sterotypen gedruckten Tafeln eines sehr verdienten und berühmten Astronomen liefern von Neuem den sehr erfreulichen Beweis, dass die grossen Vortheile kleinerer, nur fünfstelliger Tafeln vor den grösseren siebenstelligen Tafeln immer mehr und in immer weiteren Kreisen

anerkannt und gehörig gewürdigt werden. Den Hauptinhalt bildet zunächst die Tafeln I., III. und V. Die Tafeln I. und III. enthalten die gemeinen Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen in einer von der gewöhnlichen zwar nicht wesentlich abweichenden, aber die deutliche und rasche Uebersicht doch sehr erleichternden Weise (10000—11000 siebenstellig); der Tafel I. ist noch ein Anhang zur Auffindung siebenstelliger Logarithmen beigegeben. Tafel V. enthält die hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 in gleicher Anordnung wie die gemeinen Logarithmen, für welche Tafel wir dem Herrn Verfasser nicht genug Dank sagen können, da eine solche Tafel sich wohl in nur sehr wenigen Sammlungen von gleichem Umfang und gleicher Ausdehnung finden dürfte, und dieser Sammlung nach unserer Meinung, ausser ihrer trefflichen Einrichtung im Allgemeinen, zu ganz besonderer Empfehlung gereicht und von allen Lehrern der Mathematik ganz besonders beachtet zu werden verdient. In den genannten drei Tafeln sind überall die Proportionaltheile, wie es die neuere Zeit bei allen Tafeln verlangt, so vollständig und so zweckmässig angegeben, wie es erforderlich ist, wenn die von den Tafeln zu gewährende Genauigkeit auch wirklich erreicht werden soll, mit gehöriger Berücksichtigung möglichster Erleichterung aller auszuführenden Nebenrechnungen. Als ein Anhang zu Tafel I. der gemeinen Logarithmen enthält Tafel II. die gemeinen Logarithmen der Producte $1.2.3.4 \ldots x$, $1.3.5 \ldots x$ und $2.4.6 \ldots x$; und als Anhang zu Tafel V. ist eine besondere Tafel der Vielfachen des Modulus und des reciproken Modulus des Brigg'schen Systems beigegeben. Tafel IV. enthält die Längen der Kreisbogen bis auf Secunden. Ausserdem enthält die schöne Sammlung noch eine Tafel der Quadratzahlen und Quadratwurzeln; eine Tafel der natürlichen Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten; eine Tafel zur Verwandlung von $\frac{1}{n}$ in einen Decimalbruch von $n=1$ bis $n=1000$; die Gauss'schen Tafeln für das Höhenmessen mit dem Barometer; eine Reihe sehr nützlicher physikalischer Tafeln, z. B. der specifischen Gewichte, der Ausdehnungscoefficienten u. s. w., in denen, was besondere Anerkennung verdient, auch zugleich immer die nöthigen Reductionsformeln angegeben sind; eine Tafel zur Vergleichung der wichtigsten Maasse und Gewichte; und eine überaus vollständige und ungemein genaue Tafel aller für reine Mathematik, Physik, Astronomie und Praxis nur irgend wichtiger Constanten und deren Logarithmen und Co-Logarithmen (Decadische Ergänzungen); endlich auch noch ein Täfelchen der Primzahlen.

Wir halten diese Tafeln für sehr genau, in allen Beziehungen sehr zweckmässig eingerichtet, und jedem Bedürfniss in den von ihnen festgehaltenen Gränzen genügend. Die Einleitung enthält in sehr zweckmässiger Kürze Alles, was für den Gebrauch der Tafeln zu wissen nöthig ist; das Papier ist stark und weiss, die Ziffern sind ungemein scharf und deutlich. Wir glauben daher diese sehr schönen und sehr bequemen neuen Tafeln zur allgemeinsten Beachtung — auch in Deutschland — dringend empfehlen zu müssen, da die Sprache bei einem solchen Buche als ein wesentliches Hinderniss nicht in Anschlag gebracht werden kann und darf.

Geometrie.

O kvadrature kruhu. Historicko - mathematickè pojednáni od Františka Müllera, supl. profesora na královské polytechnice české. V. Praze. 1865. 8°.

Wir maassen uns natürlich nicht im Entferntesten an, die geringste Kenntniss der böhmischen Sprache zu besitzen; indess sind uns doch die vielen in dieser Schrift vorkommenden Formeln und geometrischen Darstellungen sehr wohl verständlich gewesen, und haben uns zu der Ueberzeugung geführt, dass dieselbe eine sehr vollständige Zusammenstellung der verschiedenen zur Berechnung des Kreises gegebenen Methoden (einschliesslich der verschiedenen annähernden Constructionen) enthält, und in dieser Beziehung empfohlen zu werden verdient, indem uns schon der Umstand, dass überhaupt eine derartige Schrift in böhmischer Sprache existirt, genugsames Interesse darzubieten schien, um auf dieselbe hier wenigstens aufmerksam zu machen.

Physik.

Von der von Herrn Prof. Dr. C. Jelinek mit der grössten Umsicht redigirten Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, zu deren Präsidenten in der Jahresversammlung vom 16. November 1867 an Stelle des auf sein Ansuchen nicht wieder gewählten Freiherrn von Wüllerstorf der Director der Wiener Sternwarte Herr Prof. Dr. C. v. Littrow, zum Vicepräsidenten der Generalsecretär der k. Akademie der Wissenschaften Herr Prof. Dr. A. Schrötter gewählt und dadurch die Leitung der Arbeiten der Gesellschaft gewiss in die besten Hände gelegt worden ist, ist neuerlich II. Band. Nr. 23. (die Anzeige in Nr. 22. s. im Literar. Ber. Nr. CLXXXVIII. S. 18.) erschienen. Diese neueste Nummer enthält den Aufsatz: Ueber

die Beobachtung atmosphärisch und tellurisch inducirter elektrischer Strömungen in den Telegraphen-Leitungen. Von Samuel Neumann, Concipist im k. ung. Handelsministerium; ausserdem Gesellschaftsnachrichten, Necrologe verdienter Mitglieder, Literaturberichte und eine grössere Anzahl sehr interessanter kleinerer Mittheilungen über die meteorologischen Stationen des Königreichs Dänemark, das meteorologische Beobachtungssystem der Schweiz, meteorologische Beobachtungen in Curhessen, über Circumtraction eines Windes oder über einige Arten von Wirbelung in einem Luftstrome, Theorie der Abendröthe nach Lommel, Scirocco in Jerusalem.

Wir wünschen sehr, dass das verdientliche, in allen Nummern sehr viel Lehrreiches enthaltende Unternehmen den ungestörtesten Fortgang haben möge, woran bei dem grossen Eifer und der grossen Umsicht des Herausgebers um so weniger zu zweifeln ist, weil die Anzahl der Mitglieder der Gesellschaft am 1. October 1867 die bedeutende Höhe von 289 erreicht hatte und die jährliche Einnahme 1871 Fl. 30 Kr. bei einem baaren Vermögen von 562 Fl. 55 Kr. betrug, wobei wir bemerken, dass die Gesellschaft in der anerkennenswerthesten Weise vom k. k. Handelsministerium eine jährliche Subvention von 200 Fl., von der Marine-Section des k. k. Kriegsministeriums eine jährliche Subvention von gleicher Höhe erhält.

Jahrbücher der k. k Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von Carl Jelinek und Carl Fritsch, Director und Vice-Director der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Neue Folge, II. Band. Jahrgang 1865. Der ganzen Reihe X. Band. Wien. Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. 1867. 4°.

Indem wir nur erst im Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 10. den ersten Band dieser wichtigen neuen Jahrbücher anzuzeigen das Vergnügen hatten, zeigt jetzt schon der vorliegende zweite Band, wie rüstig die beiden Herrn Herausgeber auf dem betretenen Wege weiter fortschreiten, gewiss mit dem grössten Nutzen für die Wissenschaft, weil regelmässiges und rasches Fortschreiten bei solchen Publicationen von der grössten Wichtigkeit ist und desto mehr Anerkennung verdient, je mehr Fleiss, Mühe und Arbeit dieselben erfordern. Im Allgemeinen ist die Einrichtung und Anordnung dieses Bandes dieselbe geblieben wie im ersten

Bande, so dass wir uns in dieser Rücksicht auf unsere Anzeige dieses letzteren beziehen können, und nur so viel bemerken wollen, dass in diesem neuen Bande die Stationen durchaus nach ihrer geographischen Lage geordnet wurden, und dass die österreichische Monarchie in drei Zonen: eine nördliche (deren Breite grösser als 48°.30′ ist); eine mittlere (Breite zwischen 46°.30′ exclusive und 48°.30′ inclusive), eine südliche (alle Stationen, deren Breite 46°.30′) getheilt wurde; in jeder Zone wurden aber die Stationen nach ihrer Länge von West nach Ost fortschreitend geordnet. Die Anzahl der Stationen ist von 118 (im Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 11. Z. 15. steht irrthümlich 117, was wir in 118 umzuändern bitten) auf 128 gestiegen. Wir wünschen den ungestörtesten Fortgang. So wie dem vorigen (für Januar 1864) sind auch diesem Bande zwei von Herrn J. Harbich gezeichnete Karten beigefügt, welche die Wärmevertheilung im Februar 1865 und in der Zeit vom 18.—20. März 1865 darstellen.

Vermischte Schriften.

Carl Friedrich Gauss Werke. Fünfter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1867. 4°.

Dieser fünfte Band des so sehr wichtigen Werkes, durch dessen Herausgabe die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen sich das grösste, mit dem lebhaftesten Danke anzuerkennende Verdienst um die Wissenschaft und alle Mathematiker erwirbt, enthält die zur mathematischen Physik gehörenden Schriften des berühmten Geometers. Der Inhalt zerfällt in die folgenden Hauptrubriken: Abhandlungen, Anzeigen eigener Abhandlungen, Verschiedene Aufsätze über Magnetismus, Aufsätze über verschiedene Gegenstände der mathematischen Physik, Physikalische Beobachtungen, Anzeigen nicht eigener Schriften, Bemerkungen, Steindrucktafel zur Theorie des Erdmagnetismus. Der beschränkte Raum dieser Literarischen Berichte gestattet natürlich nicht die vollständige Mittheilung des reichen Inhalts dieser verschiedenen Abtheilungen; versagen können wir uns aber nicht, den Inhalt der drei folgenden Abtheilungen anzugeben: Abhandlungen: Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. — Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. — Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. — Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. — Allgemeine Theorie des Erd-

magnetismus. — Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. — Dioptrische Untersuchungen. — Aufsätze über verschiedene Gegenstände der mathematischen Physik: Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde. — Ueber die achromatischen Doppelobjective, besonders in Rücksicht der vollkommenen Aufhebung der Farbenzerstreuung. — Brief an Brandes über denselben Gegenstand. — Berichtigung der Stellung der Schneiden einer Waage. — Nachlass: Zur Electrodynamik. — Ueber Kugelfunctionen. — Zum Gebrauch des Comparators. — Allgemeine Formeln für die Wirkung eines leuchtenden Punktes P auf einen Punkt p. — Sehr lehrreiche und wichtige Bemerkungen des Herrn Professor Schering schliessen den auch äusserlich in der würdigsten, nichts zu wünschen übrig lassenden Weise ausgestatteten Band.

Wir sehen dem Erscheinen der noch übrigen Theile mit dem grössten Verlangen entgegen, und wünschen den hochverdienten Herren Herausgebern aus dem Grunde unseres Herzens fortwährende Kraft und Ausdauer zu dem wichtigen und schwierigen Werke. G.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. VI. Fasc. I. Upsaliae 1866. 4°.

Der vorliegende neue Theil der Schriften der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften in Upsala, deren vorhergehenden Theil (Vol. V. Fasc. II.). wir im Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 17. anzuzeigen das Vergnügen hatten, enthält ausser mehreren wichtigen botanischen, zoologischen und chemischen Abhandlungen der Herren J. W. Liljeborg, J. E. Areschoug und V. P. T. Cleve die beiden folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen: A Provisional Theory of Leda. By **A. D. Wackerbarth** und Jordmagnetiske Iagttagelser of **Christopher Hansteen**; welche beide auch in besonderen Abdrücken zu haben sind (Upsala. Kongl. Akad. Boktryckeriet). — In der ersteren Abhandlung giebt Herr Wackerbarth vorläufige Elemente des Planeten Leda, bei welcher wie bei den übrigen kleinen Planeten wegen der grossen Excentricität und Neigung der Bahn die gewöhnliche Laplace'sche Methode zur Berechnung der Störungen nicht anwendbar war und deshalb andere Methoden in Anwendung gebracht werden mussten; in der zweiten Abhandlung beschäftigt sich der berühmte hochachtbare,

in seinem hohen Alter immer noch unermüdlich thätige Veteran der Wissenschaft mit der magnetischen Inclination und der horizontalen magnetischen Intensität für Christiania, und liefert namentlich mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnete Formeln für diese Elemente als Functionen der Zeit, auf welche wir besonders aufmerksam zu machen nicht verfehlen.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. S. Literar. Ber. Nr. CLXXXVII. S. 9.

Settembre e Ottobre 1867. Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. (Cont. Vedi p. 105). p. 257. — Pangeometria o sunto di Geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele per N. Lobatschewsky, Professore emerito dell' Università di Kasan, e membro onorario dell' Università di Mosca. (Versione dal Francese). p. 273.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution. Washington. 1866. 8°.

Dieser „Annual Report" der berühmten Smithsonian Institution, dessen frühere Jahrgänge in unseren Literarischen Berichten immer angezeigt worden sind, enthält, ausser den gewöhnlichen amtlichen Berichten über den Fortgang des Instituts und Literarischen Nachrichten, die folgenden sehr zu beachtenden, in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen: The Aurora borealis, or Polar Light: its Phenomena and Laws. By **Elias Loomis**, Professor of Natural Philosophy and Astronomy in Yale College. p. 208.—p. 248. (Diese Abhandlung über das Nordlicht scheint uns in jeder Beziehung höchst interessant und wichtig, und darf nach unserer Meinung von Keinem, der diesem prachtvollen Phänomene besonderes Studium widmet, unbeachtet gelassen werden.). — Electro-Physiology. A course of Lectures by Prof. **Carlo Matteucci**, Senator etc. Turin 1861. Translated for the Smithsonian by C. A. Alexander. p. 291.—p. 345. (Sechs höchst interessante Vorlesungen des berühmten italienischen Physikers in englischer Uebersetzung, welche in aller Kürze einen höchst interessanten Ueberblick über das ganze Gebiet ihres wichtigen Gegenstandes geben, so dass wir unsere Leser nur dringend auf diese Vorlesungen Matteucci's aufmerksam machen können.). —

Experimental and Theoretical Researches on the Figures of Equilibrium of a Liquid Mass with drawn from the action of gravity etc. By J. Plateau, Professor in the University of Ghent. Fifth Series. p. 411. —p. 435. (Uebersetzung einer bekannten Abhandlung **Plateau's** aus den **Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles**.) — **The metric System of Weights and Measures, with Tables intended especially for the use of Teachers and Authors of Arithmetics. By Prof. H. A. Newton.** p. 465. —p. 484. Die kurze, aber erfreuliche Einleitung zu diesen Vergleichungstabellen lautet: „While this part of the appendix to the Annual Report of the Smithsonian Institution was passing through the press the following resolution, pertaining to the French system of weights and measures, were adopted by both houses: **An Act** to authorise the use of the metric system of weights and measures etc. etc."

Wenn auch das in dem nachstehenden, aus **Amerika** zur weiteren Verbreitung uns zugesandten Programme ausführlich charakterisirte Werk nicht eigentlich in den Kreis unserer Zeitschrift gehört, so schien uns doch das in demselben klar zu Tage tretende Streben, die Chemie mit Hülfe der Mathematik zu einer wahren Wissenschaft — was sie, ungeachtet aller, nach einem jetzt sehr beliebten und gäng und gebe gewordenen Ausdrucke, als glänzende bezeichneten Entdeckungen, nach der Ansicht vieler sehr einsichtsvoller Chemiker noch keineswegs ist — zu erheben, interessant genug zu sein, um die Aufnahme des uns mitgetheilten Programms in unsere Literarischen Berichte zu rechtfertigen, ohne dadurch die wohl etwas excentrischen Ideen des Verfassers ohne Weiteres zu den unsrigen machen zu wollen.

G.

Résumé français du programme de l'atomécanique, ou la chimie, une mécanique des panatomes.

Par **Gustave Hinrichs,**

professeur de physique, chimie et minéralogie à l'université d'état d'Iowa, chimiste de la survey géologique de l'état, etc.

Iowa-City, états-unis. 1867.

L'histoire du progrès de la science est toujours la même; donc vous trouverez l'histoire future de la chimie dans celle de sa soeur aînée, l'astronomie. Voyons un peu.

Le phlogiston, c'est de la chimie ptolémique. La nature générale du phénomène est reconnue; mais on s'est arrêté aux apparences.

Lavoisier est bien le Copernic de la chimie. Tous les deux perçaient le voile des semblants. Ce n'est plus le soleil qui se meut, mais la terre; ce n'est plus perdre du phlogiston, c'est acquérir de l'oxygène.

La chimie moderne, la science d'à présent, est tout-à-fait képlérienne. Les belles lois de Dulong et de Petit (chaleur spécifique), de Gay-Lussac (volume), de Mitscherlich (isomorphie), combinées par Gerhardt, ont fait de la chimie une science précise. Les découvertes brillantes dans la chimie organique depuis Liebig jusqu'à Berthelot, et la spectroscopie de Bunsen et Kirchhoff, ont rendu la chimie universelle et cosmique comme l'astronomie.

Est-ce que ce parallèle de l'histoire de la chimie et de l'astronomie se termine içi? Ne sera-ce pas la chimie dans l'avenir, comme l'astronomie l'a été après Képler?

Donc il faut qu'il y ait un principe général qui transforme la chimie moderne en *mécanique des atomes*, comme l'astronomie est devenue la mécanique des atomes cosmiques, c'est-à-dire celle des corps célestes.

La gravitation universelle n'est qu'une hypothèse; mais cette hypothèse comprend la mécanique céleste tout entière. D'après l'hypothèse de Newton, les corps célestes ne diffèrent qu'en magnitude.

Ayons la hardiesse de prononcer une hypothèse semblable en chimie. Disons que les atomes des éléments ne diffèrent que par le nombre et l'ordre des atomes d'une matière unique, précisément comme les planètes ne diffèrent que par le nombre de kilogrammes de matière pondérable. Comme tout serait produit de cette matière, je l'appellerai le *pantogène;* ses atomes, qui sont nécessairement égaux entr'eux, seront *panatomes.*

Cela n'est qu'une hypothèse, direz-vous. Soit. La gravitation universelle est une hypothèse aussi. Parce qu'elle explique les lois de Képler, parce qu'elle découvre et mesure les perturbations, parce qu'elle a été le moyen de calculer de nouvelles planètes et étoiles, cette hypothèse est considérée comme le principe fondamental de l'astronomie théorique.

Dans mon *Atomécanique*, je crois avoir démontré que l'hypothèse du pantogène explique les relations numériques des poids atomiques, et nous donne une classification rationelle des éléments (Sect. I, §§. 6—56); que les propriétés chimiques (Sect. II, §§. 57—120), physiques (Sect. III, §§. 121—128) et morphologiques ou cristallographiques des éléments et de leurs combinaisons (Sect. IV, §§. 229—400) se peuvent calculer aussi bien que l'orbite décrit par l'atome céleste. Donc l'hypothèse paraît digne de l'attention des chimistes, des physiciens et des minéralogistes.

L'analyse spectrale des corps célestes démontre la réalité de l'hypothèse de Newton. La matière des étoiles étant la même, il faut que leur attraction le soit aussi. De Newton à Bunsen, il y a deux siècles.

L'analyse des élements démontrera un jour la réalité du pantogène; la science moderne ne demande pour cela que peu d'années.

Peut-être doutez-vous de l'existence du pantogène? Vous croyez les éléments indécomposables. Eh bien! connaissez-vous une seule propriété qui ne soit commune à *tous* les éléments? Y a-t-il d'autres différences que celle de la quantité? Donc les éléments chimiques peuvent bien n'être que des *modi-*

fications quantitatives d'une matière unique; et c'est cette matière que nous nommons le *pantogène*.

Chimistes et physiciens, rejeterez-vous ce pantogène parce que c'est de l'hypothèse? C'est ce que firent les astronomes français au temps de Fontenelle, et cela fut tout ce qu'ils ont fait. Plus tard, l'hypothèse fut admise en France, et la *mécanique céleste* en résulta.

Donc je vous demande le droit de soumettre mon ouvrage à la discussion scientifique, et je sollicite votre secours. Je vous prie de transférer le résumé ci-joint dans les pages des journaux dont vous avez le contrôle, et de faire traduire et de publier dans vos journaux des fragments de l'Atomécanique. Moi, j'ai fait mon devoir; j'ai distribué une centaine d'exemplaires de l'Atomécanique (50 pages grand in—4°), qui seront suivis de 2,500 exemplaires de ce résumé: le tout me coûtant plus de 1,200 fr. et douze années de travail.

Il va sans dire que mon Atomécanique ne doit être considéré que comme le *programme* de la chimie mécanique. Je serai content d'avoir indiqué le cours futur de la chimie et de la physique moléculaire.

Mais assez de préface. Commençons le résumé.

SECTION I. — §§. 6—56.
LE PANTOGÈNE ET LES ÉLÉMENTS.

Les atomes du pantogène, les *Panatomes*, sont nécessairement égales. Il faut les considérer comme des point matériels, sans aucune qualité occulte.

Combinés, ces atomes ont des distances definies. Trois de ces atomes font un *triangle régulier;* car c'est cette forme qui est la figure d'équilibre *stabile* de trois poins égaux. Par l'accession d'autres panatomes, il résultera des figures planes toutes divisibles en triangles réguliers. Les éléments chimiques dont les atomes sont composés de ces figures, je nomme *Trigooïdes* (—metalloïdes).

Quatre panatomes peuvent former un quadrat; par l'addition d'autres panatomes des formes *rectangulaires*, divisibles en quadrats, résulteront. Les *Tétragonoïdes* (métaux) sont les éléments dont les atomes se composent de ces formes.

Ces formes j'appelle *Atomares*, composées d'un nombre défini de panatomes. Un nombre m (—*atomètre*) de ces atomares superposés verticalement, forment un prisme, l'*atobar*, ayant un poids —g (*atogramme*) égale au nombre de panatomes; l'espace total occupé par ce corps j'appelle l'*atostère* (le volume spécifique des atomistes ou moléculaire des chimistes). Le tout c'est l'*atome* de l'élément.

Un hexagone régulier se fait de $a = 7$ panatomes; prenant $m = 4$ de ces atomares superposés, nous aurons le prisme hexagonale de $g = m.\ a = 4\ (7) = 28$ panatomes. C'est l'atome de l'azote, $N = 28$.

L'atome composé le plus simple correspond à $a = 1$ et $m = 2$, c'est-à-dire $g = 2\ (1) = 2 = H$. Donc l'*atogramme* est le double du *poids atomique* de la chimie moderne.

Les éléments seront classifiés d'après la *forme* de leurs atomes. Les Trigonoïdes et les Tetragonoïdes forment les deux *ordres* des élements. Chacun de ces ordres est divisé en *genres* d'après la forme de l'atomare, et ces genres sont divisés en

spèces (éléments) par les valeurs absolues de a et de m. Les genres donc eront exprimés par une *équation algébrique*, et je leur donne l'initiale *grec**) our symbole; précisément comme l'espèce (l'élément) étant exprimé par un *ombre* (l'atogramme g) est représenté par l'initial latin. Par ce moyen les ubstitutions générales se peuvent exprimer facilement; les équations chimi-ues acquièrent la généralité dont nous avons besoin.

Ainsi le genre des *Phosphoïdes* sera $Ph = m\ (p)$ et se compose des élé-nents N, P, As, Sb, Bi; p étant un hexagone régulier. Le rayon de l'hexa-gone $p = 7$ est égal à la distance qui sépare deux panatomes en état de com-binaison; soit r ce rayon. Les hexagones du rayon 2r, 3r contiennent 19, 37 panatomes. Au lieu de 37 prénons 35 par l'omission de deux panatomes d'un diamètre du cercle circonscrit.

Afin que les espèces soient rigoureusement de la même forme, il faut que le rayon de l'atomare soit proportionnel à l'atomètre. Donc les rayons r, 2r, 3r, ou les atomares 7, 19, 35 demandent les atomètres 4, $2.4 = 8$, $3.4 = 12$: l en résultera les trois espèces $4.7 = 28$, $8.19 = 152$ et $12.35 = 420$; c'est presque identique du double du poids atomique de N, As et Bi.

En outre, le genre des *Chloroïdes* $Ch = (1) + m.p$ est dominé par $m = 5$. En combinant ce 5 p avec les 4.7 et 8.19 nous aurons $9.7 = 63$ et $13.19 = 247$, correspondant aux éléments P et Sb. Ainsi se complète le genre des phosphoïdes.

Les différences entre les atogrammes calculés théoriquement et les poids atomiques reçus, sont absolument *nulles* pour tous les éléments dont le poids atomique peut être considéré bien établi (H, O, N, C, S, Na, Ca, Fe, etc. etc.) et jamais ne sont plus considérables que l'erreur probable des détermi-nations analytiques. Ici il faut se rappeler les corrections récentes de M. von Sommaruga et Schneider pour Ni et Co, dont les valeurs de Dumas et Gibbs étaient reçues comme exactes. L'objet des travaux de M. Stas n'est autre que celui de M. Berthollet en 1803; le résultat sera le même aussi, la loi l'em-portera sur le désordre.

J'ai présenté cette classification des éléments sur un grand tableau pour aider les étudiants. Plaçant *pi* comme le symbole du pantogène au centre de la carte, les rayons de ce point représenteront les genres, et les espèces (élé-ments) seront marqués sur ces lignes en faisant les distances du centre propor-tionnel aux atogrammes. Les Trigonoïdes sont rangées à gauche et en haut; les Tétragonoides rayonnent à droit et en bas.

Les *Trigonoïdes* comprennent quatre genres: 1. *Pantoïdes Hy*, dont il n'y a qu'une seule espèce, H; 2. *Chloroïdes*, *Chl.* = Fl, Cl, Br, Io; 3. *Phosphoï-des*, *Ph.* = N, P, As, Sb, Bi; 4. *Sulphoïdes* (Thionoïdes) *Th.* = O. S, Se, Te.

Des *Tetragonoïdes* il faut mentionner: 5. *Kaloïdes*, *Ka.* = Li, Na, Ka, Rb; 6. *Thalloïdes*, *Th.* = In, Cs, Tl; 7. *Calcoïdes*, *Ca.* = (Mg), Ca, Sr, Ba; 8. *Kadmoïdes*, *Kd.* = Mg, Zn, Cd, Pb, etc.

Pour les formules des genres, les valeurs spécifiques des espèces, les *varié-tés* et les résultats géneraux, il faut renvoyer le lecteur à l'ouvrage**) dont ceci n'est que le résumé.

---

*) A défaut de caractères grecs, l'imprimeur est obligé d'employer des caractères italics.

**) Il faut corriger trois erreurs dans §. 23 de cet ouvrage. J'écrivis

SECTION II. — §§. 57 — 120.
LES PROPRIÉTÉS CHIMIQUES.

Les procès chimiques n'étant que des mouvements mécaniques il s'en suit que:

1°. L'atome A se combinant avec l'atome B, ne fait que coincider son axe prismatique avec celui du prisme de l'atobar B. Le volume résultant sera égal à la somme, c'est-à-dire = 2, le volume d'un atome étant unité;

2°. L'atome A, en se combinant avec deux atomes B, réduit ces deux volumes à un volume et s'unit avec celui-ci comme au premier cas; le volume de AB_2 est donc = 2, et la figure formée des trois atomes est un triangle isoscèle, ou bien régulier;

3°. L'atome A se combinant avec trois atomes B, réduit ces volumes à un, les trois B formant un triangle régulier, A étant placé au-dessous du centre de gravité de ce triangle; donc le volume résultant est = 2;

Ainsi de suite; pour A + B les quatre B formeront un quadrat de volume = 1, etc., etc. En général, Am Bn ne formera que le volume = 2.

La forme de l'atomare détermine l'atomicité. Les *chloroïdes*, dont la formule générique est (1) + m.(p), ayant un pole comme l'hydrogène formé d'un seul panatome, se combineront par conséquence avec un atome d'hydrogène. La formule générale des *Chloro-pantoïdes* sera donc *Chl, Hy;* voyez 1°.

Les *sulphoïdes* se combinent avec 2H, parceque leur atomare contient deux centres d'attraction; voyez 2°.

Les *phosphoïdes* demandent 3 H pour se saturer; car l'hexagone du N*) ou P formé de sept panatomes peut se résoudre en trois rhombes, aux centres de gravité desquels les 3 H se fixeront; voyez 3°. pour les volumes.

Les *titanoïdes* (C, Si, Ti, Pd, Pt) sont tétratomiques, etc. Voilà les types de la chimie moderne.

Il est de voir que la loi des volumes s'en suit de nouveau de ces atomares. Les trois H évidemment n'occupent pas plus d'espace que l'atomare de N, etc., etc.

La loi fondamentale de la chimie moderne est donc devenue une conséquence mécanique de la constitution des atomes des éléments.

La *constitution mécanique des sels* se déduit comme suit: Plaçant verticalement la ligne droite qui joint l'atome A du métal (en haut) avec l'atome C du métalloïde (en bas), les atomes B de l'oxygène formeront le plan équatorial de cet axe du sel. Les atomes d'eau de crystallisation se placeront dans l'équateur.

La formule rationnelle des carbonates sera MO_3C, des sulfates MO_4S, etc. Cette constitution mécanique comprend les vues de Berzelius, Davy, Gerhardt, explique les oxidations, les réductions, les substitutions, les polarités électriques, etc., etc. Donc cette constitution est bien l'expression de la nature; [illegible], c'est par elle que les formes cristallines se déterminent (sect. IV.).

Les séries organiques sont d'un intérêt tout particulier; je les trouve les [illegible] des *genres* des éléments. Donnons la constitution des hydrocarbures [illegible]

[illegible] au milieu du fracas d'une imprimerie—donc, au lieu de 8.19 = [illegible] 150, etc. Au lieu de l'atomare 30, il faut lire 35.

*) Le français Az étant la seule déviation de l'universalité des symboles [illegible] doit être remplacé par N.

*h*C*h* protylène,
*h*C*h*C*h* deutylène,
C*h*C*h*C*h* tritylène,
etc.

Les h représentent chacun deux H, tous les deux projetés au même point h; les C sont rangés sur une ligne droite; les rectangles des atomes C sont liés aux extrêmes par les H.

S'il y a de l'oxygène (alcohols, etc.), celui-ci prend sa place au-dessus es H.

Ceci suffira pour faire voir que les membres des séries organiques sont rismatiques, correspondant tout-à-fait aux éléments membres d'un même genre.

Des modèles construits de grains de verre sont très-utiles pour représenter es constitutions.

SECTION III. — §§. 121 — 228.
LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES.

Pour les atomes d'atobar prismatique et du même atomare, je démontre ue *l'atostère est proportionnel à l'atomètre.* En outre, je trouve que l'espace cupé par l'atomare de toutes les trigonoïdes est = 4; et que les vibrations loriques des métalloïdes (solides ou liquides) sont transversales aux longeurs s atomes. — Les atomes des métaux lourds (Fe, Pt, etc., pas Pb) oscillent mme les atomes des gas, dans toutes les directions.

Pour le détail sur l'*atostère* des éléments et de leurs combinaisons, le point *fusion* et d'*ébullition*, il faut renvoyer le lecteur à l'ouvrage allemand. La rrespondance des *genres* d'éléments avec les *séries* organiques indique suffimment que toutes ces propriétés des éléments et des combinaisons sont des nctions mathématiques de la constitution mécanique des atomes.

Les *équivalents de réfraction* de M. A. Schrauf, de Vienne, divisé par le ombre d'atomares des atomes des éléments, nous donnent le pouvoir réfractif 'un atomare. Ces valeurs sont pour les gas: H = 1.000, Cl = 1.001, N = 1.045, P = 1.069, As = 1.012, O = 0.985; moyen 1.014, ou toutes gales!

Concernant les *lignes spectrales*, il faut renvoyer à l'atomécanique et à es mémoires dans le Journal Américain des Sciences, de Silliman, 1864, vol. 8, pp. 31—40,*) et 1866, vol. 42, pp. 350—368, où ces lignes sont démonrées équidistantes et d'avoir la même distance mutuelle; pour les Calcoïdes, Ig, Ca, Sr, Ba, cette distance étant 0.0000016 millimètre de longeur d'onde.

SECTION IV. — §§. 229 — 400.
LES PROPRIÉTÉS MORPHOLOGIQUES.

Cette section de l'ouvrage donne la première théorie *mécanique* des formes istallines.**) Il faudra donc faire connaître ici ma méthode en général et ussi quelques-uns des résultats relatifs aux cas les plus difficiles: celui du oxyde de titane et du carbonate de chaux.

Ma méthode n'est autre que celle de toute la science moderne, celle des pproximations Successives. C'est la méthode du calcul supérieur

*) Cosmos, 1865, vol. 25, pp. 269—270.

**) Les travaux intéressants de M. Gaudin sont purement géométriques.

— celle de l'astronomie mécanique*) — celle de la physique mathématique**) — et c'est aussi la méthode de ma *cristallogie mécanique* exposée dans cette section de l'atomécanique.

D'abord je ne considère ici les atomes des éléments que comme des pointes matérielles égales; cela me donne l'approximation première, la *forme cristalline normale*. De celle-ci s'obtient la *forme actuelle* par la considération des déviations particulières de ces atomes des susdits pointes matérielles.

Soit a l'axe vertical, $b = 1$ et c les axes horizontaux de la *forme normale*; x, y, z de petites quantités données par la figure connue des atomes élémentaires [voyez Sect. I], la *forme actuelle* aura les axes $X:Y:Z = a+x : 1+y : c+z$.

La forme normale des éléments, dont la formule chimique est A, j'appelle le *Protoïd* [§§. 256—264]; celle de la combinaison binaire AB s'appelle le *Deutoïd*; celle de AB_2 le *Tritoïd*, etc.; celle de AB_3C, le *Deltoïd* [comprenant les carbonates, etc.]; AB_4C, le *Rhomboïd* [sulfate, spinelle].

Les systémes cristallins ont donc beaucoup d'arbitraire. La valeur scientifique de ces systémes est précisée dans les chap. 239—255 par une représentation graphique des formes observées, par des données statistiques des formes minérales, par des formes convergentes, etc. Les systèmes minéraux basés sur les systèmes cristallins n'ont donc aucun fondement réel; le „Système de Minéralogie" de M. Dana est précisément aussi naturel que le système botanique de Linné.

Les trois pointes matérielles représentées par les trois atomes du *Tritoïde* AB_2 (chap. 302—358) forment nécessairement un triangle régulier dont les axes rectangulaires seront $b:c = 1:\sqrt{3}$. L'axe *a* est déterminé par l'agrégation; donc, ou $a = b = 1$ ou $a = c = 1.73205$, le volume a b c restant le même.

---

*) Les approximations successives en astronomie sont bien connues pour les mouvements des corps célestes dans le *vide*. Après ces approximations viennent celles dépendantes de la *résistance du milieu cosmique*. M. Encke a démontré qu'il faut avoir égard à cette influence pour les comètes; moi, j'ai démontré que cette résistance est très considérable pour les planètes elles-mêmes, et qu'une partie du mouvement perdue par cette résistance est transformée en magnétisme; que les anneaux générateurs des planètes consécutives se sont séparés du corps central après des intervalles de temps égaux, comme si cette évolution eut été un mouvement ondulatoire de la grande nébulense primaire! L'âge des planètes, à partir de Mercure, est donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. Le problème est à peu près le même que celui-ci: Donnez un système de corps, leur vélocité, masse, etc., tombant dans un milieu résistant; à déterminer leur temps de chute et leur position primaire. Voyez „Sur la densité, la rotation et l'âge relatif des planètes," Journal Américain des Sciences, New Haven 1864, t. 37, pp. 36—56; „Introduction aux Principes de la Planétologie," même journal, 1865, t. 39, pp. 46—58, 134—150, 276—286; t. 40, p. 131. Aussi: „La loi vraie des distances planétaires," Festschrift der Naturforschenden Gesellschaft. Emden, 1864. Les naturalistes scandinaves à Copenhague, 1860, Transactions, p. 455.

**) „Le Magnétisme terrestre résultant du mouvement de la terre dans l'éther," par G. Hinrichs, Copenhague, 1860. — Dans tous ces ouvrages il faut entendre par éther quelque chose de matérielle remplissant l'espace céleste, etc.; c'est-à-dire un milieu résistant. Les calculs sont donnés dans la seconde partie de ce mémoire allemand. L'influence des continents sur la distribution de la force magnétique de la terre est aussi apparente que l'influence sur la température.

La forme normale du tritoïd sera donc ou I, $a:b:c = 1:1:1.7325$, ou II, $a:b:c = 1.73205:1:1.73205 = 1:0.57735:1$. Comme des exemples de formes observées, je donne les valeurs numériques des déviations x, y, z pour le minéral le plus difficile, le bioxyde de titane:

Forme normale I—1:1:1.7325.			
Déviations	x	y	z
Cristal de roche	+0.0999	0	0
Anatase	0	0+0.0451	
Brookite	+0.0078	+0.0064	0

Forme normale II—1:0.57735:1			
Déviations	x	y	z
Zircon	0	+0.0633	0
Rutile	0	+0.0668	0
Cassitérite . . .	0	+0.0950	0

Oo voit que tous ces cristaux, aujourd'hui considérés incompatibles, ne sont actuellement que des modifications quantitatives bien légères des formes normales ou théoriques; entre les „isomorphes" rutile et cassitérite, il y a la différence 0.03; du zircon à la normale il n'y a que le double, 0.06. Pour le brookite*), la déviation n'est que de sept millimètres sur un cristal d'un mètre. On trouvera le détail dans l'ouvrage allemand.

L'équateur du *Deltoïd* AB_3C [section II] étant formé de trois pointes matérielles, il sera encore un triangle régulier ayant $b:c = 1:\sqrt{3} = 1:1.73205$. Les deux atomes B sont mécaniquement égaux aux troisième B dans l'axe Z; donc la section verticale de XZ contient ABCB, ou quatre pointes, dont la forme normale sera le quadrat, ou $a = c$. Par réduction à des axes hexagonales, on trouvera le *rhomboèdre de* 104° 20′ comme la forme *deltoïde*. Les formes observées sont: Calcite, CaO_3C, rhomboèdre de 105° 5′; smithsonite, ZnO_3C, rhomboèdre de 107° 40′. La différence de ces deux formes considérées „*isomorphes*" par toutes les crystallographes est de 155 minutes; le calcite ne diffère du deltoïd normal que de 36′! Pour la détermination théorique de ces déviations il faut renvoyer le lecteur à l'ouvrage allemand, où l'on trouvera en outre les relations des volumes, des formes aragonites, des *silicates* RO_3Si. L'augite et l'amphibole ne sont que des modifications de dimorphie.

Des *Rhomboïds* AB_4C on y verra déterminé: les sulfates, spinelles [y compris le diaspore] et *la grande famille d'espèces minérales ayant un nucléus spinelloïde*, comprenant l'alum, le leucite, les feldspath, les zéolithes [chap. 359—380].

Les apatites sont des *sels doubles* de la forme $A'B'_3$.

Des propriétés physiques des cristaux je donne la détermination théorique de la *surface d'élasticité*, jusqu'à présent une donnée empirique. La cause de la polarisation rotatoire du cristal de roche est reconnue dans la forme normale (chap. 381—399).

En conclusion (chap. 400) je renouvelle la déclaration qu'il ne faut considérer mon ouvrage que le *Programme* de l'atomécanique; c'est aux savants de faire la *science* de l'atomécanique.

Les plus de douze années de travail m'ont convaincu que cette science se fera, *tôt* ou tard; enfin que le *panatome* peut être regardé ce point matériel

. . . . da quel punto
Depende il Ciel e tutte la Natura.
Dante, *Parad. XXVIII*, 41.

---

*) La forme fondamentale est le plan $e = P2$ de M. de Kokscharow, au lieu de $o = P$ adopté par lui. Mais e résultant de mes calculations est évidemment la fondamentale, comme on le verra en examinant les figures de Brookite, donnés par ce minéralogue distingué dans ses beaux *Matériaux pour la Minéralogie de l'Russie*. (e n'y manque jamais, et y domine souvent.)

La science moderne reçoit le moindre fait comme un don précieux; elle ne peut donc ignorer un fait aussi grave que celui que j'ai tenté de communiquer dans ces pages: c'est que l'hypothèse d'un seul élément *suffit* pour rendre compte de la diversité de la matière en nous donnant les propriétés chimiques, physiques et morphologiques des corps comme de simples conséquences mécaniques du Pantogène.

Quelle sera la réception de cette théorie? Je ne le sais pas. Mais je sais que pendant les douze années de travail j'ai eu bien des occasions pour apprécier toute la vérité consolante du grand mot de notre maitre commun:

E PUR SI MUOVE!

NOTICE HISTORIQUE.

La découverte du pantogène date du commencement de l'année 1855. J'étudiais alors à l'école polytechnique de Copenhague, école fondée par H. C. Œrsted et alors dirigée par le chimiste distingué G. Forchhammer.

En 1856 et 1857, je communiquais une notice sur l'atomécanique à divers savants et académies de l'Europe. Dans mes mémoires, publiés de 1860 jusqu'à 1866, je suis souvent revenu sur ce sujet. L'atomécanique, dont ceci est le resumé, fut imprimé pendant les mois de mai et de juin 1867.

Il paraît que M. A. Krönig a publié en 1863 quelques-unes de mes idées qui lui furent confiés, en 1857, pour la Société de physique de Berlin, dont il était le secrétaire; voyez p. 3 de l'Atomécanique.

Monsieur James D. Dana, rédacteur du Journal américain des Sciences, vient de publier dans les cahiers de juillet et de septembre de son journal deux mémoires qui offrent quelques coïncidences avec le contenu de deux de mes mémoires, qui lui étaient confiés pendant le cours de mars, d'avril et de mai 1867. — Le premier de mes mémoires donnait la constitution mécanique des sels telle qu'on la trouve à present dans §. 109 de l'Atomécanique; et j'en déduis la forme cristalline des sels en général et des carbonates en détail. Dans le premier des mémoires de M. Dana, il proclame l'influence formative du nombre d'atomes d'oxygène; c'est-à-dire, il présent, au public le résultat (légèrement modifié) de mon travail, qu'il tenait dans les mains quatre mois auparavant, substituant toutefois au lieu de mes déductions mécaniques des songes sur les états multiples des éléments et sur les systèmes cristallographiques. Dans le second mémoire, M. Dana présente la constitution des sels comme je l'avais figuré dans mon premier mémoire qu'il tenait en mars; la formule qu'il donne pour les sels simples est identique avec la mienne (voyez ce résumé ou l'Atomécanique), sauf l'encre usitée pour les barres verticales aux deux côtés du symbole O. — M. Dana a bien voulu avouer qu'il y a des coincidences; mais il les dit: „des conséquences des actions indépendantes dans des esprits indépendants (lettre d'août 6)." Les lettres de M. Dana publiées plus tard dans le *Journal of Mining* n'ont pas désapprouvé le fait que M. Dana eut connaissance du contenu de mes mémoires, qu'il refusa d'inserer dans son journal, en me conseillant d'attendre „dix années" encore. En même temps, ces lettres ont prouvé que M. Dana a discuté ses mémoires avec le même aide qu'il avait chargé d'examiner les détails de mes manuscrits. S'il le faut, les lettres échangées sur ce sujet seront publiées; elles renferment assez de détails sur le contenu des mémoires eux-mêmes.

Vue la connaissance qu'avait M. Dana du contenu de mes mémoires, on me permettra d'avouer que „l'action indépendante" dont parle M. Dana me paraît un peu obscure. — Toutefois je ne veux prononcer aucun doute sur les intentions de M. Dana: je ne réclame que le droit de publier ces faits concernant l'histoire de l'Atomécanique. Peut-être M. Dana a-t-il suivi la maxime exprimée dans sa lettre d'août 5: „peu m'importe qui énonce (brings out) des idées nouvelles, pourvu qu'elles soient énoncées." C'est assez de libéralité, assurément, même pour le rédacteur d'un journal scientifique au dix-neuvième siècle. C'est aux savants d'en juger.

Wegen des Werkes selbst wendet man sich am Besten an Herrn Dr. Flügel, amerikanischen Consul in Leipzig. G.

Literarischer Bericht
CLXXXX.

Simon Plössl.

Es gehört zu den lichten Seiten der Neuzeit, dass sie die Verdienste der ausgezeichneten Mechaniker und Optiker neben denen der Naturforscher vom Fach setzt und dass sie jede treffliche Leistung, sie komme von welcher Seite immer, würdigt und anerkennt. Es wird daher auch die Leser des mathematisch-physikalischen Archivs interessiren, einiges über das Leben und Wirken des vor Kurzem gestorbenen, weit berufenen Optikers Plössl zu vernehmen:

Simon Plössl wurde am 19. September 1794 zu Wien geboren. Sein Vater, ein Tischler, hielt den Knaben, sobald er das sechste Lebensjahr erreicht hatte, zur Schule an und gab ihn später zu einem Drechsler in die Lehre, wo er bis zu seinem 18. Jahre blieb. In diesem Alter kam er (1812) in das optische Atelier von F. Voigtländer in Wien. Hier hatte er Gelegenheit, in Fülle die praktische Seite der Optik und der damit verbundenen Mechanik kennen zu lernen und zu üben. Er that beides in so vorzüglichem Grade und verrieth hiebei so viel Auffassung, Selbstständigkeit und Gewandtheit, dass er allmälig der faktische Leiter des Voigtländer'schen Geschäftes wurde und die Aufmerksamkeit des damaligen Directors der Wiener Sternwarte Edeln v. Littrow's sowie des Botanikers, des Freiherrn v. Jacquin, auf sich lenkte. Beide ermunterten ihn, sich zu etabliren. Er folgte ihrem Rathe im Jahre 1823 und blieb von da an in steter Berührung mit diesen Gelehrten. Er hörte ihre Vorlesungen und ergänzte durch den angestrengtesten Fleiss seine mangelhafte Schulbildung, wobei er auf die mit seinem Fache zusammenhän-

genden mathematischen Disciplinen eine solche Kraft verwendete, dass er eine strenge, private Prüfung an der Wiener Hochschule mit Ehren bestand.

Ausgerüstet mit praktischen Fertigkeiten, theoretischem Wissen und den Rathschlägen zweier grosser Fachmänner; ferner begabt mit einem erfinderischen Talente und einem energischen Wollen brachte er es um das Jahr 1830 dahin, dass die von ihm verfertigten zusammengesetzten Mikroskope von der Versammlung deutscher Naturforscher den Preis vor allen anderen erhielten. Schon etwas früher hatten die von Plössl erdachten und zuerst angefertigten aplanatischen Loupen die Aufmerksamkeit der Naturforscher erregt und die rascheste Verbreitung und Nachahmung gefunden.

Bis zum Jahre 1829 hatten Frankreich und Jtalien den Vorrang in der Anfertigung aplanatischer Mikroskope und selbst Fraunhofer vermochte hierin Chevalier in Paris und Amici in Modena nicht zu erreichen. Dies gelang erst dem Nachfolger Fraunhofer's, Georg Merz in München, im Jahre 1829 und bald darauf Simon Plössl in Wien, dessen Mikroskope um jene Zeit alle anderen in der optischen Wirkung übertrafen. Plössl's Mikroskope zeichneten sich gleich anfangs durch eine bedeutende Helligkeit und mächtige Schärfe aus und diese Eigenschaften behielten sie, in mannigfacher Weise gesteigert, bis in die neueste Zeit, wenn sich auch nicht läugnen lässt, dass zuletzt Plössl's Leistungen auf diesem Gebiete erreicht und von Hartnack in Paris und noch einigen Wenigen in Deutschland und England überflügelt wurden, besonders in jenen Theilen, welche die Mechanik des Instrumentes betreffen.

Plössl folgte allen Verbesserungen im Wesen der Mikroskope, wenn er auch im äusseren Bau derselben wenig aufnahm. Er war einer der ersten, welcher das Mikroskop mit einem bildumkehrenden Okular versah (1843), und um die Objecte zu elektrisiren, gab er seinen grösseren Instrumenten, wenn es gewünscht wurde, einen Universalentlader der Elektricität bei, welcher im Wesentlichen wie der allgemeine elektrische Entlader construirt, jedoch in sehr verkleinertem Maasstabe ausgeführt war. Auch an die sehr mühsame Anfertigung aplanatischer Objective aus Bergkrystall und Flintglas war Plössl der erste gegangen, weil er hoffte, das geringere Dispersionsvermögen des Bergkrystalles verglichen mit jenem des Kronglases werde ihm grosse Vortheile bei der Herstellung des Aplanatismus bieten. Er hat jedoch diesen Gegenstand später wieder aufgegeben, wahrscheinlich wegen der schwierigen Eliminirung der Doppelbrechung beim Bergkrystall.

Hatte es Plössl durch sein hohes Verständniss und durch eine grosse Geschicklichkeit dahin gebracht, an die Spitze der Mikroskopen-Verfertiger zu treten und einer der ersten in der Reihe derselben allzeit zu bleiben; so war er anderseits in der Anfertigung vorzüglicher Fernrohre auch nicht zurück geblieben.

Schon vor Anfange dieses Jahrhundertes verfertigten Gregory und Wright in London fabriksmässig billige, leichte und achromatische Taschen-Perspective von nahezu einer deutschen Meile Tragweite, mit einem nicht zu kleinen Gesichtsfelde, mit bedeutender Schärfe und mit einem festen und zwei übereinander zu schiebenden Ocularen, wodurch viererlei Vergrösserungen, $1\frac{1}{2}$, 4, 6 und 8 linear, erzielt wurden. Etwas später traten die Nachfolger Dollond's und Ramsden's mit ähnlichen, noch einfacheren, kleineren, leichteren und achromatischen „Feldstechern" auf, welche gewöhnlich eine zwei- bis viermalige lineare Vergrösserung boten, und eine weite Verbreitung errangen. Neben ihnen leistete der Wiener Optiker Schweigger auf demselben Gebiete Erkleckliches. Um das Jahr 1830 lieferte Plössl ähnliche „Feldstecher", welche aber die Leistungen der vorhin genannten und umsomehr aller anderen Optiker nach jeder Richtung weit hinter sich liessen.

Die Zug-Feldstecher Plössl's jener Zeit besassen ein Objectiv von 1 Zoll Oeffnung, 3 Oculare revolverartig zum Verstellen, wodurch eine 4-, 8-, 12malige lineare Vergrösserung bewirkt werden konnte. Wenn eines dieser Instrumente mittelst eines Schraubenringes festgestellt und die stärkste Vergrösserung hergestellt wurde, so vermochte man den Jupiter sammt seinen Trabanten und sogar einige Doppelsterne scharf und höchst rein wahrzunehmen. Plössl steigerte mit der Zeit die Güte seiner berühmt gewordenen „Feldstecher" und die besten Instrumente dieser Art zeigten zuletzt ein achromatisches Objectiv von 19 Linien Oeffnung, ein vierfaches Revolver-Ocular für lineare Vergrösserungen von 4, 8, 13 und 20.

Im Jahre 1832 wurden die ersten „dialytischen Fernrohre" von Plössl nach der Erfindung von Littrow's angefertigt. Dieselben erregten durch ihre Schärfe und Lichtstärke einerseits und durch ihre Kürze und verhältnissmässige Billigkeit anderseits in den Fachkreisen Aufsehen. Diese Vortheile wurden im Wesentlichen durch die Trennung, Zurückstellung und daher Verkleinerung der das Crownglas-Objectiv corrigirenden Flintglaslinse erworben. Plössl übertrug dieses

Princip auch auf die „Stand-Fernröhre“, mit welchen er einige der vorzüglichsten Sternwarten ausrüstete.

Obwol Plössl einen Weltruf erworben hatte, verschmähte er dennoch nicht kleinere optische Objecte anzufertigen. Die einfachste Brille war ihm ebenso wichtig, wie der mächtigste Refractor, und er lieferte selbst die gewöhnlichsten optischen Gegenstände in ungewöhnlicher Vortrefflichkeit. Und daher kam es auch, dass er, obschon am äussersten Ende der Vorstadt Wieden wohnend, selbst von Laien behufs des Ankaufs optischer Instrumente aufgesucht wurde. Er war eben in allen seinen optischen Arbeiten vorzüglich und vollkommen verlässlich. Kein Instrument verliess ungeprüft seine Werkstätte.

Plössl gab zwar seinem Geschäft nie eine fabriksmässige Ausdehnung; er erwarb aber dennoch, wenn auch etwas langsamer, ein grosses Vermögen. Er blieb stets seiner einfachen Lebensweise getreu. Vom frühen Morgen bis zum späten Abend konnte man ihn bei der Zusammensetzung der grösseren optischen Instrumente in seiner Stube treffen und die heiteren, kalten Nächte verbrachte er grösstentheils mit der Erprobung seiner Fernröhre mittelst des gestirnten Himmels. Erst überermüdet suchte er seine Schlafstelle. Der Mann, welcher 3 grössere Häuser in Wien und 3 Landhäuser in Rodaun als Eigenthum besass — begnügte sich mit einem kleinen Ruhekämmerchen. Es wäre jedoch gefehlt, daraus schliessen zu wollen, als wäre Plössl etwa geizig gewesen. In seinen Häusern waren die Wohnungen am billigsten, und zu einer Zeit, wo die Steigerung der Miethe in Wien allgemein geworden war, blieb er fast allein bei den alten Preisen. Nicht minder zufrieden als seine Wohnungen-Partheien waren seine Gehilfen mit seinem zwar verschlossenen, aber höchst friedfertigen und wohlwollenden Charakter. Man traf in seinem Atelier fast lauter Veteranen und darunter den Werkführer Ebner mit 40 Jahren Dienstzeit!

Interessant war es, den Verkehr des Meisters mit dem letzteren zu belauschen. Plössl war nämlich schwerhörig, nahezu taub. Während es nun dem Fremden, selbst wenn er schrie, fast unmöglich wurde, sich mit Plössl zu verständigen, brauchte der Geschäftsführer in seiner gewöhnlichen Sprechweise gar nichts zu ändern; Plössl las ihm die Rede von den Lippen ab. Der alte Werkführer ist der Ansicht, dass die Taubheit Plössl's nicht wenig dazu beigetragen habe, dass seine optischen Werke so vorzüglich geworden, indem ihn nichts in seinem Sinnen und Thun zu stören vermochte! Die Schweigsamkeit und Wortkargheit Plössl's mag sich wohl auch daraus erklären.

In seinem Familienleben erlitt Plössl durch den frühen Tod seines 21jährigen, äusserst talentirten Sohnes einen harten Schlag. Dieser Verlust traf auch zum Theil die Gesellschaft, da der junge Optiker sehr Bedeutendes zu leisten versprach. Plössl ertrug sein Unglück mit Ergebung, und nicht wenig mochten ihn seine wackere Hausfrau, sowie seine einzige Tochter in jener traurigen Zeit trösten und sein Wirken. Unermüdet war Plössl thätig, und bei der Arbeit, seinem Lebenselemente, sollte er — sterben.

In den letzten Tagen des diesjährigen Jänners nahm Plössl eine Scheibe optischen Glases aus den oberen Fächern eines Kastens. Ein zweites an jener Glasplatte haftendes Glasstück löste sich unversehens ab und verwundete Plössl an dem rechten Unterarm sehr bedeutend. Nachdem es vorläufig geglückt war, die mächtige Blutung zu stillen und den Verwundeten zu Bette zu bringen, fanden die herbeigeholten Aerzte ersten Ranges behufs Anlegung eines besseren Verbandes eine Umlegung des Patienten in ein bequemer gestelltes Bett nothwendig. Plössl wies jede fremde Hilfe bei diesem zu bewerkstelligenden Uebergang von sich. Und indem er sich mit der verwundeten Hand auf das Bett stützte, barst der Verband; eine zweite, mächtige Blutung trat ein, der man die spätere Verschlimmerung des verwundeten Armes und — den Tod zuschreibt, welcher am 29. Jänner d. J. um 12 Uhr Mittags erfolgte.

Plössl starb im 74. Jahre seines an Arbeit und fachlichem Ruhm so reichen Lebens! Da er nach äusseren Auszeichnungen nicht strebte, so blieben sie auch aus. Nur im Jahre 1847 wurde er vom Kaiser Ferdinand mit der grossen goldenen Medaille für Kunst und Wissenschaft beehrt; aber sein Name fehlt selbst in den deutschen Conversations-Wörterbüchern! Hoffen wir, dass wenigstens der letzte Fehler gut gemacht wird.

Plössl ist todt und verödet liegt die berühmte optische Stätte seines Wirkens. Seit dem Tode seines Sohnes hatte Plössl allein die höhere Leitung seines Geschäftes übernommen. Sein Schwiegersohn Herr Dr. Fleckenstein lebt dem ärztlichen Berufe und Plössl vermied es, einen Fremden in seiner Kunst zu unterrichten und ihm die Weihe der Meisterschaft zu verleihen. So stehen denn Mikroskope und Fernröhre aller Art halbvollendet und auch nahezu ganz vollendet da, darunter ein fast fertiges parallaktisches 11 zölliges Fernrohr von sehr hohem Werthe, und beklagen mit der Welt den Abgang des Meisters.

Pisko.

Josef Georg Böhm.

(Den nachfolgenden Necrolog dieses jüngst verstorbenen mehrfach verdienten Astronomen und Mathematikers theilen wir aus der „Prager **Bohemia** vom 27. und 29. Jänner 1868" unseren Lesern mit. G.)

Die hiesige Universität hat einen schweren Verlust erlitten. Gestern um 1 Uhr Früh starb nach kurzem Krankenlager an Lungentuberculose der k. k. Professor der Astronomie, zugleich Director der hiesigen Sternwarte, Herr Dr. Josef Georg Böhm, welcher durch Erfindungen und Schriften auch ausserhalb Prag's in weiteren Kreisen bekannt geworden ist. Der Verblichene war am 28. März 1807 in Roždialowitz (Bez. Libaň) geboren, stand daher im 61. Lebensjahre. Sein Vater, Josef Böhm, war Oberamtmann auf der gräfl. Cavriani'schen Herrschaft Dimokur (Bezirk Königstadtl im Jičiner Kreise). Der Sohn besuchte in Prag das Gymnasium, wo er mit allem Eifer den Wissenschaften huldigte, dann trat er in das Seminar ein, sich der Theologie zu widmen. Sein Streben war, so viel Wissen als möglich zu erwerben, doch fesselten ihn vorzugsweise die Vorträge über Mathematik, Physik und Astronomie. Er fand an diesen Wissenschaften so viel Gefallen, dass er dem Seminar Valet sagte, hingegen die Hörsäle der philosophischen Facultät frequentirte. Nach Ablauf seiner Studienzeit und Zurücklegung der vorgeschriebenen Examina wurde er in Prag zum Doctor der Philosophie promovirt. Bald nachher erhielt er eine Anstellung als Assistent des Directors der Wiener Sternwarte. Später wurde er in gleicher Eigenschaft an die im Jahre 1816 erbaute Sternwarte auf dem Blocksberge bei Ofen in Ungarn übersetzt. In diesem mit den trefflichsten Instrumenten ausgestatteten Institute wirkte Dr. Böhm mehrere Jahre, bis er als supplirender Professor der Mathematik an die damals bestandene Universität in Salzburg berufen wurde. 1839 erfolgte seine Ernennung zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Universität in Innsbruck. Dort wurde er im Jahre 1848 zum Rector Magnificus gewählt. Im demselben Jahre pochte der Krieg an die Grenzmarken Tirols. Die Landesvertheidigung wurde organisirt; Alles, was Waffen tragen konnte, auch die Studenten und Professoren, zogen in's Feld. Professor Böhm stand bei dieser denkwürdigen Vertheidigung in erster Reihe. Er kommandirte als Hauptmann die zweite Innsbrucker Studenten-Compagnie, stieg mit ihr in die lombardische Ebene herab, ging selbst zur Offensive über und gab überall solche Proben persönlicher Tapferkeit, dass ihm die Tiroler Tapferkeitsmedaille vom Jahre

1848 und die grosse k. k. Civil-Verdienstmedaille mit der Kette verliehen wurde. Als friedliche Zustände sich wieder eingestellt hatten, kehrte er auf seine Lehrkanzel zurück und docirte die Mathematik nach wie vor. Auch entfaltete er als Landesschulrath eine segensvolle Thätigkeit. Im März 1852 ernannte ihn Se. Majestät der Kaiser zum Director der Prager Sternwarte und ordentlichen Professor der theoretischen, sowie der praktischen Astronomie an der Prager Universität. Diese Stellung hatte Professor Böhm bis zu seinem Tode inne. Während er sie bekleidete, wurde er für das Jahr 1856 zum Decan des philosophischen Professoren- und für das Jahr 1858 zum Decan des philosophischen Doctoren-Collegiums gewählt. Still und geräuschlos entwickelte Professor Böhm in Prag eine fruchtbare Thätigkeit. Er that, was in seinen Kräften stand, zum Aufblühen des ihm anvertrauten Institutes. Ein äusseres Zeichen seiner Thätigkeit geben die von ihm verfassten Schriften, unter denen einer besonderen Erwähnung werth sind: „Beschreibung des Uranoskops“ (der „Uranoskop“ ist ein von Böhm erfundener Himmelsglobus zur besseren Auffindung aller Sterne), dann „Logarithmisches Handbuch“, einige Abhandlungen über Sonnenflecken, über Sternschnuppen, über die Quecksilbercompensation bei Uhren, über das Ozon in der Luft u. s. w. Sein Hauptwerk sind seine „Ballistischen Versuche und Studien“, welche von E. Tardieu im Jahre 1863 auch in das Französische übersetzt wurden. Aus Anlass dieser Versuche und Studien, welche im Kriegsministerium aufmerksam geprüft wurden, ward Professor Böhm im Jahre 1862 mit dem Ritterkreuze des Franz Josephs-Ordens decorirt. Es ist dies nicht der einzige Orden, den er besass. Auch mit dem königlich dänischen Danebrog-Orden war Böhm geschmückt (er hatte ein Manuscript von Tycho de Brahe photographirt und nach Kopenhagen geschickt), dann mit dem k. sächsischen Albrechts-Orden; er besass ferner die dänische goldene Verdienstmedaille, die k. sächsische grosse silberne landwirthschaftliche Medaille (die er als Secretär und Geschäftsleiter der landwirthschaftlichen Gesellschaft in Innsbruck erworben hatte), und seit Kurzem auch die grosse goldene Medaille für Kunst und Wissenschaft. (Die kleine war ihm schon früher verliehen worden.). Selbstverständlich war Professor Böhm auch Mitglied mehrer gelehrter Gesellschaften, so z. B. ausserordentliches Mitglied der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften und wirkliches Mitglied der Carolinisch-Leopoldinischen Akademie der Naturforscher, die jetzt in Dresden ihren Sitz hat, und der Akademie der Wissenschaften in Arezzo. — Er hinterlässt zwei Söhne, von denen der eine, Joseph,

freiherrlich Rothschild'scher Bergbau-Assistent in Witkowitz bei Mähr.-Ostrau, der andere, August, k. k. Forstadjunkt ist.

Es ist nicht ohne Interesse, dass zwei unserer österreichischen Astronomen in denselben Nächten geboren wurden, in welchen durch Entdeckung neuer Planeten die Sternkunde bereichert wurde. J. J. v. Littrow, der berühmte Director der Wiener Sternwarte, wurde in der Nacht vom 13. März 1781 geboren; in derselben Nacht entdeckte Herschel den Planeten Uranus; — und Dr. Josef Böhm, der Director der hiesigen Sternwarte, welcher heute zu Grabe getragen wird, war in der Nacht vom 28. und 29. März 1807 geboren, derselben Nacht, in welcher Olbers den Planeten Vesta entdeckte. (Wie Director Böhm, war auch Littrow aus Böhmen gebürtig, ersterer aus Rożdialowitz, letzterer aus Bischofteinitz.)

Auf seiner Besitzung Allerley House bei Melrose in Schottland starb, 86 Jahre alt, im Februar 1868

Sir David Brewster,

geboren nicht weit von dem Orte seines Todes, in Jedburgh am 11. December 1781. (Vorläufige aus den Zeitungen entlehnte Nachricht. Wir wünschen aber sehr von irgend einer Seite her bald in den Stand gesetzt zu werden, unseren Lesern einen ausführlicheren authentischen Necrolog des jüngst verstorbenen grossen schottischen Physikers mittheilen zu können.) G.

Am 20sten December 1867 starb in Petersburg nach kurzer Krankheit im 67. Lebensjahre

L. F. Kaemtz,

in den letzten Jahren Director des physikalischen Central-Observatoriums daselbst.

Arithmetik.

Untersuchungen, besonders in Bezug auf relative Primzahlen, primitive und secundäre Wurzeln, quadratische Reste und Nichtreste; nebst Berechnung der kleinsten primitiven Wurzeln von allen Primzahlen zwischen 1 und 1000 von F. W. A. Heime, Oberlehrer

an der Königstädtischen Realschule. Berlin 1868. Verlag der Königstädtischen Schulbuchhandlung. 4°.

Wir glauben diese im Ganzen völlig elementar gehaltene und — was bei solchen wohl namentlich auch mit auf die Zwecke des Unterrichts berechneten Schriften uns immer Anerkennung zu verdienen scheint — ohne Einführung vieler neuen Bezeichnungen, in und durch sich selbst verständliche Schrift der Beachtung der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten empfehlen zu dürfen, da sie — bei grösstentheils eigenthümlicher Entwickelung — uns namentlich auch Vieles zu enthalten scheint, was sich bei'm Unterrichte in der Arithmetik vortheilhaft und zweckmässig verwerthen lässt. Hier müssen wir uns mit der Angabe des Hauptinhalts begnügen: §. 1. Relative Primzahlen. — §. 2. $1a$, $2a$, $3a$, ... $(c-1)a$. — §. 3. Primitive und secundäre Wurzeln. — §. 4. Quadratische Reste und Nichtreste. 1^2, 2^2, 3^2, ... $(c')^2$, ... $(c-1)^2$. — §. 5. Der Satz der Reciprocität und seine Anwendung. — §. 6. Berechnung der kleinsten primitiven Wurzeln von allen Primzahlen zwischen 1 und 1000.

Mathematische Sophismen. Herausgegeben von Johann Viola. J. R. Zweite vermehrte Auflage. Wien. C. Gerold's Sohn. 1865.

Jeder Leser weiss, wie leicht Anfänger in manchen Fällen, besonders häufig z. B., um nur einen Fall hier zu erwähnen, bei Vergleichungen rücksichtlich des Grösseren und Kleineren, wenn namentlich positive und negative Grössen concurriren, sich zu Fehlschlüssen verleiten lassen. Eine grössere Anzahl solcher Fälle, wo — natürlich nur im Bereich der Elemente — Fehl- oder Trugschlüsse leicht möglich sind, hat der Herr Verfasser in dem vorliegenden verdienstlichen Schriftchen gesammelt. Die richtigen Schlüsse sind nicht gegeben, vielmehr ist die Aufdeckung der Fehlschlüsse und ihrer Gründe, zugleich also deren Widerlegung, den Schülern zu ihrer Uebung und Warnung überlassen. Insofern hat das Schriftchen, zu dessen Kenntniss wir leider erst jetzt gelangt sind, allerdings einen pädagogischen und didaktischen Werth, und darf namentlich Lehrern zur Beachtung und Benutzung bei'm Unterrichte empfohlen werden. — Die erste uns nicht bekannt gewordene Auflage ist im Jahre 1849 erschienen.

Geometrie.

Chr. Huygens: De circuli magnitudine inventa. Als ein Beitrag zur „Lehre vom Kreise" für die Lehrbücher elementar entwickelt von H. Kiessling. Flensburg. Th. Herzbruch. 1868. 4°.

Es war gewiss ein sehr guter Gedanke des Herrn Verfassers dieses verdienstlichen Schulprogramms, die Schrift von Chr. Huygens: „De circuli magnitudine inventa. Lugd. Batav. 1654.", die der berühmte Geometer in seinem 25. Lebensjahre verfasste, darin abdrucken zu lassen, und auf diese Weise den Lehrern der Mathematik zugänglich zu machen, da die in dieser Schrift gegebenen schönen Sätze, durch welche die Berechnung des Verhältnisses des Durchmessers zum Umkreise wesentlich abgekürzt wird, gewiss sehr verdienen, allgemeinen Eingang in den geometrischen Elementar-Unterricht zu finden, weshalb auch der unterzeichnete Herausgeber des Archivs denselben in der fünften Ausgabe seines „Lehrbuchs der ebenen Geometrie" ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und Beweise für sie gegeben hat. Jedenfalls muss es aber für jeden Lehrer der Mathematik interessant und wünschenswerth sein, die schöne Hugenische Schrift selbst zu besitzen; da dieselbe aber, wenn sie auch in dem zweiten Theile der „Opera varia" des berühmten niederländischen Geometers wieder abgedruckt ist, selten und schwer zu erhalten ist, so war dieser von Herrn Kiessling gelieferte sehr dankenswerthe neue Abdruck jedenfalls sehr verdienstlich und den Zwecken eines Schulprogrammes ganz besonders entsprechend. Herr Kiessling hat aber diesem Programm auch noch einen besonderen Werth dadurch verliehen, dass er in dem Eingange auf den ersten acht Seiten eigene einfache ganz elementare Beweise mehrerer Hugenischer Sätze geliefert hat, die der Beachtung recht sehr zu empfehlen sind.

Rücksichtlich der betreffenden Sätze selbst wollen wir noch bemerken, dass — wie auch Huygens in der Einleitung zu seiner Schrift selbst angiebt — diese Sätze von seinem gleichfalls berühmten Landsmanne Willebrord Snellius gefunden und in seinem „Cyclometricus. Lugd. Batav. 1621." mitgetheilt worden sind, so dass Huygens's Hauptverdienst deren Beweise sind. Indem wir schliesslich der Literatur wegen noch auf die sehr lehrreichen Entwickelungen und Bemerkungen Klügel's im „Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 650—S. 654." verweisen, schliessen wir mit dem Wunsche, ähnlichen lehrreichen

und ihrer eigentlichen Bestimmung besonders zweckmässig entsprechenden Schulprogrammen öfters zu begegnen. G.

Nautik.

Lehrbuch des terrestrischen Theils der Nautik von Dr. F. Paugger, k. k. Hydrograph und Professor an der Marine-Akademie in Fiume. Mit 69 in den Text gedruckten Holzschnitten und VIII lithographirten Tafeln. Triest. Wilhelm Essmann's Verlag. 1867. 8⁰.

Man weiss, dass die Nautik, deren Hauptaufgabe natürlich die Bestimmung des Orts des Schiffs auf der See zu jeder gegebenen Zeit ist, aus zwei Haupttheilen besteht: aus einem astronomischen und einem terrestrischen Theile; Compass und Log, in Verbindung mit der Uhr, sind die Instrumente, mit denen der Seemann hauptsächlich seine terrestrischen Messungen ausführt; hinzurechnen kann man noch das Loth und den Distanzmesser, welcher letztere hauptsächlich in neuerer Zeit zur Anwendung auch auf der See empfohlen worden ist, wobei wir namentlich an die schöne und sinnreiche Methode des um die wissenschaftliche und praktische Nautik schon so vielfach verdienten Herrn Prof. Schaub in Triest erinnern, Distanzen auf der See mittelst einer auf dem Schiffe selbst gemessenen Höhe als Basis zu bestimmen, über welche wir im Literar. Ber. Nr. CLVI. S. 10. bei Gelegenheit der Anzeige des zweiten Jahrgangs des „Almanachs der österreichischen Kriegsmarine. (1863.)" ausführlich referirt haben; die schöne, auch in mathematischer Rücksicht überaus lehrreiche, von der Beschreibung zweckdienlicher Instrumente (Objectiv-Mikrometer von Plössl) und ausführlichen Hülfstafeln begleitete Abhandlung in dem genannten Jahrgange des Almanachs hat den Titel: „Ueber die Bestimmung der Entfernungen auf der See. Von Dr. F. Schaub", und wird hier von uns absichtlich allen Seeleuten in Erinnerung gebracht und von Neuem zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen. — Ueber den astronomischen Theil der Nautik, die sogenannte nautische Astronomie, besitzt man, auch ausser den der gesammten Schifffahrtskunde gewidmeten Werken, schon eine ziemliche Anzahl besonderer Lehrbücher, unter denen wegen seiner Einfachheit und wissenschaftlichen Klarheit und Strenge, wegen seines wissenschaftlichen Geistes überhaupt, nach unserer innigsten Ueberzeugung der auch in unseren früheren Literarischen Berichten (Nr. LXXXV. S. 1. Nr. CXXXVIII. S. 15.) ausführlich

angezeigte „Leitfaden für den Unterricht in der Nautischen Astronomie. Von Dr. F. Schaub. Zweite Aufl. Wien. 1860" *) unbedingt eine der ersten Stellen einnimmt und von Neuem vorzüglich empfohlen zu werden verdient. Besondere Lehrbücher des terrestrischen Theils der Nautik giebt es dagegen unseres Wissens noch nicht, wenn auch natürlich alle Lehrbücher der Schifffahrtskunde diesem Theile der Nautik besondere Aufmerksamkeit widmen und seiner grossen Wichtigkeit wegen nothwendig widmen müssen. Das vorliegende Buch ist daher — so weit unsere Kenntniss der betreffenden Literatur reicht — das erste selbstständige Werk über den genannten wichtigen Theil der Nautik **), und wir haben deshalb von demselben mit besonderem Interesse nähere Kenntniss genommen. Als unser daraus gewonnenes Urtheil über dieses Buch können wir im Allgemeinen sagen, dass dasselbe seinem Zwecke im Ganzen gut entspricht und mit Sachkenntniss verfasst ist; dasselbe bespricht alle wichtigen Punkte, auch die so wichtige Schifffahrt auf dem grössten Kreise unter dem Namen der orthodromischen (im Gegensatz zu der loxodromischen) Schifffahrt; berücksichtigt überall sorgfältig das Praktische, wobei natürlich die Beschreibung der erforderlichen Instrumente und eingehende Erläuterungen über die See-

---

*) Auch in einer italienischen Uebersetzung erschienen, unter dem Titel: Guida allo studio dell' Astronomia nautica del Dr. F. Schaub. Trieste. 1856.

) Vielleicht ist es dem unterzeichneten Herausgeber des Archivs gestattet, bei dieser Gelegenheit an seine „Loxodromische Trigonometrie. Leipzig. 1849. 8°." und an deren von einem der verdientesten französischen Hydrographen, Herrn Professor P. Terquem in Dunkerque, unter dem Titel: „Éléments de Trigonométrie loxodromique, suivis d'applications à la Navigation d'après M. **J. A. Grunert, Membre correspondant de la Société Dunkerquoise, Professeur à l'Université de Greifswald. Par M. **Terquem**, Membre titulaire résidant. Dunkerque. 1859. 8°." veranstaltete französische Uebersetzung zu erinnern, da in dieser auch von Herrn Paugger im Vorwort kurz erwähnten Schrift eine vollständige Behandlung des terrestrischen Theils der Nautik, ganz mittelst der höheren Mathematik und lediglich vom mathematischen Gesichtspunkte aus, gegeben worden ist, wenn auch eben dieses vorherrschenden mathematischen Gesichtspunkts wegen diese Schrift natürlich nicht als ein eigentliches Lehrbuch der terrestrischen Nautik gelten soll und kann. Die Abhandlungen des Unterzeichneten im Archiv, Thl. XXXVII. S. 143. Thl. XXXII. S. 143. Thl. XXXVIII. S. 81., namentlich die über die Schifffahrt auf dem grössten Kreise, gehören auch hierher.

G.

karten nicht fehlen; und bedient sich durchgängig nur elementarer mathematischer Methoden, was in einem solchen Werke jedenfalls gleichfalls Anerkennung verdient, wenn auch freilich die Anwendung der Lehren und Vorstellungsweisen der höheren Mathematik in vielen Fällen kürzer zum Zweck führen und auch nur allein geeignet sind, die betreffenden Entwickelungen in aller Strenge und Allgemeinheit, und bis zu ihren höchsten Punkten hin, auszuführen*).

Wir werden nachher den Hauptinhalt des Werkes, so weit es uns hier der Raum gestattet, angeben, können aber nicht umhin vorher das Folgende zu bemerken und besonders hervorzuheben. Einen sehr grossen, fast den dritten Theil des ganzen 248 Seiten umfassenden Werks nimmt von S. 33. — S. 119. die Beschreibung und Theorie des Compasses, insbesondere die Lehre von den durch die Eisentheile des Schiffskörpers bewirkten sogenannten Deviationen des Compasses ein. Wir verkennen nicht im Entferntesten die immer mehr und mehr hervortretende hohe Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Sicherheit der Schifffahrt. Dessenungeachtet sind wir aber der Meinung, dass eine Darstellung dieses Gegenstandes in solcher Ausführlichkeit, wie sie hier gegeben worden ist, in das vorliegende Werk um so weniger gehörte, weil eine Verweisung auf das denselben erschöpfend behandelnde treffliche, im Literar. Ber. Nr. CLXVIII. S. 8. ausführlich von uns angezeigte Werk: „Ueber die Deviationen des Compasses, welche durch das Eisen eines Schiffes verursacht werden. Nach dem Englischen von F. J. Evans und Archibald Smith, deutsch bearbeitet von Dr. F. Schaub, Director der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Wien. C. Gerold's Sohn. 1864. 8°." nach unserer Meinung vollständig genügt hätte, wodurch das Buch zu seinem Vortheil auf einen kleineren Raum beschränkt, und auch sein sehr hoher Preis welcher seiner weiteren Verbreitung gewiss hinderlich sein wird, wesentlich erniedrigt worden wäre. Aber noch aus einer anderen und, wie es uns scheint, noch weit wichtigeren Rücksicht müssen wir die Aufnahme des erwähnten weitläufigen Excurses über die Deviationen des Compasses tadeln. So weit wir nämlich haben finden können, findet zwischen der hier gegebenen Darstellung und der in dem ausgezeichneten Schaub'schen Werke gegebenen sehr verdienstlichen Darstellung ein Unterschied, so weit es auf das Wesentliche

*) M. s. unsere oben erwähnte „Loxodromische Trigonometrie", die überall auf die höhere Mathematik gegründet ist.

ankommt, gar nicht Statt; vielmehr scheint uns die eigentlich wissenschaftliche, insbesondere mathematische, vorzüglich durch ihren mehr elementaren Charakter sich empfehlende und darin mit Recht ihre besondere Eigenthümlichkeit beanspruchende Darstellung mit unwesentlichen Aenderungen aus dem genannten Schaub'schen Werke entlehnt zu sein, was von dem Herrn Verfasser — wie es jedenfalls hätte geschehen sollen — nicht ausdrücklich bemerkt worden ist, wenn auch dieses Werk in dem Vorwort unter den benutzten Werken ganz kurz genannt worden ist. In dem Umstande, dass das Schaub-sche Werk hauptsächlich eine Bearbeitung eines englischen Werkes ist, als welche es sich auch auf seinem Titel ankündigt und bekennt, kann nach unserer Meinung ein Verfahren wie das vorher getadelte eine Entschuldigung nicht finden, indem im vorliegenden Falle gerade die von Herrn Schaub, um auch denen, welche den in dem englischen Werke vorausgesetzten Grad von mathematischen Kenntnissen nicht besitzen, zu dienen und nützlich zu werden, gegebene mehr elementar gehaltene Entwickelung der ganzen eigentlich mathematischen Partie volles Eigenthum ihres Urhebers ist, und demselben auch ungeschmälert erhalten bleiben muss. Hiezu das Unsrige, so weit wir dazu im Stande sind, beizutragen, haben wir aus freiem Entschlusse für unsere Pflicht und mit für eine Aufgabe dieser literarischen Berichte gehalten, ohne dass wir die oben hervorgehobenen verdienstlichen Seiten des vorliegenden Werkes verkennen wollen. Aber „**Suum cuique**" ist von jeher unser Wahlspruch gewesen!!

Der Hauptinhalt ist folgender:

Einleitung. Vorbegriffe. — **I. Seekarten und nautische Instrumente.** A. Seekarten, 1. Allgemeine Erklärungen. 2. Die stereographische Projection. 3. Die cylindrische und Mercator'sche Projection. 4. Näheres über Seekarten und deren Gebrauch. — B. Compass. 1. Zweck und Einrichtung des Compasses. 2. Erdmagnetismus. 3. Magnetismus der Eisenmassen des Schiffs. (Allgemeine Erklärungen. Theoretischer Theil der Deviation. Praktischer Theil der Diviation.). 4. Die Abtrift. — C. See-Uhren. 1. Ueber Uhren im Allgemeinen mit vorzüglicher Rücksicht auf See-Uhren. 2. Ueber die Zeitmessung zur See und über See-Uhren im Besondern. — D. Messung linearer Ausdehnungen zur See. 1. Logg. 2. Loth. 3. Distanzmesser. — **II. Die eigentliche Schiffsführung.** A. Allgemeiner Theil. 1. Loxodromische Schifffahrt. 2. Orthodromische Schifffahrt. — B. Besonderer Theil. 1. Küstenschifffahrt. 2. Strandschiff-

fahrt. 3. Schifffahrt in gebrochenen Cursen. — C. Praxis der Schiffsführung. 1. Anlegung der Route. 2. Pilotageführung. 3. Journalführung. — Anhang. Grunert.

Physik.

L'acoustique ou les phénomènes du son. Par R. Radau. Librairie de L. Hachette & Co. 1867. 2 frcs.

Der wol bekannte Verfasser behandelt in diesem Werke die Lehre vom Schalle in ganz eigenthümlicher Weise. Er versteht den Ernst des Themas für minder eingeweihte Leser zu mildern. Die Sprache des Buches ist so einfach, fesselnd, mit witzigen Wendungen durchwebt und der Gegenstand von so anziehender Seite aufgefasst, dass man das Buch kaum aus der Hand legen wird, bevor man es zu Ende gelesen hat. Dann aber hat man es auch schon studirt — so trefflich ist die Darstellungsweise.

Eine kurze Uebersicht seines Inhaltes wird am besten beweisen, wie das treffliche Buch nach allen Theilen der „Lehre vom Schall" seine Lichter wirft:

I. Der Ton in der Natur (Die Stimmen der Thiere und deren Sprache). — II. Wirkung der Töne auf lebende Wesen (Heilwirkung der Musik). — III. Schallmittel. — IV. Stärke des Schalles (Sprach- und Hörrohr). — V. Geschwindigkeit des Schalls (Die neuesten Versuche von Regnault hierüber). — VI. Reflexion des Schalls (das Echo ist ungemein interessant behandelt). — VII. Mitklingen (Resonanz-Konzerte, Königs musikalische Resonanzbüchse).

Von da betritt der Verfasser das Gebiet der neuen Akustik, ohne das ältere zu vernachlässigen. Es werden Helmholtz' grossartige Forschungen erklärt, die Tonschreibapparate und Vorrichtungen, die Schwingungen durch Spiegel sichtbar zu machen.

Besonders freut uns der Hinweis auf die hohen Verdienste Königs, des gelehrten Konstrukteurs akustischer Apparate. Die König'sche Membrankapsel wird in ihren verschiedenen Anwendungen vorgeführt. Es folgt die Besprechung der Interferenz des Schalls, der menschlichen Stimme, des Ohres. Geschlossen wird mit der Musik und deren Verhältniss zur Wissenschaft.

Wir können das Werk, das auch der betreffenden Literatur besonders gedenkt, auf das Beste empfehlen. *H.*

---

ankommt, gar nicht ...
eigentlich wissensch...
matische, vorzügl...
taren Charakter sich ...
ihre besondere ...
Darstellung mit ...
genannten Schaub...
von dem Herrn Verfasser ...
sollen — nicht ausdrücklich ...
ses Werk in dem Vo...
kurz genannt worden ...
sche Werk hauptsächlich ...
ist, als welche es sich ...
kennt, kann nach unser...
getadelte eine Entsch...
Falle gerade die von ...
in dem englischen ...
schen Kenntnissen ...
den, gegebene mehr ...
eigentlich mathemat...
hebers ist, ...
ten bleiben ...
Stande sind, ...
unsere Pflicht ...
richte gehalten ...
lichen Seiten ...
„Summe ...

Der ...

Einleit...
mente. ...
reograph...
Project...
B. ...
2. Erd...
(Allgem...
Prakti...
1. Ueb...
See-Uhr...
Uhren ...
gen zu...
II. Die ...
1. Loxod...
B. Bes...

lichkeit der denselben leitenden Lehrer bekommen, wenn
diese interessanten Mittheilungen liest. Vieles haben aber
usser den vorher genannten Studirenden und Schülern — auch
Herren Hultman in Stockholm und Lindman in Streng-
beigesteuert. Einige Auszüge aus diesen Mittheilungen — die
fortzusetzen uns bemühen werden — finden unsere Leser in
vorliegenden Hefte des Archivs. — Den Schluss des Januar-
s der neuen Zeitschrift macht endlich die Mittheilung von
gaben, welche bei Prüfungen auf verschiedenen schwedischen
ranstalten im Jahre 1867 gegeben worden sind, unter denen
Lehrer auch manches zu ähnlichen Zwecken ihnen Nützliche
en werden.

Hiermit empfehlen wir nochmals diese neue vorzugsweise dem
hematischen und physikalischen Unterrichte gewidmete Zeit-
ift, auf welche wir noch oft zurückzukommen hoffen, recht
r zur sorgfältigsten Beachtung. Grunert.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle
ersità italiane, pubblicato per cura del Profes-
G. Battaglini. Napoli. S. Literar. Ber. Nr. CLXXXIX.
3.

Novembre e Decembre 1867. Pangeometria; per N Lo-
chewski. p. 321. Cont. Vedi p. 320. — Sullo sviluppo
funzioni fratte razionali; per Nicola Trudi. Cont. Vedi
(Nota I. Sulla ricerca della funzione intera equivalente
funzione fratta razionale di una radice di un'equazione. —
II. Sulle somme delle potenze simili delle radici delle
p. 337. — Sulla minima distanza di due rette; per Euge-
ltrami. p. 351. — Nota sulla rotazione dei corpi; per G.
355. — Annunzio bibliografico. p. 357. — Alcuni teo-
le curve piane algebriche; per Giulio Ascoli. p. 358.
lo stesso argomento; per G. Ascoli. p. 365. — So-
questione 63; per G. Ascoli. p. 367. — Problema:
S, S′, S″ appoggiare su di esse i vertici d'un
dato. Soluzione per V. Mollame. — Nota sui
Piro Sardi. p. 371. — Sopra un teorema di
Ascoli; p. 377. — Un teorema di Geometria
questione 61; per G. Ascoli. p. 378.

der kaiserl. Akademie der Wis-
Literar. Ber. Nr. CLXXXVIII.

Von der sehr verdienstlichen

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann,

deren Band II. Nr. 23. im Literarischen Bericht Nr. CLXXXIX. angezeigt ist, sind uns neuerlich zugegangen Band II. Nr. 24. und Band III. Nr. 1.—Nr. 5.; aus diesen Nummern heben wir die folgenden grösseren Aufsätze hervor: Meteorologische Beobachtungen zur See. Von C. Jelinek. Im Zusammenhange mit einer neuen Küstenvermessung im adriatischen Meere hat das k. k. Handelsministerium die Erforschung der physikalischen Verhältnisse des adriatischen Meeres zum Gegenstande seiner besonderen Fürsorge gemacht. Eine der wichtigsten Aufgaben ist die genaue Feststellung der meteorologischen Verhältnisse durch Beobachtungen an Landstationen und an Bord von Schiffen. Zu vielfältigen Beobachtungen dieser Art insbesondere die österreichische Handelsmarine zu veranlassen, und denselben eine erspriessliche Richtung zu geben, ist der nächste Zweck dieses sehr verdienstlichen Aufsatzes, welchem wir recht vielen Erfolg wünschen, da an der sehr grossen Wichtigkeit und Bedeutung der betreffenden Beobachtungen nicht gezweifelt werden kann, wobei wir zugleich sehr wünschen, dass auch die, andere Meere, z. B. die Ostsee, befahrenden Capitäne sich zu solchen Beobachtungen recht vielfach veranlasst finden möchten. — Die Winter an der Südküste der Krim. Von N. Köppen. — Ueber die Erscheinung des Windfalls. (Zur Theorie der Gebirgswinde.). Von A. Mühry. — Das k. norwegische meteorologische Institut. Von H. Mohn. — Zur Geschichte der Witterung in Nordwest-Deutschland von 1863—1867, durch die Formeln der Luvseite dargestellt. Von Dr. M. A. F. Prestel. — Hydrometrische Beobachtungen der Schweiz. Von Fritsch. — Aufgabe und Bedeutung der in Baiern zu forstlichen Zwecken errichteten meteorologischen Stationen. Von Ebermayer. — Ueber den Zusammenhang der Stürme mit der Temperatur-Vertheilung auf der Oberfläche der Erde. Nach den Verhandlungen der französischen meteorologischen Gesellschaft. Von Jelinek. — Berichte über das Meteor und den Steinregen am 30. Jänner. — Die kleineren Mittheilungen, literarischen Notizen, Beschreibungen von Instrumenten u. s. w. bieten auch diesmal eine sehr grosse Mannigfaltigkeit dar, und enthalten des Interessanten und Wichtigen sehr viel.

Vermischte Schriften.

Tidskrift för Matematik och Fysik, tillegnad den svenska Elementar-Undervisningen, utgifven af D:R. **Göran Dillner,** Docent i Matematik vid Upsala Akademi (Hufvudredaktör); D:R. **F. W. Hultman,** Rektor vid Stockholms högre Elementar-Läroverk; D:R. **T. Robert Thalén,** Adjunkt i Fysik vid Upsala Akademi. Upsala, W. Schultz Boktryckeri. 8⁰.

Von dieser neuen mathematisch-physikalischen Zeitschrift liegt uns vor:

Häftet 1. Januari 1868,

und wir freuen uns sehr, unseren Lesern von dieser neuen sehr verdienstlichen, das Interesse vielfach in Anspruch nehmenden Publication Nachricht geben zu können, aus einem Lande, wo das mathematische und physikalische Studium stets besonders geblühet, immer eine grosse Anzahl seiner würdigsten Vertreter gehabt und noch hat, und wo der mathematische Unterricht von jeher — ja schon früher als in vielen anderen Ländern — als ein Hauptmittel zur Bildung des jugendlichen Geistes betrachtet worden ist und als solches schon sehr früh die allgemeinste Anerkennung im ganzen Volke gefunden hat. Die in ihrem so eben erschienenen ersten Hefte uns vorliegende Zeitschrift hat sich, wie ja auch schon ihr Titel besagt, vorzüglich die Aufgabe gestellt, zunächst dem mathematischen und physikalischen Unterrichte auf Schulen zu dienen und zu dessen Förderung beitragen zu wollen, und wird nach der uns vorliegenden Probe in dieser Beziehung gewiss Vorzügliches leisten, so dass wir sie auch zur sorgfältigsten Beachtung und Benutzung in allen Ländern aus vollkommenster Ueberzeugung empfehlen können. Die in diesem ersten Hefte enthaltenen Mittheilungen sind sehr mannigfaltiger Art. Den Anfang macht eine, Beiträge zur Geschichte der Arithmetik in Schweden enthaltende Abhandlung von Herrn F. W. Hultman, welche, wie es scheint, in ihren verschiedenen Fortsetzungen eine Charakterisirung der namentlich in älteren Zeiten gebrauchten arithmetischen Lehrbücher enthalten soll; die über die Arithmetik des berühmten Petrus Ramus (Parisiis 1581. 96 Seiten 8⁰.) und die darin enthaltene Behandlung der Elementarlehren der Rechenkunst gemachten Mittheilungen sind von vielfachem Interesse. — Herr Göran Dillner giebt die Einleitung zu einer grösseren Abhandlung über den Calcul mit geometrischen Grössen, der wir mit Verlangen entgegen sehen, da derselbe

Herr Verfasser schon eine von uns neben den Arbeiten Cauchy's besonders geschätzte Schrift über diesen wichtigen Gegenstand publicirt hat*). — Herr T. R. Thalén liefert den Anfang einer lesenswerthen Abhandlung über die Entdeckungen des jüngst verstorbenen hochberühmten Michael Faraday. — Wir finden ferner von längeren Aufsätzen den Anfang einer elementaren Darstellung der Lehre von den Maximis und Minimis von Herrn Hj. Holmgren; ferner eine allgemeine analytische Auflösung einer ganz allgemein gefassten algebraischen Aufgabe, die man sonst wohl auch in beschränkterer Auffassung in den algebraischen Aufgabensammlungen antrifft, von Herrn F. W. Hultman. Ausserdem liefert das vorliegende Heft auch Anzeigen und Beurtheilungen mehrerer neu erschienener Schriften von demselben Herrn Verfasser. — Ferner enthält nun aber ausser diesen grösseren Aufsätzen dieses Heft auch eine sehr grosse Menge von interessanten Sätzen und Aufgaben, die der allgemeinsten und sorgfältigsten Beachtung dringend zu empfehlen sind, wobei noch ganz besonders hervorgehoben werden muss, dass diese reichen Mittheilungen, die der Zahl 100 nahe kommen, einem grossen Theile nach von Studirenden der Universität Upsala und von Schülern von Gymnasien und anderen Lehranstalten in Stockholm und Upsala [Knut Wicksell (Stockholm), G. H. Lindquist (Stockholm), A. E. Hellgren (Stockholm), E. Lundberg, N. Peterson (Upsala), L. J. Björkman (Upsala)] herrühren; und man muss in der That alle Achtung vor dem Zustande des mathematischen Unterrichts auf den höheren schwedischen Lehranstalten und der

---

*) M. s. Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 19. und im Literar. Ber Nr. CLXXXVI. Nr. 3. die Anzeige der gleichfalls hierher gehörenden Schrift des Herrn Houël, von der — was wir beiläufig erwähnen — nach einer uns gemachten sehr erfreulichen Mittheilung nächstens eine zweite Abtheilung erscheinen wird. Nur solche **wirklicher mathematischer** Deutlichkeit, Klarheit und Bestimmtheit sich bedienende und befleissigende Entwickelungen des fraglichen wichtigen Gegenstandes können und werden demselben mit Erfolg den recht sehr zu wünschenden Eingang in den mathematischen Unterricht verschaffen und dauernd sichern. Deshalb empfehlen wir wiederholt neben den Arbeiten Cauchy's ganz besonders solche Schriften wie die der Herren Dillner, Houël. u. s. w., und geben immer noch nicht die Hoffnung auf, auch unsere eigenen langjährigen hierher gehörenden sehr ausgedehnten Arbeiten nach und nach (man vergl. Thl. XLIV. Nr. XXVI. S. 443. und Thl. XLV. Nr. XXIX. S. 454.) veröffentlichen zu können. Möge uns Herr Dillner recht bald mit der Fortsetzung seiner neuen Abhandlung in der vorliegenden trefflichen Zeitschrift erfreuen.

'refflichkeit der denselben leitenden Lehrer bekommen, wenn ıan diese interessanten Mittheilungen liest. Vieles haben aber - ausser den vorher genannten Studirenden und Schülern — auch ie Herren Hultman in Stockholm und Lindman in Streng-äs beigesteuert. Einige Auszüge aus diesen Mittheilungen — die rir fortzusetzen uns bemühen werden — finden unsere Leser in em vorliegenden Hefte des Archivs. — Den Schluss des Januar-lefts der neuen Zeitschrift macht endlich die Mittheilung von Aufgaben, welche bei Prüfungen auf verschiedenen schwedischen Lehranstalten im Jahre 1867 gegeben worden sind, unter denen lle Lehrer auch manches zu ähnlichen Zwecken ihnen Nützliche inden werden.

Hiermit empfehlen wir nochmals diese neue vorzugsweise dem ıathematischen und physikalischen Unterrichte gewidmete Zeit-:hrift, auf welche wir noch oft zurückzukommen hoffen, recht ehr zur sorgfältigsten Beachtung. Grunert.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle niversità italiane, pubblicato per cura del Profes-ore G. Battaglini. Napoli. S. Literar. Ber. Nr. CLXXXIX. . 13.

Novembre e Decembre 1867. Pangeometria; per N Lo-atschewski. p. 321. Cont. Vedi p. 320. — Sullo sviluppo lelle funzioni fratte razionali; per Nicola Trudi. Cont. Vedi . 272. (Nota I. Sulla ricerca della funzione intera equivalente d una funzione fratta razionale di una radice di un'equazione. — Nota II. Sulle somme delle potenze simili delle radici delle quazioni.). p. 337. — Sulla minima distanza di due rette; per Euge-io Beltrami. p. 351. — Nota sulla rotazione dei corpi; per G. anni. p. 355. — Annunzio bibliografico. p. 357. — Alcuni teo-mi sopra le curve piane algebriche; per Giulio Ascoli. p. 358. - Nota sullo stesso argomento; per G. Ascoli. p. 365. — So-zione della quistione 63; per G. Ascoli. p. 367. — Problema: ate tre curve S, S', S'' appoggiare su di esse i vertici d'un angolo di specie data. Soluzione per V. Mollame. — Nota sui ımeri primi; per Ciro Sardi. p. 371. — Sopra un teorema di nquières; per G. Ascoli; p. 377. — Un teorema di Geometria la soluzione della quistione 61; per G. Ascoli. p. 378.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wis-enschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXVIII. . 13.).

Band LV. Heft III. Rollet: Ueber die Aenderung der Farben durch den Contrast. S. 344. — v. Lang: Krystallographisch-optische Bestimmungen mit Rücksicht auf homologe und isomorphe Reihen. (Mit 1 Tafel.) S. 408. — Rollet: Zur Lehre von den Contrastfarben und dem Abklingen der Farben. S. 424.

Band LV. Heft IV. Loschmidt: Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung eines Systems von Punkten. S. 523. — v. Lang: Verbesserter Axenwinkel-Apparat. (Mit 2 Tafeln.) S. 545. — J. Schmidt: Ueber Feuermeteore, Meteorsteinfälle und über die Rillen auf dem Monde. S. 553. — Stefan: Ueber Longitudinalschwingungen elastischer Stäbe. S. 597.

Band LV. Heft V. v. Haidinger: Die Localstunden von 178 Meteorsteinfällen. S. 651. — Fiedler: Die Methodik der darstellenden Geometrie, zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage. (Mit 3 Tafeln.). S. 659. — Brio: Krystallographisch-optische Untersuchungen. S. 870. — Weiss: Bericht über die Beobachtungen während der ringförmigen Sonnenfinsterniss vom 6. März 1867 in Dalmatien. (Mit 2 Tafeln.). S. 905.

Band LVI. Heft I. und II. Morstadt: Ueber die directe Bestimmung der Achsen von Kreisbildern. (Mit 1 Tafel.) S. 92. — v. Haidinger: Die Meteoriten des k. k. Hof-Mineralienkabinets am 1. Juli 1867 und der Fortschritt seit Jänner 1859. S. 173. — Jelinek: Normale fünftägige Wärmemittel für 80 Stationen in Oesterreich, bezogen auf den Zeitraum 1848—1865. S. 193. — v. Littrow: Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1867. S. 223. — Unferdinger: Die Summe der Exponential-, der Sinus- und Cosinusreihe mit alternirenden Zeichengruppen. S. 257. — Derselbe: Nähere Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel positiver Grössen und ein daraus abgeleitetes allgemeines Theorem der Integralrechnung. S. 272.

Literarischer Bericht
CLXXXXI.

Bernhard Riemann
zum Gedächtniss von Ernst Schering.

Nachrichten d. K. Gesellschaft d. W. zu Göttingen. 1867. Juni 19.*)

Zwischen der Ueberfülle an Nachrichten politischer Ereignisse traf uns die wenn auch nicht ganz unerwartete doch so schmerzliche Nachricht von dem allzufrühen Tode des hoch geschätzten Mathematikers, des sehr verehrten Mitgliedes unserer Gesellschaft der Wissenschaften. Bernhard Riemann hatte am 20. Juli 1866 die grossen Hoffnungen, die auf Ihm für die Bereicherung der menschlichen Gedankenwelt noch ruheten, mit ins Grab genommen, war innerhalb des kurzen Zeitraums von elf Jahren seinen beiden grossen Vorgängern Gauss und Dirichlet gefolgt.

Worte ihm zur Erinnerung, hat die K. Gesellschaft d. W. mir gestattet, in ihrer öffentlichen Sitzung am 1. December v. Js. zu sprechen. Die Bände ihrer Abhandlungen werden diese aufnehmen aber die Gedächtnissrede auf Gauss, der geschichtlichen Entwickelung der Wissenschaft entsprechend, vorausgehen lassen. Um nun inzwischen dem Wunsche nach Kenntniss seiner Lebensumstände entgegen zu kommen erlaube ich mir, hier einen kurzen Auszug zu geben.

Georg Friedrich Bernhard Riemann als Predigers Sohn geboren am 17. September 1826 in Breselenz einem Dorfe an der

*) Wir freuen uns, dass wir diese Lebensskizze unseren Lesern mittheilen dürfen und sagen dafür unseren besonderen besten Dank. G.

Elbgrenze der Lüneburger Heide erhielt zusammen mit mehren Geschwistern seinen ersten Unterricht vom Vater und zeigte schon damals besonderes Interesse für Lösung von Zahlenaufgaben. In seinem vierzehnten Jahre ging er auf das Lyceum in Hannover erwarb dort nach Ueberwindung einer Missstimmung, die durch die Befähigung des Schülers, den Lehrer in seinem mathemati- Vortrag berichtigen zu können, entstanden war, die besondere Freundschaft dieses Lehrers. Dennoch war es für Riemann von grosser Bedeutung, dass er nach zwei Jahren auf das Johanneum in Lüneburg unter die Leitung des Herrn Director Schmalfuss kam. Dieser beschäftigte ihn nicht nur während der mathematischen Schulstunden mit für ihn eigens ausgewählten Problemen, sondern gab ihm auch Bücher über Gegenstände der höhern Mathematik zum Selbststudium, die dann immer in unerwartet kurzer Zeit zurück gebracht wurden. So Legendre's Theorie der Zahlen, deren Inhalt er während einer Woche zu seinem bleibenden Eigenthum machte.

Gleich lebhaft interessirte sich für den Schüler der Lehrer, bei dem er wohnte, der auch mein Religionslehrer gewesen, Herr Seffer, ihm verdanke ich über seinen Character in jener Zeit noch diese Bemerkung, an der wir unsern Freund sogleich wieder erkennen, er lobt ihn als still, bescheiden und anspruchslos.

Nachdem so vier Jahre in den beiden obersten Classen des Johanneums zugebracht waren, begab er sich mit den besten Zeugnissen versehen Ostern 1846 auf die Universität Göttingen und liess sich dem Wunsche des Vaters gemäss für Theologie inscribiren. Hier hatte er das Glück Gauss Vorlesungen zu hören, beschäftigte sich auch vorzugsweise mit dessen Untersuchungen über complexe Grössen so wie über Gegenstände der mathematischen Physik und brachte dem von Ostern 1847 bis 1849 in Berlin unter Jacobi betriebenen Studium der elliptischen und Abel'schen Functionen einen fruchtbaren Gedanken entgegen. Seiner befreundeten Stellung zu Dirichlet dankt er aus jener Zeit das von diesem in ihm erweckte Interesse für die Fourierschen Reihen und die partiellen Differential-Gleichungen.

Der Umstand, dass ihm Göttingen die heimathliche Universität war, machte es seinem Vater wünschenswerth, dass er Ostern 1849 wieder hieher kam. Neben der Ausarbeitung seiner von Gauss so wol gewürdigten Doctordissertation beschäftigte er sich nun auch angelegentlich mit psychologischen metaphysischen und pädagogischen Studien.

Riemann machte in seiner ersten Schrift bei der Unter-

uchung der Eigenschaften der im Allgemeinen stetigen Functionen
on einer Methode Anwendung, die bis dahin in einer ganz hete-
ogenen Disciplin der Mathematik ihrer Ausbildung entgegenge-
rachsen war. Die von Lagrange zuerst angewandte von La-
lace und Poisson in sehr wesentlichen Eigenschaften unter-
uchte dann durch Gauss von einem ganz neuen Gesichtspunkte
etrachtete und mit dem Namen Potentialfunction belegte verän-
derliche Grösse war zuletzt durch Dirichlet nach einer Methode
behandelt worden, die auf einem Satze beruht, welchem Riemann
wegen seiner grossen Bedeutung und vielfachen Anwendbarkeit
einen eignen Namen gegeben, den des Dirichlet'schen Princips.
Mit Zuhülfenahme desselben gelang es ihm, seine neuen Funda-
nentalsätze über die Bestimmbarkeit einer Function mit complexem
Argument durch ihre Unstetigkeitswerthe oder durch gegebene
Werthe an Grenzlinien zu beweisen. Die Wichtigkeit der Unter-
uchung der Functionen für complexe Werthe des Arguments war
vol zuerst von Gauss in ihrer ganzen Grösse erkannt, als er seit
Beginn des Jahres 1797 sich mit den lemniscatischen Functionen
eschäftigte. Die Bedeutung der imaginären Grössen hatte noch
ach seinen eignen fruchtreichen Anwendungen bei der Aufstel-
ung der Fundamentalsätze für die rationalen algebraischen Fun-
ctionen, für die cubischen und biquadratischen Potenzreste und
für die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung von Flächen
auf einander auch noch neues Licht gewonnen durch die von Abel
und Jacobi eingeführten elliptischen Functionen und durch die
von Dirichlet und den Herrn Kummer und Kronecker ent-
deckten arithmetischen Eigenschaften gewisser homogener Formen
beliebigen Grades. Die Bestimmungen des reellen und imaginären
Theils des Werthes einer Function nach dem Dirichlet'schen
Princip erforderte nun noch die Berücksichtigung eines schon bei
den Gebilden mit zwei Dimensionen auftretenden bis dahin noch
nicht untersuchten Umstandes, nämlich, geometrisch ausgedrückt,
der Einfachkeit oder Vielfältigkeit im Zusammenhang einer ein-
zelnen Fläche.

Damit legte Riemann die Grundlage zu einer Methode, welche
ohne die umfangreichen Entwickelungen, durch die Goepel und
Herr Rosenhain jene nach Art der Jacobi'schen einfachen
Reihen gebildeten zweifachen Reihen die zum Voraus geahneten
Sätze bewiesen und damit die Theorie der vierfach periodischen
Abel'schen Functionen erschlossen hatten; welche auf anderem
Wege als dem dem Herrn Weierstrass eigenthümlichen, durch
den das ganze Gebiet der inversen Functionen zweiwerthiger Abel-
scher Integrale erst zugänglich geworden war; die Lehrsätze für

die allgemeinen Abel'schen Functionen und für die mehrfachen Reihen, aus denen jene durch Multiplication und Division gebildet werden können, mit einem verhältnissmässig geringen analytischen Apparate aus ihrer Eigenschaft der Periodicität und ihren Unstetigkeits-Werthen beweist.

Mit gleichem Erfolge wandte Riemann diese Methode auf die hypergeometrischen Reihen an, deren wesentliche Eigenschaften schon durch Herrn Kummer und in einer Abhandlung des Gauss-schen handschriftlichen Nachlasses aufgestellt waren; ebenso auf die Verallgemeinerung dieser Reihen, Untersuchungen die er vollständig aufgezeichnet aber der Oeffentlichkeit nicht übergeben hat; zuletzt noch bei der Ableitung der Gleichungen für die Minimalflächen zwischen geradlinien Grenzen, indem er hier wieder mit Herrn Weierstrass gleichzeitig dasselbe wissenschaftliche Gebiet betrat. Durch jene hypergeometrische Reihe stellte er auch die den Kugelfunctionen entsprechenden Ringfunctionen dar, bestimmte durch sie auch die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, nachdem er die bei diesem Problem auftretende Differentialgleichung einem ähnlichen Verfahren unterworfen hatte, wie dasjenige ist, welches dem Green'schen Satze zum Grunde liegt.

Der Hauptvortheil bei Riemann's Methode beruht darauf, dass die Functionen unabhängig von ihren etwaigen analytischen Darstellungen z. B. als Reihen oder Integrale, die häufig nur für begrenzte Gebiete Bedeutung haben, betrachtet werden. Die Erweiterung von Functionen, die bis dahin nur in dem Umfange der Gültigkeit ihres bekannten analytischen Ausdrucks untersucht waren, bildete für ihn den Ausgangspunkt zu neuen Entdeckungen, so bei der Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse in einer Abhandlung, die er als Danksagung für die Aufnahme unter die Correspondenten der Berliner Akademie eingesandt hatte. Eins der wichtigsten hier angewandten Hülfsmittel ist der Fourier'sche Satz; mit der diesem zu Grunde liegenden und von Dirichlet zu ihrer ganzen Bedeutung erhobenen Reihenentwickelung hat Riemann sich schon zuvor erfolgreich beschäftigt. Er führt die Eigenschaften einer durch eine trigonometrische Reihe darstellbaren Function zurück auf die einer andern, welche mit der zweiten Integralfunction derselben im Zusammenhang steht und zeigt dabei auch, wie es nach der besonders von Dirichlet zur Geltung gebrachten Definition der Integrale selbst Integrale solcher Functionen geben könne, die für jedes noch so klein angenommene Intervall des Arguments unendlich viele Unstetigkeits-

stellen besitzen. Neben dieser Abhandlung, die er als Probeschrift zur Erwerbung des Akademischen Lehrrechts benutzte, diente ihm zu gleichem Zwecke als Vorlesung vor der Facultät eine Ausarbeitung über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Die Wahl dieses Gegenstandes hatte Gauss veranlasst, wol wegen des eignen Interesses, das er an demselben nahm, mit welchem er sich schon in frühen Jahren beschäftigt und dabei alsbald erkannt hatte, dass ebenso wie in der Mechanik die Richtigkeit der Grundsätze wesentlich auf der Erfahrung beruhet. Von den Resultaten in diesen Untersuchungen hatte er nur das veröffentlicht, was sich auf die von der Beschaffenheit des eine Fläche umgebenden Raumes unabhängige Bestimmung des Krümmungsmaasses der Fläche bezieht. Dieser Satz bildet wesentlich das Fundament für Riemann's eigene Betrachtungen der von dem Euklidischen Raume verschiedenen nicht ebenen Raumarten. Es wird dabei aufmerksam gemacht auf die Verschiedenheit der Begriffe der Unbegrenztheit und der Unendlichkeit einer Mannigfaltigkeit von mehren Dimensionen; hervor gehoben, wie unsere empirische Kenntniss des die Körperwelt enthaltenden Raumes keine Schlussfolgerungen gestattet auf Verhältnisse, die erst merklich werden für bis jetzt unmessbar grosse und unmessbar kleine geometrische Gebilde. In Bezug auf den letztern Umstand wird angedeutet, dass die dadurch offen gelassene Frage nach der stetigen oder discreten Construction des Raumes nicht ohne Einfluss sein darf auf unsere durch Newton's Naturphilosophie begründeten Anschauungen über Naturgesetze. Mit den betreffenden Problemen hat Riemann sich auch wiederholt eingehend beschäftigt und mir während des Ausbaues der Untersuchungen seine Gedanken häufig mitgetheilt.

Die Vielseitigkeit Riemann's zeigt sich nun noch darin, dass er, angeregt durch Herrn Helmholtz Theorien der Combinationstöne, der Wirbelbewegungen und der Tonempfindungen, neue Seiten abgewann dem Probleme ebener Luftwellen, dem Dirichlet'schen Probleme des flüssigen Ellipsoids, und der Lehre von der Mechanik des Ohres. Letztere ist freilich vom neidischen Geschick in dem wesentlichen Theile uns vorbehalten geblieben.

Selbst während seines Lebens können wir manche zufällige Umstände wol als der Bereicherung der Wissenschaft durch ihn hinderlich anklagen. Vergegenwärtigt man sich, dass ihn seit dem Beginn der Universitätsstudien eine Krankheit verfolgte, die am wenigsten eine Bewegungslose allein dem Denken gewidmete Lebensweise duldet; die die Sorgen noch steigern musste, welche ein ungünstiges äusseres Geschick hervorrief, das ihm z. B. erst

in seinem zwei und dreissigsten Lebensjahre nicht eigene Existenzmittel als Extraordinarius verschaffte; bedenkt man noch, dass er in sich die Spuren einer andern Krankheit warnahm, welche ihm schon in der Jugend die Mutter geraubt hatte, dann eine Schwester und nach dem Tode des Vaters den damals die Sorgen für die Familie tragenden jüngern Bruder und fast gleichzeitig eine andere Schwester, so kann man sich nicht ohne schmerzliches Mitleid in die Stimmungen versetzen, die ihn in den wol seltenen Augenblicken, während welcher er sich nicht mit seinen mathematischen und philosophischen Problemen beschäftigte, beschleichen mussten.

Eine bedeutende Besserung in seiner Gemüthsstimmung trat ein, als seit 1858 die beiden damals noch lebenden Geschwister ihm hier dauernde Gesellschaft leisteten und als er später im Jahre 1862 sich zu einer sehr glücklichen Ehe mit Elise Koch verband, die ihm für eine nur so kurze Reihe von Jahren eine Lebensgefährtin sein sollte, welche mit Verständniss und ausgiebiger Geduld die seiner schweren und langwierigen Krankheit entspringenden Eigenheiten wohlthuend zu behandeln verstand. Auch noch dadurch musste sie zur Milderung seiner kummervollen Stimmung beitragen, dass die Trauer sie zu verlassen, ihn nicht dem Gedanken ganz allein übergab, der so sehr auf ihm lastete, dass es ihm nicht gestattet sein sollte die begonnenen und die im Geiste schon an's Ziel geführten Arbeiten zur Vollendung zu bringen.

In voller Voraussicht des nahen Todes verlangte er vom Arzte wiederholt und dringend eine Angabe der ihm noch übrig gebliebenen Lebensfrist, um darnach die Arbeit auszuwählen, die in solchem Zeitraume abgeschlossen werden könnte. Am Morgen des 20. Juli früh 7 Uhr verschied er, nachdem er noch Tags zuvor sich mit seinen Untersuchungen über das Gehörorgan beschäftigt und dann seine Umgebung auf die nahe Scheidestunde vorbereitet hatte. Es war in Selasca bei Intra am Lago maggiore, schon im vierten Jahre hielt er sich zur Milderung seiner Krankheit in Italien auf. Ermöglicht war ihm dieses durch die Liberalität des Königlichen Curatorium und die theilnahmsvolle Verwendung seiner hiesigen früheren Lehrer; es mag mir gestattet werden, dies hier zu erwähnen, weil Riemann so oft von seiner Pflicht der Dankbarkeit gesprochen, so sehr bedauert hat, ausser Stande zu sein, den Dank durch die That zu erweisen. Auch an die grosse Gastfreundschaft und das Zuvorkommen, welch er in Italien so vielfach erfahren, darf ich wol erinnern. Nicht nur die Hochachtung für seine wissenschaftliche Bedeutung, wie vor allen

bei den Herren Betti und Felici gibt sich darin zu erkennen, sondern wie auch bei dem Herrn Jaeger in Messina und anderen der Dank gegen den Freund Riemann's, der den Vulcanen ihres Landes so viel Studien gewidmet und mit seinem geometrischen Netze den Etna umsponnen hatte.

Der Aufenthalt in diesem Lande ist durch das Interesse, das er an den Geschichts- und Kunstmonumenten und den landschaftlichen Schönheiten nahm, noch ein wahrer Lichtpunkt für seine Gemüthsstimmung geworden, zu deren Hebung die intime Freundschaft des Herrn Betti und die in dem Anerbieten der durch Mossotti's Tod erledigten Professur ausgesprochene Hoffnung auf Besserung seiner Gesundheit auch wesentlich beigetragen hat.

Das Andenken an Riemann bleibt auf immer durch seine wissenschaftlichen Entdeckungen begründet. Seine Schüler erinnern sich mit besonderer dankbarer Liebe der Freigebigkeit in Mittheilungen wichtiger neuer und von ihm selbst gar nicht veröffentlichter Untersuchungen, der Unermüdlichkeit des Lehrers im Bestreben, die ganze Wahrheit des Vorgetragenen zu voller Ueberzeugung des Lernenden zu bringen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Intorno alla vita e alle opere di Luigi Lagrange. Discorso letto nel R. Liceo Galilei di Pisa per la festa letteraria commemorativa dal Cav. A. Forti, Professore di Matematiche e Meccanica al Liceo stesso e alle scuole tecniche comunali. 26. Aprile 1868. Pisa, dalla Tipografia Nistri. 1868. 8°.

Der treffliche Herr Verfasser beginnt diese ausgezeichnete Rede mit den Worten: „Signori! Con molto senno, gl'illustri Autori dei nostri regolamenti scolastici hanno stabilito, che in ciascun anno, nel giorno solenne della distribuzione dei premii agli allievi dei RR. Licei e delle Scuole Tecniche, si ragionasse dai Professori insegnanti, ciascuno alla sua volta, della vita e delle opere di qualche italiano, resosi celebre per scienze o per lettere. Perciocchè nulla più dello specchio degli uomini eminenti, i cui nomi sono con riverenza tramandati ai posteri, può destare negli animi giovanili lo amore allo studio, e la costanza a sormontare la siepe, ond'è cinta la meta, che è il sapere profondo etc.“ Hiernach besteht also auf den italienischen Lyceen und technischen

Schulen — als Vorschrift der Regierung — die herrliche, gewiss im höchsten Grade nachahmungswerthe Sitte, dass in jedem Jahre am Tage der feierlichen Preisvertheilung von einem der Professoren eine Festrede gehalten wird, in welcher er die Verdienste eines um die Wissenschaften besonders verdienten Italieners zu schildern und den Schülern vor die Augen zu führen hat. Und wen konnte denn Herr A. Forti im Jahre 1868 auf dem Königlichen Lyceum „Galilei" in Pisa wohl besser und mit grösserem Rechte zu dieser Schilderung wählen als den grossen Giuseppe Luigi Lagrange, geboren in Turin am 30. Januar 1736, gestorben zu Paris am 10. April 1813, Morgens 9³ Uhr. Auf S. 26 sagt Herr Forti: „La mattina dell' 8 Aprile, i Senatori Monge, Lacépède e Chaptal, venivano, da parte dell' Imperatore, a porgergli il gran Cordone della Riunione*). Lagrange li ricevette con la sua solita affabilità, ed entrò con loro in una conversazione, che fu l'ultima. Da prima le sue parole si aggirarono sull' Imperatore, e sulle sue qualità di grande guerriero e di Sovrano munificente. Domandato di poi dai colleghi, del come egli si sentisse, rispose: veder bene, la sua carriera essere finita e che la diminuzione graduata di forze avrebbe già spenta dolcemente la sua vita, se non era che la Consorte affettuosissima vi si fosse opposta. S'intende ch'egli alludeva alle cure assidue della Contessa a ristorargliele. La conversazione durò circa due ore; la memoria gli mancava spesso, specialmente dei nomi e delle date. Gli amici si ritiravano, ed egli cadeva in profondo abbattimento. Due giorni appresso alle 9¾ del mattino, egli non era più. Lagrange compiva allora, 77 anni, 2 mesi e 10 giorni; la sua malattia era durata dieci giorni, senz' altro dolore che uno stato febrile incessante. Il suo corpo fu trasportato con grande solennitá al Pánteon; Lacepède e Laplace lessero ciascuno un discorso funebre". — Wir haben diese herrliche, den grossen Mann nach allen Seiten hin lebhaft und eingehend schildernde Rede mit dem grössten Interesse gelesen, und empfehlen dieselbe — Herrn Forti für deren Veröffentlichung unseren wärmsten Dank sagend — unseren Lesern zur sorgfältigsten Beachtung. Aller ihm irgend zugänglichen Hülfsmittel hat derselbe sich mit der grössten Sachkenntniss bedient, insbesondere auch der von dem jetzigen Präsidenten des italienischen Ministeriums, Grafen Menabrea — selbst höchst ausgezeichnetem und berühmten Mathematiker, einem

*) l'Ordine della Riunione, era un ordine civile e militare creato da Napoleone I nel 1811, in occasione che l'Olanda era aggregata alla Francia; esso sostituiva l'ordine dell' Unione, creato dal Re Luigi Bonaparte.

der ausgezeichnet'sten Schüler von Plana — bei der Inauguration des Lagrange in Turin auf der Piazza Lagrange errichteten Monuments am 15. Juni 1867 gehaltenen Festrede. Das Monument trägt die Inschrift: „A Luigi Lagrange — La Patria". Lagrange ist nach dem Leben dargestellt, in der linken Hand ein Buch mit der Inschrift Mécanique analytique, in der rechten Hand einen Griffel haltend.

Der **Algorismus Proportionum** des **Nicolaus Oresme.** Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift R. 4°. 2. der Königlichen Gymnasial-Bibliothek zu Thorn herausgegeben von E. L. W. M. Curtze. Mit einer lithographierten Tafel. Dem Gymnasium zu Thorn zur dritten Säcularfeier den 8. März 1868 der Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.

Die obige von Herrn M. Curtze wohl zuerst besonderer Beachtung gewidmete und in ihrer Bedeutung erkannte Handschrift der Bibliothek des Königlichen Gymnasiums zu Thorn ist jedenfalls nicht unwichtig für die Geschichte und die ältere Literatur der Mathematik, und Herr Curtze verdient gewiss besonderen Dank, dass er dieselbe an's Licht gezogen und den Bearbeitern der Geschichte der Mathematik zugänglich gemacht hat. In einer mit grossem Fleiss und grosser Sachkenntniss verfassten gelehrten Einleitung giebt Herr Curtze Nachricht von dem Verfasser der Schrift Nicolaus Oresme, welcher geboren war im Dorfe Allemagne bei Caen in der Normandie, wahrscheinlich zu Anfang des XIV. Jahrhunderts, am 16. November 1377 in Avignon zum Bischof von Lisieux geweiht wurde, und als solcher den 11. Juli 1382 starb; er giebt dessen verschiedene Werke an, und charakterisirt dann die hier vorliegende Schrift im Allgemeinen in lehrreicher Weise, worauf endlich die Schrift selbst auf S. 13 bis S. 30 mitgetheilt wird. Wir bemerken nochmals, dass dieselbe gewiss verdient, von den Bearbeitern der Geschichte der Arithmetik sorgfältig beachtet zu werden.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1868. 4°.

Die beiden ersten Hefte dieser neuen Zeitschrift, deren Erscheinen wir schon in dem ersten Hefte dieses 48sten Theils des Archivs S. 119. 120 vorläufig angezeigt haben, liegen jetzt vor

uns. Wir halten dieselbe für das wichtigste Förderungsmittel der Geschichte der Mathematik und Physik, welches es jetzt giebt, und wüssten in der That nicht, welches grössere Verdienst Herr B. Boncompagni seinen schon jetzt so grossen, alles früher Geleistete weit überragenden Verdiensten um die Geschichte der beiden genannten Wissenschaften hätte hinzufügen können, als die Gründung dieser neuen Zeitschrift, und können nur aus dem innersten Grunde unseres Herzen wünschen, dass die Vorsehung dem trefflichen, von uns hoch verehrten Manne noch lange Kraft und Gesundheit schenken möge, das jetzt begonnene so schöne und höchst wichtige wissenschaftliche Unternehmen bis in die fernste Zeit ohne alle Störung und Unterbrechung fortzuführen; er wird seinem Namen dadurch ein neues unvergängliches Denkmal in den Annalen der Wissenschaft setzen. Wir werden in unseren literarischen Berichten stets den vollständigen Inhalt der einzelnen Hefte so bald als irgend möglich angeben, indem weitere und ausführliche Referate der beschränkte Raum dieser literarischen Berichte uns nur in einzelnen Ausnahmefällen gestatten wird.

Tomo I. Gennaio 1868. Sopra Pietro Peregrino di Maricourt e la sua epistola De Magnete. Memoria prima. Del P. D. Timoteo Bertelli Barnabita. p. 1 bis p. 32.

Tomo I. Febbraio 1868. Aven Natan, e le teorie sulla origine della luce lunare e delle stelle presso gli autori ebrei del medio evo. Nota di M. Steinscheider p. 33. — Intorno al centro di gravità. Notizie storico-critiche del Sig. Dott. Domenico Piani, Segretario del' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. p. 41. (Ein zwar kurzer, aber viele lehrreiche historische Notizen über die eigentlichen Erfinder gewisser bekannter, zugleich mit der Lehre von den Maximis und Minimis zusammenhängender Sätze vom Schwerpunkte, mit anzuerkennender Hervorhebung der Berechtigung einiger italienischer Mathematiker (Fagnano's, Lorgna's und besonders Mateucci's) auf die Erfindung einiger dieser Sätze, und mit besonderer Beziehung auf eine, einer Berichtigung oder wenigstens Einschränkung bedürfende historische Notiz in Baltzer's Elementen der Mathematik. Band II. Zweite Aufl. 1867. S. 128. am Ende.). — Intorno ad alcune definizioni della forza di restituzione dei corpi solidi corrispondenti ai due metodi analitico e sintetico coi quali è stata studiata la teoria dell' elasticità. Nota del Dott^r. Domenico Cipolletti. p. 43. — De notis numerorum romanis. Auctore G. Friedlein. p. 48. — Sur la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wéfâ et Tycho Brahé. Lettre de M. L. Am. Sédillot à D. B. Boncompagni. p. 51. — Éléments

de Géométrie par Eugène Catalan. Deuxième édition revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, ecc. 1866. — Par Domenico Chelini d. S. P. p. 54. — Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II. Recensuit Ricardus Hoche. Accedunt Codicis Cizensis Problemata Arithmetica. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri. MDCCCLXVI. — Prof. Giuseppe Spezi. p. 57. — Sugli spettri prismatici delle stelle fisse. Memoria del P. A. Secchi, ecc. Firenze, stamperia reale, 1867 (Estratto dell' Autore.). p. 62.

Arithmetik.

Riduzione d'un integrale multiplo. Nota del Sig. Angelo Genocchi. Roma. Tipografia delle belle arti. 1857. 8°.

Diese schon vor längerer Zeit erschienene Schrift ist uns erst jetzt von ihrem Herrn Verfasser gütigst zugesandt worden, und wir müssen daher von derselben noch kurz Notiz nehmen. Sie beschäftigt sich in eleganter Weise mit der Entwickelung des Integrals

$$S = \int\int f(P,Q)\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

wenn

$$P = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \ldots,\quad Q = \alpha x + \beta y + \ldots.$$

und $f(P,Q)$ eine gegebene Function von P und Q ist, das Integral ausgedehnt auf alle positiven und negativen Werthe der n Veränderlichen $x, y, z, \ldots,$ für welche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \ldots < 1$$

ist. Am Schlusse zeigt der Herr Verfasser noch besonders, dass die von Herrn Schlömilch für den besonderen Fall $f(P,Q) = F(P)\varphi(Q)$ in den sächsischen Sitzungsberichten und seinen Analytischen Studien. Thl. II. S. 177 und S. 179, so wie noch anderwärts, gegebenen Entwickelungen falsch sind, indem er sagt: „Queste due formole*) mostrano che il valore di due integrali

---

*) Bezieht sich auf zwei vorhergehende von Herrn Genocchi entwickelte Formeln.

multipli dato dal sig. Schlömilch a pag. 333 e 334 del T. III. di questi Annali". — (Annali di scienze matematiche e fisiche pubblicati in Roma,) — „equazioni (5) e (6) è doppio del vero. Il suo errore deriva dall' uso del fattore discontinuo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-usi}du\int_{A}^{B} F(t)\cos utdt,$$

che prende il medesimo valore per s e per $-s$, e quindi non è sempre nullo fuori dei limiti $s=A$ e $s=B$, se s è una funzione che può cambiar segno."

„Le dette equazioni (5) e (6) collimano con le (4) e (5) delle pag. 177 e 179 degli Studi Analitici del medesimo autore, vol. II. Anche l'equazione (8), pag. 181, di questo vol. II., deve per egual motivo emendarsi togliendo dal secondo membro il fattore 2; e cessa la singolarità ivi notata per cui tali equazioni supposte vere nel caso di più variabili non valevano in quello d'una variabile sola".

Geodäsie.

Das Pothenot'sche Problem in theoretischer und practischer Beziehung. Mit besonderer Rücksicht auf dessen graphische Lösung mittelst des Messtisches (Rückwärtseinschneiden aus drei Puncten). Für ausübende Geometer und Studirende der practischen Geometrie dargestellt von Josef Höltschl, Assistenten der Lehrkanzel der practischen Geometrie am k. k. Polytechnicum in Wien u. s. w. Mit 36 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Weimar, 1868. B. F. Voigt. 8°.

Wir glauben denen, die sich mit dem schon oft auch in besonderen Schriften behandelten Pothenot'schen Problem eingehend theoretisch und praktisch beschäftigen wollen, diese Schrift vorzugsweise empfehlen zu dürfen. Dieselbe ist mit grosser Sachkenntniss und strenger mathematischer Behandlung verfasst, welche letztere jedoch nicht mehr Kenntnisse in Anspruch nimmt, als bei jedem wissenschaftlichen Praktiker vorausgesetzt werden dürfen. Der Herr Verfasser hat alle bisher gegebenen Auflösungen, welche nur irgend auf praktische Anwendbarkeit Anspruch machen dürfen, einer sorgfältigen Behandlung und kritischen Beurtheilung rücksichtlich ihres praktischen Werthes unterworfen, auch der durch dieselben zu erreichenden Genauigkeit und den bei denselben möglichen Fehlern

und deren Gränzen eine sehr sorgfältige Berücksichtigung gewidmet, und sich überall als einen Mann bewährt, welcher mit theoretischen Kenntnissen genaue Bekanntschaft mit den Ansprüchen der Praxis und praktischen Takt verbindet. Ausserdem enthält die Schrift, wenn sie auch vorzugsweise fremde Lösungen berücksichtigt, sehr viele höchst einsichtsvolle eigene Bemerkungen, durch welche die Lösungen theilweise vereinfacht, in der theoretischen Darstellung elementarisirt, und der fruchtbaren praktischen Anwendung entweder näher geführt oder zu derselben erst recht geeignet gemacht werden. Aus verschiedenen Gründen — welche sich dem Leser bei näherer Kenntnissnahme von der Schrift ganz von selbst herausstellen werden — halten wir es nicht für angemessen, auf den speciellen Inhalt der sehr zu empfehlenden Schrift, namentlich die unseren eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand geschenkte — von uns übrigens mit dem wärmsten Danke erkannte — ausführliche Berücksichtigung, näher einzugehen und darüber, wie wir sonst wohl gewohnt sind, hier zu referiren, indem wir nur bemerken, dass in dem Anhange auch das bekannte Hansen'sche Problem (Rückwärtseinschneiden aus zwei Punkten) eine eingehende und sorgfältige Behandlung gefunden hat. Alle gehörig wissenschaftlich vorgebildeten Praktiker werden aus dieser Schrift sehr viele Belehrung schöpfen können, weshalb wir dieselbe hier nochmals recht sehr zur Beachtung empfehlen. G.

Nautik.

Neue einfache Methode für Zeit- und Längenbestimmung. Von J. J. Åstrand, Director der Sternwarte zu Bergen in Norwegen. (Mit 1 Tafel). Mit Vorbemerkungen von Karl v. Littrow. Aus dem LVI. Bande der Sitzb. der k. Akademie der Wissenschaften (in Wien). II. Abthl. October-Heft. 1867. 8⁰.

Andeutungen für Seeleute über den Gebrauch und die Genauigkeit der Methode, Länge und Missweisung durch Circummeridianhöhen zu bestimmen. Von Karl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Wien. Carl Gerold's Sohn. 1868. 8⁰.

Herr K. v. Littrow hat sich bekanntlich durch Angabe einer einfachen Methode zur Zeit- und Längenbestimmung mittelst Circummeridianhöhen um die Nautik sehr verdient gemacht. Diese Methode hat bereits auf grossen Seereisen, namentlich auch bei der Novara-Expedition, vielfache Anwendung gefunden, und hat

sich überall in der Praxis vollkommen bewährt. Schon im Liter. Ber. Nr. CLX. S. 4. (Thl. 40.) haben wir über dieselbe ausführlich referirt, und dürfen sie daher als unseren Lesern vollkommen bekannt betrachten, zugleich unter Hinweisung auf unsere Anzeige der verdienstlichen Schrift von Herrn Faye über dieselbe im Liter. Ber. Nr. CLXV. S. 10. (Thl. 42.).

In der ersten der beiden obigen Abhandlungen hat nun Herr Director J. J. Åstrand in Bergen in Norwegen jedenfalls in sehr eleganter und lehrreicher Weise eine von der Methode des Herrn v. Littrow sich darin wesentlich unterscheidende Methode zur Zeit- und Längenbestimmung entwickelt, dass nicht wie bei dieser letzteren die Differenz zwischen den beobachteten Circummeridianhöhen selbst, sondern die Differenzen zwischen der Culminationshöhe und jeder der Circummeridianhöhen in die Rechnung eingeführt werden. Herr Åstrand hat seine Methode auf mehrere während der Novara-Expedition angestellte Beobachtungen angewandt, und die dadurch erhaltenen Resultate mit den von Herrn v. Wüllerstorf nach Herrn v. Littrow's Methode erhaltenen Resultaten sehr nahe übereinstimmend gefunden.

Wenn nun Herr Åstrand in der Einleitung zu seiner Abhandlung die Priorität der Erfindung der auf den aus dem Obigen sich von selbst ergebenden Principien beruhenden Methode zur Zeit- und Längenbestimmung für Herrn Hansteen in Anspruch nimmt, und deshalb auf das Lehrbuch der Astronomie dieses auch von uns hochverehrten Gelehrten verweist, so glauben wir doch, Herrn v. Littrow beipflichten zu müssen, wenn er in seinen Vorbemerkungen zu Herrn Åstrand's allerdings sehr lehrreichen Abhandlung seine hievon abweichende Ansicht ausspricht und durch triftige Gründe belegt, indem er zugleich einige beachtenswerthe Bemerkungen über die von Herrn Åstrand angegebene Methode hinzugefügt; denn Herr v. Littrow hat doch jedenfalls und unbestreitbar zuerst die zweckmässige Verwendbarkeit der von ihm in ganz unabhängiger Weise gefassten Idee für die Praxis deutlich nachgewiesen, und dazu der Methode die Einrichtung gegeben, dass die Genauigkeit der durch dieselbe zu gewinnenden Resultate verbürgt werden kann.

In der zweiten der beiden obigen Schriften hat Herr v. Littrow sich um die Seefahrer dadurch ein sehr dankenswerthes neues Verdienst erworben, dass er darin denselben alles dasjenige mit der grössten Deutlichkeit erläutert und vor die Augen geführt hat, worauf es bei der wirklichen praktischen Anwendung seiner schönen Methode wesentlich ankommt, wenn sie mit der grössten

Leichtigkeit angewandt, und wenn mit ihr eine möglichst grosse Genauigkeit erzielt werden soll. Er hat alle zu befolgenden Grundsätze in sehr bequemer Uebersicht zusammengestellt und daran in sehr dankenswerther Weise die Vorschriften für gleichzeitige Bestimmung der Missweisung geknüpft. Gewiss hat er vollkommen Recht, wenn er sich bei diesem Abrisse auf die Sonne als zu beobachtendes Gestirn beschränkt hat, da — wie Jeder weiss, wer mit der Schifffahrt einigermassen bekannt ist — der Seemann sich zu Sternbeobachtungen nur entschliesst, wenn er astronomisch besonders tüchtig ausgebildet ist, dann aber für die wenigen, in diesem Falle nöthigen Ergänzungen der in der vorliegenden Schrift entwickelten Regeln der Belehrung nicht bedarf.

Wir empfehlen namentlich auch diese zweite Schrift der sorgfältigsten Beachtung aller Seeleute recht sehr.

Physik.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Physik für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Von J. Pranghofer, Assistenten der höheren Mathematik am k. k. Polytechnikum in Wien. Erster Theil: Mechanische Naturlehre. Mit 56 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien. 1868. W. Braumüller. 8°.

Eine sehr gute, zur vielfachsten Benutzung zu empfehlende Sammlung physikalischer Aufgaben, jedenfalls eine der besten, welche es giebt. Mit vollem Rechte herrscht namentlich in dieser ersten Abtheilung das mathematische Element vor, was übrigens bei einer zunächst für österreichische Lehranstalten bestimmten physikalischen Aufgabensammlung von vorn herein zu erwarten war, weil — wie dies auch schon früher von uns oftmals lobend hervorgehoben worden ist — auf diesen Lehranstalten, eben so wie auf unseren preussischen trefflichen Realschulen erster Ordnung, die Physik immer vorherrschend mathematisch — wenn auch nur unter Voraussetzung der mathematischen Elemente — behandelt worden ist, ohne übrigens die Bedeutung des Experiments irgend wie zu verkennen und dasselbe im Geringsten zu vernachlässigen; dass aber namentlich für die Schüler höherer Schulen die bildende Kraft, besonders in der mechanischen Naturlehre, hauptsächlich in deren möglichst strengen elementar-mathematischen Behandlung liegt, ist gegenwärtig zu unserer grössten Freude wohl so allgemein anerkannt, dass darüber ein weiteres Wort nicht zu verlieren ist. Und diesen Gesichtspunkt hat denn auch die vorliegende ausgezeichnete Sammlung, wie schon erwähnt, mit vollstem Rechte

vorzugsweise fest gehalten. Der Fortsetzung derselben mit recht grossem Verlangen entgegen sehend, müssen wir uns hier mit der folgenden Angabe des Inhalts der Hauptabschnitte begnügen:

I. Von den Kräften, die auf einen freien Punkt oder auf mehrere Punkte wirken und vom Gleichgewichte dieser Kräfte. II. Ueber den Schwerpunkt und die Stabilität der Körper. III. Ueber die einfachen und einige zusammengesetzte Maschinen. IV. Ueber die Festigkeit der Körper. V. Hydrostatik. VI. Aerostatik. VII. Gleichförmige, gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen. VIII. Vom dynamischen Mass der Kräfte und der mechanischen Arbeit. IX. Der freie Fall, der Fall auf der schiefen Ebene und der Wurf der Körper. X. Ueber das Trägheitsmoment und das Pendel. XI. Von der Centralbewegung. XII. Vom Stosse XIII. Ueber die Reibung. XIV. Hydrodynamik. XV. Aerodynamik.

Alle Achtung vor dem Zustande des physikalischen Unterrichts auf Schulen, durch welchen die Schüler vollständig zur Lösung aller in dieser reichen und, ohne den Kreis der mathematischen Elemente irgendwie zu überschreiten, weit gehenden Sammlung vorkommenden Aufgaben in den Stand gesetzt und befähigt werden!

Das Klima von Posen. Resultate der meteorologischen Beobachtungen auf der Königl. meteorologischen Station zu Posen in den Jahren 1848 bis 1865. Von Doctor Albert Magener, Oberlehrer an der Realschule. Mit einer Isothermenkarte (Farbendruck) und einer Karte der täglichen Wärmemittel für Posen. Posen. J. Leissner. 1868. 8°.

Eine, wie es uns scheint, sehr gute meteorologische Monographie, der man möglichst viele Nachfolger in ähnlicher Weise wünschen muss. Aber auch aus einem anderen und für uns wenigstens noch wichtigeren Grunde ist das Buch der Beachtung der Leser recht sehr zu empfehlen. Denn dasselbe ist, wie der Herr Verfasser in der Vorrede auch selbst andeutet, in der That als eine „populäre Meteorologie“ zu betrachten, und zwar nach unserer Meinung als eine sehr gute und empfehlenswerthe. Der Leser erhält in diesem Buche eine Anleitung zu allem Dem, worauf er bei meteorologischen Beobachtungen seine Aufmerksamkeit vorzugsweise zu richten hat, und hat dann zugleich die Anwendung auf ein vollständig durchgeführtes Beispiel vor sich. Wir bemerken hierbei noch, dass wir die Behandlung für eine

durchgängig wissenschaftliche, den neueren Fortschritten der Meteorologie folgende und sich anschliessende halten, und sehen daher nicht ein, weshalb der Verfasser dieselbe vorzugsweise als eine „populäre“ bezeichnet hat; denn Das, worauf diese Benennung ohne Weiteres passt, sind doch eigentlich nur die Wetterregeln in VIII., womit wir keineswegs einen Tadel, sondern vielmehr ein Lob des Buchs ausgesprochen haben wollen. Das Königliche statistische Bureau und das Königliche landwirthschaftliche Ministerium in Berlin verdienen allen Dank, dass dem Verfasser alles erforderliche Beobachtungsmaterial zu Gebote gestellt worden ist. Druck und Papier dieser ausgezeichneten Schrift lassen nichts zu wünschen übrig.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CLXXXX. S. 16.)

Diese verdienstliche Zeitschrift fährt fort durch ihren interessanten Inhalt sich der Beachtung der Leser recht sehr zu empfehlen. Aus den uns vorliegenden neuen Nummern: Band III. Nr. 6 bis Nr. 9 heben wir folgende Aufsätze hervor, und bedauern nur, dass die grosse Beschränktheit des Raums uns weitere Mittheilungen nicht gestattet. Ueber die Anemometer der k. Sternwarte von Greenwich. Von John Bowring. (Mit Abbildungen.) — Ueber die Organisation meteorologischer Beobachtungen zu Lande und zur See. Nach E. Sabine. (Ein ausführlicher und für die Organisation meteorologischer Beobachtungen wichtiger Aufsatz des berühmten Verfassers.) — Ueber Eisvegetation. (Recht sehr interess. Vortrag von Herrn E. Pisko in der Versammlung am 18. Jänner 1868, mit Bemerkungen der Herre. v. Littrow, Simony, Fritsch u. s. w.) — Die norddeutsche Seewarte. — Necrolog von Ludwig Friedrich Kämtz. Von C. Vesselovsky. — Zur orographischen Meteorologie. Von A. Mühry. — Ueber „J. v. Lamont's Wochenberichte der k. Sternwarte zu München.“ Von Prof. C. Kuhn. — Atmosphärische Wellen. Von Prof. Dr. v. Lamont. — Wie immer findet sich auch in diesen Nummern eine sehr grosse Anzahl interessanter kleinerer Mittheilungen und sehr lehrreicher literarischer Notizen.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. S. Literar. Ber. Nr. CLXXX. S. 19.

Gennaio e Febbraio 1868. Sulle perturbazioni planetarie; per R. del Grosso. p. 1. — Sul calcolo del valore della funzione $\Sigma \frac{1}{\Gamma(x)}$; per A. de Gasparis. p. 16. — Intorno ai sistemi di rette di primo grado; per G. Battaglini. p. 24. — Nuova dimostrazione di una formola di Abel; per E. d'Ovidio. (Es betrifft dies die bekannte Formel:

$$(x+a)^n = x^n + na(x+h)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a(a-2h)(x+2h)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a(a-3h)^2(x+3h)^{n-3} + \ldots + a(a-nh)^{n-1},$$

und der von Herrn D'Ovidio gegebene neue Beweis, so wie dessen weitere Betrachtungen über diese für jedes h geltende merkwürdige Formel, verdienen recht sehr die Beachtung der Leser.). p. 37. — Annunzio Bibliografico. p. 45. — Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari; per E. d'Ovidio. p. 46.

Literarischer Bericht

CLXXXXII.

Am 22sten Mai 1868 starb leider in Bonn

Professor Dr. **Julius Plücker.**

Wir müssen uns vorläufig begnügen, den folgenden kurzen
ecrolog dieses hochverdienten Gelehrten aus der Kölner Zei-
ung unseren Lesern mitzutheilen, hoffen aber zu künftigen wei-
eren Mittheilungen in den Stand gesetzt zu werden.

Bonn, 22. Mai. Heute früh starb der Professor der Mathe-
atik und Physik, Geh. Regierungsrath Dr. Julius Plücker.
r war am 16. Juli 1801 in Elberfeld geboren, hielt sich nach
ollendung seiner Gymnasial- und Universitätsbildung eine Zeit
ng in Paris auf, habilitirte sich 1825 an der Universität Bonn,
o er 1829 zum ausserordentlichen Professor ernannt wurde.
achdem er in den Jahren 1833 — 1834 seine akademische Thä-
gkeit mit einer Professur am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in
erlin vertauscht hatte, ging er als ordentlicher Professor nach
alle und wurde 1836 an die hiesige Universität zurückberufen,
o er bis zu Ende des vorigen Semesters unablässig gewirkt
at. Abgesehen von seinen unzähligen Abhandlungen in den
erschiedensten wissenschaftlichen Zeitschriften, sind von seinen
elbständig erschienenen Schriften zu nennen: „Analyseos appli-
atio ad geometriam altiorem et mechanicam" (Bonnae, 1824);
Analytisch-geometrische Entwicklungen" (2 Bände, Essen, 1828
is 1831); „System der analytischen Geometrie" (Berlin 1835);
Theorie der algebraischen Curven" (Bonn 1839); „System der
eometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise"
Düsseldorf, 1846, zweite Auflage 1852); „Enumeratio novorum

phaenomenorum in doctrina de magnetismo inventorum" (Bonnae, 1849); „De crystallorum et gazorum conditione magnetica" (Bonnae, 1854). Auch besorgte er die Herausgabe des von seinem früh verstorbenen Schüler und Freunde August Beer im Manuscript hinterlassenen Werkes: „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik" (Braunschweig, 1865.).

Von competenter Hand erhalten wir noch Folgendes: „Seine analytisch-geometrischen Arbeiten, welche er in den ersten 20 Jahren seiner Wirksamkeit als Lehrer und Gelehrter veröffentlichte, sicherten bald seinen Rang unter den ersten Mathematikern unserer Zeit. Wir erwähnen von diesen Arbeiten nur seine berühmten analytisch-geometrischen Entwicklungen, 2 Bde. in 4°, Essen, 1828—1831, und sein System der Geometrie des Raumes, 1 Bd. in 4°, Düsseldorf, 1846, mit welch letzterem er damals seine schriftstellerische Thätigkeit auf mathematischem Gebiete schloss. Ich lege, schrieb er am Schlusse der Vorrede zu dem letzteren Werke, hiermit die Feder nieder, um sie nicht wieder auf diesem Gebiete aufzunehmen; ein Wort, welches sich leider bewahrheitet hat, wenn auch in anderem Sinne als Plücker es ausgesprochen. Seit dem Jahre 1847 wandte sich Plücker physikalischen Experimental-Untersuchungen zu, und eine Reihe glänzender Entdeckungen liessen ihn auch auf diesem Gebiete bald als der Besten einen erkennen. Er entdeckte gleichzeitig mit Faraday die unter dem Namen der Magnetkrystallkraft in der Wissenschaft bekannten magnetischen Eigenschaften der Gase und Flüssigkeiten. Bis zum Jahre 1856 wesentlich mit magnetischen Untersuchungen beschäftigt, wandte er sich von da ab den Lichterscheinungen zu, welche der Inductionsstrom in luftverdünnten Räumen zeigt. Plücker war es, der bei diesen Untersuchungen zuerst, ein Jahr vor Kirchhoff und Bunsen, das Princip der Spectralanalyse aussprach, indem er 1859 zeigte, dass jedem Gase in der elektrischen Röhre ein bestimmtes Spectrum zukommt, welches zum Erkennen minimaler Gasmengen benutzt werden könne. Bei Fortsetzung seiner Untersuchungen über Gasspectra machte er dann die glänzende Entdeckung der Doppelspectra einer Reihe von Substanzen, wie Schwefel, Stickstoff u. a., dass dieselben je nach der Entladung zwei wesentlich verschiedene Spectra haben können, eine Entdeckung, die er gemeinschaftlich mit Hittorf verfolgte und im Jahre 1865 in den Philosophical Transactions der Royal Society of London bekannt machte. Seitdem beschäftigte er sich wieder mit geometrischen Untersuchungen, und er war im Begriffe, dieselben in einem grösseren

Werke vollständig mitzutheilen, als ihm der Tod die Feder aus der Hand nahm, die er seinem 20 Jahre früher ausgesprochenen Vorsatze entgegen wieder aufgenommen hatte."

Im Literar. Ber. Nr. CLXXXV. S. 1. (Thl. XLVII.) haben wir den Tod des sehr verdienten belgischen Mathematikers Mathias Schaar kurz angezeigt, und den Wunsch ausgesprochen, einen ausführlicheren Necrolog desselben im Archiv mittheilen zu können. Dieser Wunsch ist jetzt in Erfüllung gegangen, und wir sind überzeugt, dass unsere Leser von der folgenden, aus dem „Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1868. p. 115. etc." entlehnten, von Herrn Ad. Quetelet verfassten „**Notice**" über das Leben des sehr verdienten Mannes mit Interesse Kenntniss nehmen werden. In einer der nächsten Nummern des Literar. Berichts werden wir, da uns hier dazu der Raum fehlt, eine gleichfalls von Herrn Ad. Quetelet verfasste Biographie eines anderen sehr verdienten belgischen Mathematikers — „J.-A. Timmermans" — mittheilen.
G.

Notice sur Mathias Schaar,

Membre de l'Académie,

Né à Luxembourg, le 28 décembre 1817, mort à Nice, le 26 avril 1867.

Le savant qui fait l'objet de cette notice naquit à Luxembourg. Il était encore enfant, lorsque son père, ingénieur du gouvernement des Pays-Bas, alla se fixer à Grevenmacher, sur les bords de la Moselle. A l'âge de treize ans, il fut envoyé au collége de Sierck, en France; et cinq ans après, dès qu'il eut achevé ses humanités, il passa à l'Université de Gand. Il était destiné d'abord à suivre les études médicales; mais il fut rappelé dans sa patrie par la mort de son père, malheur qui changea entièrement sa position sociale et le but de sa carrière (1).

Après quelques hésitations, Schaar vint se fixer dans les Flandres. Admis à l'Athénée de Gand, par le directeur, M. Depotter, qui lui tint lieu de guide et de père, il en devint l'un des surveillants et consacra entièrement ses loisirs à l'étude des sciences mathématiques. Les fonctions dont il était chargé, et les nouvelles études auxquelles il se livrait avec passion, l'occu-

---

(1) Nous empruntons quelques-uns des faits qui concernent l'enfance et la jeunesse de Schaar, à une notice manuscrite que l'aîné de ses fils, M. Henri Schaar, ingénieur de l'État, a bien voulu nous confier

pèrent tout entier. Il lui fut impossible d'aller suivre des cours, dont il étudiait d'ailleurs les matières avec plus de goût et de fruit dans l'isolement où il se trouvait.

On venait cependant d'instituer les concours universitaires, et Schaar était désireux de faire l'essai de ses forces. Pour subir cette épreuve, il fallait suivre les cours de l'Université; notre jeune professeur se fit en conséquence inscrire. Il réussit dans tous les examens; et le 2 août 1842, il fut proclamé premier en sciences mathématiques et physiques. Il avait eu à traiter la question relative à l'*emploi de la vapeur comme force motrice.* l'ouvrage couronné (1) a été imprimé dans le tome I[er] des *Annales* des Universités de Belgique, et forme un fort volume in-8°, qui parut en 1843. L'auteur y résume, avec beaucoup d'ordre et de méthode, tout ce qui a été fait sur ce point important de la physique moderne. On ne peut certes rechercher des idées nouvelles dans un travail aussi étendu et dont les résultats dépendent d'une longue expérience; mais on y remarque déjà que l'auteur possédait à un haut degré le talent de résumer les grands faits qui constituent la science. Ce premier ouvrage offrait tous les indices d'un veritable talent et promettait un heureux avenir.

Après ce premier triomphe, Schaar songea à obtenir le degré le plus élevé auquel conduisent les ètudes académiques: il se fit inscrire pour répondre aux examens du grade de docteur en

---

(1) Dans ce concours, l'Université de Gand comptait quatre lauréats de plus, on était à la veille de célébrer le 25[e] anniversaire de l'installation de l'Université. Les quatre questions mises au concours, étaient:

1° De l'emploi de la vapeur comme force motrice, 1[er] prix M. Mathias Schaar;

2° Des préparations mercurielles usitées en médecine, 1[er] prix M. Louis Fraeys;

3° Des risques et périls des choses qui sont l'objet des obligations, 1[er] prix M. Jean-Baptiste Lauwers;

4° Théorie du drame antique et moderne, 1[er] prix Joseph Fuerison.

Le conseil communal résolut de rattacher le triomphe des quatre lauréats à la fête universitaire: il saisit cette occasion pour témoigner solennellement sa satisfaction et sa vive sympathie aux élèves de cette Université qui avaient remporté les médailles dans le concours général des Universités de la Belgique. (Extrait du programme rédigé par le conseil communal.). Les lauréats reçurent une médaille d'or du gouvernement. Le bourgmestre de Gand remit, en outre, à chacun d'eux, au nom de la ville, „une branche de laurier en argent et un ouvrage de prix."

sciences physiques et mathématiques. Malgré son intelligence, malgré la force de ses études, il n'était pas entièrement rassuré sur le succès de pareilles épreuves: la justesse de son esprit lui faisait comprendre ce qu'il pouvait y avoir d'incomplet dans la méthode autodidactique qu'il avait suivie dans ses études. En travaillant seul et même en ne s'écartant pas des meilleures méthodes qu'il avait eu le bon sens de choisir, il était important cependant de combiner ses idées de différentes manières, et de savoir discuter les questions sous leurs divers aperçus (1).

Quand il prit le grade de docteur, il en fit l'épreuve: il fallut en quelque sorte l'abandonner entièrement à lui-même pour lui voir aborder, avec un entier succès, les sujets les plus difficiles. Heureusement il eut affaire à des juges qui surent l'apprécier et qui le mirent en position de faire preuve de tous ses moyens, Schaar fut proclamé avec distinction docteur en sciences, le 20 septembre 1843 (2).

---

(1) Un ami, qui avait attentivement suivi la marche de notre jeune auteur, pressentait les résultats auxquels il aurait pu parvenir. Il ne fit pas difficulté de s'en ouvrir à Schaar: il lui parla de la nécessité d'étudier sous les yeux d'un homme supérieur, de Gauss lui-même; ses relations avec le grand géomètre allemand lui permettaient peut-être de faire des offres semblables, et le ministre était tout disposé à accorder à Schaar deux années de congé s'il le fallait, en ajoutant même aux revenus de sa position actuelle. Schaar accepta avec reconnaissance; il demanda quelque temps pour se préparer, mais quand vinrent de nouvelles instances, il parla de son mariage qui était près de se conclure, et qui devait le retenir encore pendant un certain temps. Il était facile de voir qu'il renonçait aux projets d'avenir.

(2) J'avais entendu louer le savoir de M. Schaar, pendant qu'il était élève à l'Université de Gand. Lorsqu'il passa ses examens à Bruxelles, je faisais partie du jury, et je connaissais déjà toute l'aptitude du jeune candidat, par les éloges de M. Plateau, l'un de ses professeurs. Je pus bientôt l'apprécier et je m'attendais à le voir briller aux examens. Mais quel fut mon étonnement, en voyant ce jeune mathématicien de mérite broncher, hésiter et reculer dès les premiers pas. Je me trouvai plus embarrassé que lui, et mes collègues se levèrent, en demandant son ajournement. Je les suppliai de ne pas prendre ce parti et d'excuser la timidité du jeune récipiendaire; ils voulurent bien se rendre à ma prière et même m'inviter à commencer l'examen. Je tâchai de rassurer le jeune mathématicien: je l'animai et je le confiai ensuite à mes collègues, qui, à l'unanimité, finirent par lui accorder le titre demandé, et en y joignant les termes de la *distinction*. On a pu juger depuis combien cette distinction était méritée.

Le doctorat en sciences de Schaar fut suivi d'une double promotion: l'administration de la ville de Gand s'empressa de l'attacher à son Athénée en qualité de professeur de mathématiques; et le gouvernement, avec non moins d'empressement, lui confia les fonctions de répétiteur d'analyse à l'école du génie civil.

Ce fut aussi vers la fin de la même année que Schaar crut devoir fixer entièrement les conditions de son avenir; il se maria le 28 décembre avec Mlle Henriette Caroline Le Maieur (1). Il sentait le besoin de se reposer de ses trauvaux; mais peut-être eût-il bien fait de différer de quelque temps encore cette union. Schaar était d'une taille élevée; mais d'une constitution assez faible, que ses travaux intellectuels furent loin de raffermir. Doué d'un caractère doux, d'un naturel affectueux, il était animé cependant d'une vivacité très-grande: son système nerveux, trop irritable peut-être, lui commandait impérieusement de s'observer; et il eût bien fait sans doute de se reposer un peu, dans une qiétude parfaite, après une jeunesse aussi agitée que celle qu'il venait de traverser.

Dans la séance qui suivit la réforme de l'Académie royale de Belgique (2), le 10 janvier 1846, la classe des sciences reçut un premier travail de Schaar, qui s'annonçait, dès lors, comme un jeune savant, capable de participer à ses travaux mathématiques les plus ardus. C'était une *note sur les expressions des racines d'un nombre en produits infinis,* qui fut insérée dans les Bulletins, pp. 228 et suiv., tome XIII, 1re part., 1846. Dans la séance suivante, il présenta une seconde note *sur la transformation de quelques intégrales définies,* également insérée dans les Bulletins, tome XIII, 2me partie, p. 30.

En 1847, le jeune géomètre déposa une notice contenant une *démonstration de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques,* tome XIV, p. 79. „L'illustre Gauss en a donné, le premier, dit l'auteur, six démonstrations tout à fait différentes, dont quelques-unes se trouvent dans les *disquisitiones arithmeticae,* et qui sont toutes remarquables par la fécondité des principes qui y sont développés. La nouvelle démonstration que nous allons

---

(1) De ce mariage sont nés quatre enfants: Alfred, Julien, Louise et Henri. C'est à Henri, ajourd'hui ingénieur au chemin de fer de l'État, que je dois, ainsi que je l'ai déjà indiqué plus haut, plusieurs des renseignements donnés dans cette notice.

(2) Séparée en trois classes, celles des sciences, des lettres et des beaux-arts.

›n donner est très-élémentaire, et ne paraît pas indigne de l'at-
ention des géomètres, à cause de sa grande simplicité." On
oit qu'en prenant des grands modèles, l'auteur, pour mieux les
pprécier, a su s'élever parfois à leur talent.

Ces premiers essais furent accueillis avec faveur; et, dans
ne des séances suivantes, la classe des sciences ordonna l'im-
ression de deux écrits nouveaux, qui parurent dans le XXIIe
olume des Mémoires in-quarto des savants étrangers (1848):
'étaient le mémoire *sur les intégrales Eulériennes* et celui *sur
a convergence d'une certaine classe de séries*. Ces écrits pré-
entaient, sous un jour nouveau, des difficultés mathématiques,
raitées déjà par Legendre, Cauchy, Euler, Poisson, etc. Ils an-
onçaient suffisamment le caractère des travaux de Schaar et lui
alurent l'assentiment des géomètres de l'Académie. Aussi le
eune répétiteur d'analyse à l'école du génie civil de Gand ne
arda-t-il pas à être inscrit parmi les correspondants de la classe.

Un nouveau mémoire *sur une formule d'analyse*, présenté
ar lui, dans la séance du 5 août 1848, fut inséré dans le tome
XXIIIe des Mémoires des savants étrangers. Ce travail, comme
s précédents, est de peu d'étendue; Schaar, par forme d'exercice,
'occupe d'une formule donnée par Poisson, laquelle a également
ccupé MM. Dirichlet et Cauchy; il cherche, tout en donnant
lus de simplicité à ses calculs, à en déduire quelquels consé-
uences qui avaient échappé à ces habiles géomètres. Peut-être
rouvera-t-on, quand on examine ses mémoires, que, tout préoc-
upé du but de ses recherches, il compte peut-être trop que le
ecteur est, ainsi que lui, initié à tous les faits et à l'ensemble
es lectures qui l'ont inspiré. La brièveté des détails peut nuire
arfois à la clarté de l'ensemble.

Dans la même séance, où elle faisait imprimer dans le re-
ueil de ses Mémoires l'écrit dont il vient d'être parlé (1848), la
lasse des sciences ordonnait l'impression dans son Bulletin d'une
otice de M. Schaar *sur la réduction d'une intégrale multiple*.
'auteur y donne une démonstration nouvelle d'une formule d'in-
égration très-simple, à laquelle était parvenu Dirichlet. L'année
iivante (1849), le Bulletin contenait également une notice *sur les
ropriétés dont jouissent les produits infinis qui expriment les
acines des nombres entiers*.

Jusque-là l'auteur s'occupe des études les plus profondes de
nalyse supérieure; il marche toujours à côté des géomètres les
us distingués, afin de se pénétrer de leur manière de procéder.

Ces travaux montrèrent suffisamment sa remarquable intelligence. Il sentait la nécessité de régler ses investigations sur celles des hommes les plus habiles, afin d'en déduire ensuite ce qu'il convenait de faire pour son propre usage; il était trop exercé pour ne pas sentir tout ce qu'il avait à gagner, en voyant de près ces hommes qu'il ne pouvait connaître que par leurs écrits.

Vers la fin de 1849, Schaar présenta un nouveau travail *sur la théorie des résidus quadratiques*. Dans cet écrit, ses allures sont plus franches, plus indépendantes; elles marquent déjà le géomètre qui suit sa propre voie et procède d'une manière sûre. Voici le rapport que présenta M. Timmermans, commissaire rapporteur: „Le mémoire de M. Schaar, sur lequel je suis appelé à faire un rapport à la classe, concerne les *résidus quadratiques* dont l'illustre Gauss a fait la base de la résolution des équations indéterminées du second degré. On sait que les propositions fondamentales de cette théorie ont été démontrées par ce géomètre au moyen d'une analyse sublime, qui lui est propre, mais qui a le défaut d'isoler cette branche des mathématiques.

„Les principaux théorèmes ont ensuite été repris par plusieurs géomètres et démontrés par des procédés divers plus en rapport avec l'analyse vulgaire; des géomètres, comme Legendre, leur ont donné plus d'extension et ont fait connaître des propriétés nouvelles et importantes. Il restait encore à les faire découler d'une source commune et à les vulgariser en quelque sorte en rendant plus simple et plus facile l'accès de cette théorie. C'est ce que M. Schaar est parvenu à faire avec un grand bonheur. La théorie des résidus quadratiques, qui jusqu'à présent était réservée aux mémoires académiques, peut aujonrd'hui entrer dans le domaine de l'enseignement, même assez élémentaire. C'est là un service réel rendu à la science.“ A la suite de ce rapport, le travail de Schaar fut imprimé dans le tome XXIV des Mémoires des membres, in-4°; 1850.

Immédiatement après cet écrit, Schaar en présenta un autre, se rapportant à un fait physique qui occupait alors les géomètres et qui était de nature à les intéresser beaucoup, puisqu'il fournissait une preuve directe de la rotation de la terre autour de son axe. Le mémoire est intitulé: *Sur le mouvement du pendule, en ayant égard au mouvement de rotation de la terre* (1). „Le phénomène, dit Schaar, est loin d'être aussi simple qu'on pourrait

(1) *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, tome XXVI, année 1851, in-4°.

le croire, et je ne puis partager l'avis d'un illustre géomètre, lorsqu'il prétend que l'explication en doit être donnée par la simple géométrie, et que les principes de dynamique n'y entrent pour rien. Il est vrai, ajoute-t-il, qu'à cause de la petitesse de la vitesse angulaire de la terre, le plan du pendule paraît tourner d'un mouvement uniforme autour de la verticale; mais il n'en est rigoureusement ainsi, quelle que soit l'amplitude des oscillations, qu'au pôle. Si la vitesse angulaire de la terre était telle que la résultante de la force centrifuge et de la gravité fût nulle à l'équateur, la chute des graves se ferait, sous une latitude quelconque, dans le sens de l'axe de rotation, et, dans ce cas encore, le mouvement du plan d'oscillation du pendule serait uniforme.“ Bien que ce mémoire soit très-court, l'on voit que l'auteur a pris plaisir à le composer et qu'il s'applaudit en quelque sorte de marcher librement dans sa voie.

Ces satisfactions intellectuelles étaient cependant déjà interrompues par l'affaiblissement physique de ses forces; il ne sentait que trop combien la prudence lui était nécessaire. Depuis ce temps, on ne le voyait plus s'occuper de travaux qui exigent une grande contention d'esprit et un enchaînement d'idées dont les anneaux n'étaient que trop prompts à lui échapper. Il sentait peut-être mieux que personne combien le repos lui était nécessaire. De temps en temps il marque encore sa présence par des notes sur différents sujets qu'il insère dans les Bulletins et surtout par les nombreux rapports que l'Académie lui demandait sur des travaux soumis à l'appréciation de la classe.

En 1858, il fut envoyé à Liége avec le titre de professeur ordinaire, qu'il avait obtenu dès le 24 septembre 1857 (1).

Ce déplacement, les travaux qu'il dut faire pour se mettre en harmonie avec ses nouveaux élèves, ainsi que les soins nombreux qu'exigeait sa santé déjà altérée, suspendirent pendant un temps assez long ses études scientifiques, et privèrent l'Académie du concours qu'elle pouvait espérer de lui. Cependant, applaudissant à ses précédents succès, la classe des sciences l'appela, en janvier 1863, à la place de directeur, pour l'année suivante; et le gouvernement le choisit comme président de l'Académie pendant la même année. Déjà le Roi lui avait décerné la croix de chevalier de son ordre, le 28 décembre 1860 (1).

---

(1) La société des sciences de Liége le nomma membre le 3 décembre 1857; il fut appelé à faire partie du conseil de perfectionnement pour l'industrie le 8 mars 1858.

La bienveillance de Schaar pour les jeunes gens, son talent comme mathématicien, et les peines qu'il se donnait pour son enseignement lui acquirent tous les suffrages. Aussi, en 1863, les étudiants de l'université de Liége, lui offrirent son portrait lithographié par M. Schubert, l'un de nos plus habiles artistes. A son départ de cette ville, pour retourner à Gand, où il alla remplacer, le 15 octobre 1864, son ancien confrère, M. Timmermans (qu'il devait suivre de si près dans la tombe), les étudiants lui offrirent une nouvelle marque de gratitude (1).

Ni ces témoignages d'amitié, ni les éléments de bonheur qui l'entouraient ne purent lui rendre la santé, qu'il s'efforçait de rétablir, trop tard, hélas! pour que sa guérison fût encore possible. Afin d'éloigner les fatigues d'esprit, il s'occupait de la musique, qu'il avait toujours aimée et qu'il cultivait avec succès; il s'adonnait aussi aux travaux mécaniques, et plus spécialement à la construction des corps flotteurs et des vaisseaux. Ce goût, qui tenait de près à l'objet de ses études, s'était tellement développé que, vers la fin de sa vie, il voulut faire lui-même, sur mer, l'essai des flotteurs qu'il avait construits. Ni ces distractions, ni les soins de ses médecins ne purent maîtriser le mal qui l'accablait; il voulut employer un dernier remède: il partit avec sa femme pour le midi de la France. Schaar alla s'éteindre à Nice, le 26 avril 1867 (2).

---

(1) „Il consistait en une grande pendule composée d'un socle en marbre noir, surmonté de la figure allégorique de l'Industrie, sous la forme d'une femme assise dans une attitude pensive, le front ceint d'une couronne de feuilles de chêne, et entourée de divers instruments, une presse, des roues d'engrenage, des plans de machine, etc. Elle appuie son pied gauche sur une enclume; sur la face antérieure de laquelle sont gravés les mots: „A M. Schaar, les éléves de l'Université de Liége reconnaissants."

(2) „La vie de mon père, dit M. Henri Schaar, était excessivement simple; il la passait tout entiere au sein du foyer domestique. Rien ne lui était plus à charge que les soirées, et les autres réunions du monde. Cela résultait en partie de son état maladif presque constant, qui lui faisait préférer avant tout le repos.

„Voici plusieurs particularités que je crois devoir signaler spécialement ici:

„Quelques années après son entrée dans la carrière professorale, comme sa santé était toujours chancelante, son médecin lui conseilla de consacrer plusieurs heures par jour à un travail manuel. Ce fut l'origine d'une passion qui ne quitta plus mon père. En effet, ce fut dès ce moment qu'il s'adonna à la construction d'embarcations nautiques dont

il faisait lui-même les plans. Ces embarcations allèrent toujours en grandissant. Outre plusieurs chaloupes, soit à rames, soit à voile, de dimensions diverses, il construisit un petit cutter de 15 tonneaux avec lequel, pendant les vacances universitaires, il visita à différentes reprises les eaux intérieures de la Hollande, les côtes extérieures de notre pays et même, en dernier lieu, la côte nord de la France jusqu'à Calais, puis jusqu'à Douvres. Le manque de temps seul l'empêcha d'aller plus loin. La dernière embarcation, que mon père fit, cette fois, exécuter d'après ses plans et sous sa direction, fut un cutter de 65 tonneaux belges, lequel, au dire de plusieurs hommes compétents, est, sous beaucoup de rapports, d'une coupe et d'une construction irréprochables. Malheureusement il est resté inachevé.

„Une autre passion de mon père fut la musique. Etant encore à Sierck, il faisait déjà partie d'un petit orchestre qui avait été organisé parmi les élèves du pensionnat. — Il jouait passablement de plusieurs instruments. Toute sa vie il conserva un goût très-vif pour cet art, qu'il savait apprécier avec un sentiment très-éclairé; il aimait particulièrement la musique classique.

„Quant à la santé de mon pére, elle se ressentit toujours des trop fortes études auxquelles, abandonné à lui-même, il se livra dans sa jeunesse, et qu'il continua lorsqu'il était professeur.

„Ce qui le détermina surtout, en 1857, à quitter l'Université de Gand, pour se rendre à Liége, fut l'espoir que le changement d'air lui serait favorable, parce qu'il se rapprochait de son pays natal. Il n'obtint qu'en partie ce résultat désiré, car la dernière année de son séjour à Liége fut bien pénible pour lui. Cependant, lorsqu'en 1864 il fut question de son retour à Gand, tous ses amis furent unanimes pour l'engager à rester. Mais, malgré leurs instances réitérées, et celles de tous ses collègues de l'Université de Liège, mon père se décida à partir, car il croyait que c'était pour lui un devoir d'accepter la succession de M. Timmermans.

„Les prévisions de ses amis n'étaient que trop fondées. Pendant les années 1865 et 1866, mon pére ne jouit jamais d'une santé stable. Il résolut alors de tenter un grand moyen, et au commencement du mois de juillet 1866, il partit pour Vichy, afin d'y prendre les eaux. Il y resta jusqu'à la mi-août. Tous, nous crûmes que ce voyage l'avait presque radicalement guéri, tant il revint transformé. Mais ce mieux ne fut qu'éphémère. Aussitôt de retour, il se mit en mer à Ostende, et visita, avec le petit yacht dont nous avons parlé, la côte nord de la France et Douvres. Peut-être le mauvais temps continuel et les émotions du voyage lui furent-ils funestes? Quand il revint, tout le bénéfice du voyage de Vichy avait disparu.

„Il reprit cependant ses cours; mais le 8 janvier 1867, son médecin lui défendit formellement de continuer ses leçons. Sa santé s'était de plus en plus ébranlée. Il les cessa bien à contre-coeur, affligé du tort que cette interruption (il espérait toujours que ce ne serait qu'une interruption) allait causer à ses élèves. L'hiver ne lui fut point favorable.

Vers le 20 février il se rendit á Bruxelles, afin d'essayer d'un changement d'air. Et enfin, sur les conseils de son médecin, M. Gluge, le 14 mars suivant, alors qu'il était déjà bien faible, mais n'avait pas encore renoncé à toute espérance, il entreprit courageusement un voyage de 300 lieues, et partit pour Mentone, à quelques lieues de Nice, accompagné de sa femme, compagne fidèle d'un devouement à toute épreuve, et dont le courage ne faiblit point un instant pendant la longue agonie de son époux.

„Il arriva à Mentone sans trop de fatigues; et pendant les premiers jours, il espéra sa guérison du climat du Midi: mais comme elle ne marchait pas assez vite à son gré, il quitta bientôt cette petite ville pour Nice. Ce devait être sa dernière étape ici-bas: il s'y éteignit le 26 avril, implorant le Très-Haut pour ses enfants qu'il n'avait pu revoir avant de mourir!

„Outre les rapports et les mémoires faits par mon pére, il écrivit un livre intitulé: *Elements de calcul différentiel et de calcul integral à l'usage de ses élèves*; il à laissé aussi un ouvrage inédit sur *la géometrie analytique*, destiné aux classes supérieures des athénées de Belgique.“

Ad. Quetelet.

Liste des ouvrages de Mathias Schaar.

Travaux académiques.

Sur la théorie des intégrales Eulériennes. (*Mém. cour. et des savants étrangers*, t. XXII, in-4°; 1848.)

Sur la convergence d'une certaine classe de séries. (*Mém. cour. et des savants étrangers*, t. XXII, in-4°; 1848.)

Sur une formule d'analyse. (*Mém. cour. et des savants étrangers*, t. XXIII, in-4°; 1848.)

Sur la théorie des résidus quadratiques. (*Mémoires des membres*, t. XXIV, in-4°; 1849.)

Recherches sur la théorie des résidus quadratiques. (*Mémoires des membres*, t. XXV, in-4°; 1850.)

Sur les oscillations du pendule en ayant égard à la rotation de la terre. (*Mém. cour. et des savants étrangers*, t. XXVI, in-4°; 1851.)

Note sur les expression des racines d'un nombre de produits infinis. (*Bulletins*, 1re série, t. XIII, 1re p., 1846, p. 228.)

Sur la transformation de quelques intégrales définies. (*Bulletins*, 1re série, t. XIII, 2e p., 1846, p. 30.)

Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité par les résidus quadratiques. (*Bulletins*, t. XIV, 1re p., 1847, p. 79.)

Sur la réduction d'une intégrale multiple. (*Bulletins*, 1re série, t. XV, 2e p., 1848, p. 501.)

Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de z. (*Bulletins*, 1re série, t. XV, 2e p., 1848, p. 115.)

Sur les propriétés dont jouissent les produits infinis qui expriment les racines des nombres entiers. (*Bulletins*, 1re série, t. XVI, 2e p., 1849, p. 580.)

Sur la réduction de l'expression $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ en fractions continues. (*Bulletins*, 1re série, t. XVII.)

Notice sur la division ordonnée de Fourier et sur ses applications à l'extraction de la racine carrée. (*Bulletin*, 1re série, t. XVIII, 2e p., 1851, p. 144.)

Note sur le développement des expressions de la forme $\frac{\sqrt{A}+a}{b}$ en fraction continue. (*Bulletins*, 1re série, t. XIX, 1re p., 1852, p. 16.)

Rapport sur un mémoire de M. Montigny relatif aux expériences pour déterminer la densité de la terre. (*Bulletins*, 1re série, t. XIX, 2e p., 1852, p. 476.)

Rapport sur une note de M. Carbonnelle intitulée: *Examen des cas douteux dans les triangles sphériques*. (*Bulletins*, 1re série, t. XIX, 3e p., 1852, p. 42.)

Rapport sur un mémoire de M. A. Genocchi sur la théorie des résidus quadratiques. (*Bulletins*, 1re série, t. XX. 1re p., 1853, p. 145.)

Rapport sur une note de M. Genocchi relative à la démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet. (*Bulletins*, 1re série, t. XX, 2e p., p. 391.)

Rapport sur un mémoire de M. Liagre sur l'organisation des caisses des veuves, avec des applications à la caisse des veuves et orphelins des officiers de l'armée belge. (*Bulletins*, t. XX, 3e p., p. 137.)

Rapport sur un mémoire de concours de la classe des sciences pour 1853 relatif à l'état des connaissances dans l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. (*Bulletins*, t. XX, 3e p., p. 354.)

Rapport sur un mémoire de M. Carbonnelle sur l'altération des fonctions et des équations. (*Bulletins*, 1re série, t. XXI., p. 64.)

Sur la théorie analytique des coniques. (*Bulletins*, 2e série, t. VI, 1859, p. 42.)

Sur les variations des éléments des orbes planétaires. (*Bulletins*, 2e série, t. VI, 1859, p. 171.) — Suite à ce travail. (*Bulletins*, 2e série, t. VII, 1859, p. 44.)

Rapport sur un mémoire de M. Lamarle relatif à l'exposé géo-

métrique du calcul différentiel et intégral. (*Bulletins*, t. XIV, 1862, p. 453.)

Rapport sur un mémoire de M. E. Catalan relatif à la transformation des séries et sur quelques intégrales définies. (*Bulletins*, 2e série, t. XIX, p. 524.)

Rapport sur une note de M. F. Dauge relative à la rotation du soleil. (*Bulletins*, 2e série, t. XXI, 1866, p. 80.)

Travaux non académiques.

Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral.

Travail (inédit) sur la géométrie analytique, destiné aux classes supérieures des Athénées de Belgique.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Siebzehnter Jahrgang. 1867.

Auch dieser Jahrgang des Almanachs, dessen Vorgänger im Literar. Ber. Nr. CLXXXVI. S. 1. angezeigt worden ist, hat die frühere Einrichtung vollkommen beibehalten, und liefert in dem „Bericht, betreffend die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse" von dem Generalsecretär Herrn Professor A. Schrötter (S. 173. — S. 277.) eine sehr vollständige Darstellung der weitgreifenden und erfolgreichen Thätigkeit dieser Klasse, welche wir wegen der vielen darin enthaltenen literarischen Notizen recht sehr zur Beachtung empfehlen. Unter den Necrologen verstorbener Mitglieder heben wir hier den von dem Herrn Abt Dr. Augustin Reslhuber in Kremsmünster verfassten Necrolog Marian Koller's (S. 201. — S. 239.) hervor, welcher dem im Literar. Ber. Nr. CLXXXIV. S. 1. von uns mitgetheilten — von Herrn Dr. R. Sonndorfer in Wien verfassten — Necrolog dieses trefflichen, um das österreichische Unterrichtswesen hochverdienten Mannes in mehrfacher Beziehung zu weiterer Ausführung dienen kann. Derselbe liefert auf S. 234.—S. 239. auch ein werthvolles Verzeichniss sämmtlicher Schriften Koller's, hauptsächlich astronomischen und meteorologischen Inhalts. Aus persönlicher Bekanntschaft mit dem trefflichen Manne unterschreiben wir ganz die auf S. 231. gegebene Schilderung seines Charakters, wenn darin gesagt wird: „Koller war ein durchaus edler, biederer Charakter; als Priester, als Lehrer, Gelehrter und Staats-

nann zugleich bewährte er sich in seinem Wirken stets als Mensch im edelsten Sinne des Worts; er war die verkörperte Humanität, diese die Triebfeder seines Handelns, die Fortbildung derselben das Ziel seines Strebens, in seinem Geiste fand der Dünkel, in seinem Herzen die Selbstsucht keinen Raum; bei allen seinen Verdiensten zierte ihn die einfachste Bescheidenheit."

Schriften über Unterrichtswesen.

Ueber die Nothwendigkeit, Heilsamkeit und Verfassung einer Section für Lehrer der exacten Wissenschaften innerhalb der allgemeinen deutschen Lehrerversammlung. Vortrag, gehalten auf der 16. allgemeinen deutschen Lehrer-Versammlung in Hildesheim den 12. Juni 1867 von J. C. V. Hoffmann (Lehrer am Königl. Gymnasium in Freiberg in Sachsen). Leipzig, Druck von B. G. Teubner. 1868. 8°.

Die Wärme, mit der sich der Herr Verfasser in der vorliegenden Schrift des in ihr besprochenen wichtigen Gegenstandes annimmt, hat uns sehr wohlthuend angesprochen und unser Interesse mehrfach in Anspruch genommen, weshalb wir nicht unterlassen, dieselbe unseren Lesern recht sehr zur Beachtung zu empfehlen, indem wir zugleich die vollkommene Uebereinstimmung unserer eigenen Ansichten und Wünsche mit denen des Herrn Verfassers gern aussprechen.

Geometrie.

Schreiben des Herrn M. Curtze, Lehrers am Gymnasium in Thorn in Westpreussen, an den Herausgeber.

Thorn, den 5. Juni 1868.

Hochgeehrter Herr Professor!

Durch eine Abhandlung des Herrn Eugenio Beltrami in den Rendiconti del Reale Istituto Lombardo. Serie II^a. Vol. I. Fasc. IX. Milano 1868. bin ich auf einen literarischen Raub aufmerksam gemacht worden, der durch einen gewissen Herrn C. A. v. Drach, Privatdocent an der Universität in Marburg, verübt ist an dem weitberühmten Professor des Istituto tecnico Superiore in Mailand, Herrn Cav. Cremona. Ich habe es als dem Geschädigten nahe stehend für meine Pflicht

gehalten, das deutsche Publikum auf dieses Plagiat aufmerksam zu machen, das sich bis auf die Druckfehler des Originales erstreckt, und ich erlaube mir deshalb Sie, Hochgeehrtester Herr Professor, zu bitten, die nachfolgende Uebersetzung des Theiles der Abhandlung des Herrn Beltrami, der sich mit vorgenanntem Herrn beschäftigt, in Ihrem hochgeschätzten Archive abdrucken zu lassen *).
M. Curtze.

Wir rufen hierdurch die Aufmerksamkeit der Gelehrten an in Bezug auf eine Monographie, die soeben im Schlömilch'schen Journale (Supplementheft zum 12. Jahrgang 1867) erschienen, und auch als Separatabdruck von dem Verleger Teubner unter dem Titel veröffentlicht ist: „Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte (Raumcurven dritter *Ordnung*) von Dr. C. A. v. Drach, Privatdocent an der *Universität* zu Marburg **)."

„Der empfehlenswerthe Vorsatz des Verfassers — nämlich eine vollständige analytische Theorie der cubischen Raumcurven zu geben — würde ihm nur Danksagungen eingebracht haben, wenn die Ausführung nicht unglücklicherweise Stoff zu einigen gewichtigen Berichtigungen gäbe, die wir der Würde der Wissenschaft halber, hier formulieren wollen."

„Zunächst sind in dem kurzen historischen Abriss, welcher die Einleitung der Monographie bildet, einige Arbeiten nicht erwähnt, die es nothwendigerweise sein müssten; nämlich die von Staudt, von Raye und die von Herrn Professor Cremona in den Nouvelles Annales (Tom. I. Série 2) gelieferte Abhandlung betitelt: „Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches," welches die ausgedehnteste unter den Veröffentlichungen dieses berühmten italiänischen Geometers in Bezug auf diesen Gegenstand ist. In demselben Eingange wird gesagt:

---

*) Was mit dem besten Danke, den ich hiermit Herrn Curtze auszusprechen nicht unterlasse, so schnell geschieht, als es mir irgend möglich ist, da es auch mir nur wahrhaft am Herzen liegen kann, dass das Recht eines so hochverdienten Gelehrten und in allen Beziehungen so hochachtbaren Mannes wie des Herrn Cremona gewahrt und ihm sein wohlerworbenes Eigenthum in keiner Weise geschmälert werde. G.

**) Dieses Mémoire umfasst den zweiten Theil des erwähnten Supplementheftes von Seite 73 bis zu Ende. Die Seitenzahlen die wir citieren, sind die der Separatausgabe. Es genügt, sie sämmtlich um 72 zu vergrössern, um die Seitenzahlen des Supplementheftes zu erhalten.

Es sei kein Versuch gemacht, die algebraischen Raumcurven zu classificieren, die durch den Durchschnitt zweier Oberflächen entstehen; und somit sind die Arbeiten Salmons und Cayleys im Cambridge and Dublin mathematical journal vergessen worden, das doch auf Seite 21. von Herrn v. Drach citiert wird, Arbeiten, die Salmon in seine Geometry of three dimensions aufnahm, von der Herr Fiedler eine deutsche Ausgabe besorgte, die augenblicklich in Deutschland weit verbreitet ist, und die der nämliche Herr v. Drach auf Seite 79. anführt.“

„Im Cap. 1. geht Herr v. Drach auf den Gegenstand über und stellt unter Anwendung der Plücker'schen Raumcoordinaten Formeln auf, mittelst welcher die gewöhnlichen Coordinaten der Punkte einer Raumcurve $n$ter Ordnung rational mittelst eines unbestimmten Parameters ausgedrückt sind (Seite 7), und er scheint zu glauben, dass diese die allgemeinsten Ausdrücke der Coordinaten einer solchen Curve sind, was ein sehr schwerer Irrthum ist. Wir sagen nur deshalb er scheint zu glauben, weil er dies nicht ausdrücklich erklärt; aber eine entsprechende Erklärung findet man sogleich (Seite 8), da Herr v. Drach auf diese Formeln den Beweis der Unmöglichkeit von Raumcurven erster oder zweiter Ordnung stützt, einen Beweis, der völlig haltlos wäre, wenn der Verfasser eben diese Ausdrücke nicht für allgemein hielte (obwohl sie es für die ersten drei Grade wirklich sind, von welchem Umstande aber keine Andeutung gegeben ist).“

„Im Cap. 2., in dem Herr v. Drach die verschiedenen Erzeugungsweisen der windschiefen Curven dritter Ordnung mittelst projectivischer Systeme aus einander setzt, will er (Seite 21) beweisen, dass aus den Gleichungen

$$A_0+\lambda A_1=0,\quad B_0+\lambda B_1=0,\quad C_0+\lambda C_1=0$$

dreier projectivischer Punktreihen oder dreier projectivischer Ebenenbüschel immer der Uebergang zu folgenden Gleichungen erlaubt ist:

$$A_0+\lambda A_1=0,\quad A_1+\lambda A_2=0,\quad A_2+\lambda A_3=0,$$

die nur die vier linearen Functionen

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

enthalten. Dieses Resultat ist exact, und in ihm ist gerade die analytische Darstellung begründet, die Möbius benutzt, die Cremona gebraucht und ebenso der Verfasser der Monographie selbst. Aber die Beweisführung des Herrn v. Drach ist hinfäl-

lig, weil es wohl richtig ist, dass aus der ersten und dritten Gleichung sich die folgenden entnehmen lassen:

$$A_0 + \lambda A_1 = 0, \quad A_2 + \lambda A_3 = 0,$$

von denen man annimmt, dass sie zwei Generatrixen des Hyperboloides

$$(A_0 + \lambda A_1 = 0, \quad C_0 + \lambda C_1 = 0)$$

angehören, welche die Gerade $B_0 + \lambda B_1 = 0$ schneiden, aber es ist nicht in gleicher Weise richtig, dass man der Gleichung dieser letztern Geraden die Form $A_1 + \lambda A_3 = 0$ geben kann, während sich nur sagen lässt, dass sie die Form haben müsse:

$$A_1 + \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} A_2 = 0.\text{``}$$

„Es ist auch werth, einen anderen Irrthum zu erwähnen, der sich in den ersten Capiteln der Monographie versteckt und vorzugsweise im Anfange des Cap. 3. (S. 24.) findet. Derselbe besteht darin, dass Herr v. Drach glaubt, die vier linearen Functionen, die er durch U_0, U_1, U_2, U_3 bezeichnet und die, durch die Relation

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

verbunden, dazu dienen, die cubische Raumcurve darzustellen, könnten ohne Weiteres als die Abstände eines Punktes von den vier Seitenflächen eines Tetraeders betrachtet werden, das heisst als Quadriplanarcoordinaten im engeren Sinne. Aus den Entwicklungen der Seiten 8—9 ergibt sich augenscheinlich, dass man, wenn man diesen Functionen die angegebene Bedeutung vindicieren will, statt dessen schreiben muss:

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = a\lambda^3 : b\lambda^2 : c\lambda : d;$$

und wenn man in dieser Formel $a = b = c = d$ setzt, wie es Herr v. Drach stillschweigend thut, so ist das soviel, wie wenn man eine collineare Transformation der Curve vornimmt, wie man sie z. B. erhält, wenn man für eine Ellipse oder Hyperbel einen Kreis substituiert. Uebrigens ist die Voraussetzung des Herrn v. Drach nicht im geringsten nothwendig und auch ebensowenig für die weitere Entwickelung der Theorie nützlich, da man überall die U als Quadriplanarcoordinaten im Allgemeinen betrachten kann.“

„Aber wir wollen jetzt diese kritischen Bemerkungen bei Seite lassen und dafür darauf hinweisen, dass vom Cap. 3. angefangen und weiter bis zum Ende des Werkes die Auseinandersetzungen des Herrn v. Drach, mit Ausnahme einiger leichten und wenig

glücklichen Abweichungen, eine fast wörtliche Copie der Abhandlungen des Herrn Professor Cremona sind, und speciell der, welche in den ersten beiden Theilen der Annali di matematica (Iª. Serie. Roma, 1858—59) veröffentlicht sind. Damit jeder sich hiervon auf die leichteste Weise überzeugen kann, setzen wir hier unten die correspondierenden Stellen der Monographie und der Annali neben einander:

Monographie.		Annali.
Seite 24—25	T. I.	pag. 166, T. II. pag. 19.
„ 28—29	„	„ 165.
„ 30	„	„ 278—279.
„ 36—37	„	„ 168—169, 295.
„ 38—39	„	„ 167—168.
„ 40—41	„	„ 171—172.
„ 41—43	„	„ 169—170.
„ 44—45	„	„ 294.
„ 45—46	„	„ 288.
„ 49—51	T. II.	pag. 201—202.
„ 58—60	„	„ 202—204.
„ 61—65	„	„ 203—205.
„ 70—72	T. I.	pag. 279—281.
„ 73	„	„ 282.
„ 78—79	„	„ 292—293.
„ 81—87	„	„ 282—288.
„ 87—89	„	„ 290—292.
„ 90—93	T. II.	pag. 19.
„ 93—95	T. I.	pag. 288—289.
„ 95—101	T. II.	pag. 22—27.
„ 110—112	„	„ 20.“

„Freilich unterlässt Herr v. Drach nicht, die Schriften des Herrn Professor Cremona zu erwähnen, und er bespricht dieselben in der Vorrede auf sehr ehrenvolle Weise, indem er sagt, es sei bei der Abfassung der Monographie auch sein Zweck gewesen, die analytischen Auseinandersetzungen, die Cremona in seinen ersten Memoiren befolgt, bekannter zu machen, als sie es im Allgemeinen sind. Aber diese allgemeinen Erklärungen sind schwerlich hinreichend, dem Leser von vornherein klar zu machen, dass es sich nur um ein einfaches Abschreiben handelt, das in den meisten Fällen — wie aus der obigen Gegeneinanderstellung folgt — ein wörtliches ist und ausserdem an vielen anderen Stellen, um nicht zu sagen an fast allen, dem Stoffe nach so treu ist, dass es auch noch nicht einmal eine **Bearbeitung** genannt

werden kann. Was das Unrecht des Herrn v. Drach noch erschwert, ist, dass in seiner Wiedergabe die scrupulöse Genauigkeit soweit gegangen ist, dass sie nicht nur die leichten Auslassungen der Originalabhandlungen, die er benutzt hat, sondern zuletzt gar die Druckfehler umfasst, die bei dem Drucke in den Annali der Aufmerksamkeit entgangen waren."

„Diese Behauptung könnte unglaublich scheinen, wenn wir hier nicht die Proben bereit hätten, um dieselbe zu beweisen."

„Auf Seite 38. der Monographie, da wo es sich um den Perspectivkegel der cubischen Raumcurve handelt, stellt Herr v. Drach, ebenso wie es auf pag. 167. des T. I. der Annali geschehen ist, die Gleichungen auf:

$$A = x, \quad \theta^3 D = y, \text{ etc.}$$

und sagt, dass man mittelst derselben zu der Gleichung gelangt:

$$(x+y+z)^3 - 27xyz = 0,$$

ohne zu bemerken, dass man, um wirklich dieses Resultat zu erhalten, an Stelle dessen setzen muss:

$$A = x, \quad \theta^3 D = -y, \text{ etc.}$$

Dasselbe ist von Seite 41. zu sagen, wo Herr v. Drach dieselbe Verwechslung eintreten lässt, einzig und allein, weil er es so auf Seite 172. des genannten Bandes der Annali gefunden hat."

„Auf Seite 39., wo es sich um den Perspectivkegel handelt, dessen Scheitel auf einer Tangente der cubischen Curve liegt, copiert Herr v. Drach einen anderen Zeichenfehler, der in T. I. der Annali p. 167—168. übergangen war. In Gemässheit dieses Fehlers steht in der Gleichung dieses Kegels die Grösse F des Herrn v. Drach oder die E des Herrn Cremona mit dem entgegengesetzten Zeichen, das sie haben sollte."

Auf Seite 60. copiert Herr v. Drach einen Fehler — bestehend in der Auslassung eines Binomialcoefficienten — der auf Seite 204. des II. Theiles der Annali übersehen wurde und im III. Theile derselben Annali S. 384. unter den Druckfehlern angezeigt und berichtigt ist.

„Auf Seite 72. schreibt Herr v. Drach zwei Gleichungen der p. 280. des T. I. der Annali ab, an deren Stelle man die beiden folgenden setzen muss

$$\vartheta_1 \vartheta_2 = -l, \quad \nu(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \lambda\vartheta_1\vartheta_2 - \mu = 0."$$

„Auf Seite 86. copiert er beim Abschreiben der beiden ersten Gleichungen der Seite 287. des I. Th. der Annali in einer Note einen anderen Fehler, der darin besteht, dass die Grössen

$$\alpha(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma), \quad \delta(\beta-\delta)(\delta-\gamma)$$

als Divisoren der U_0, U_3 gesetzt sind, während sie im Gegentheile Factoren sein müssten."

„Auf Seite 44., wo Herr v. Drach den Inhalt der p. 294. des I. Thl. der Annali wiedergibt, passiert ihm eine merkwürdige Zweideutigkeit, die dadurch entsteht, dass er eine gewisse Grösse durch S bezeichnet, welche Herr Professor Cremona durch Z bezeichnet, und dass er fortfährt, durch dasselbe Zeichen andere vollständig verschiedene Grössen darzustellen, wahrscheinlich dadurch verführt, dass er dieselben am angeführten Orte so bezeichnet fand. An derselben Stelle spricht Herr v. Drach, immer den Annali folgend, eine Folgerung aus, von der Herr Cremona schon seit langer Zeit die Unrichtigkeit eingesehen und dieselbe vielen Personen mitgetheilt hat *)."

„Indem wir so eine Idee von der Art gegeben haben, in welcher Herr v. Drach die Untersuchungen des Herrn Professor Cremona wiedergibt, nehmen wir die Prüfung einiger Punkte wieder auf, in denen er sich erlaubt etwas zu verändern oder hinzuzufügen. Die Irrthümer, die sich darin finden, sind keineswegs von leichtem Gewichte."

„So sind auf Seite 51. und 54. zwei Gleichungen — die mit 8^a bezeichnete auf S. 51. und die erste auf S. 54. — nicht exact. Bei der ersten derselben springt dies unmittelbar in die Augen, ohne dass man irgend einer Verification bedürfte, da in derselben die Grösse h fehlt."

„Im Anfange der S. 66. findet man eine Determinante, die, nachdem man sie in einigen ihrer Elemente gebührenderweise verbessert hat, sich leicht auf die Grösse $-12h^4$ reduciert, die niemals Null werden kann. Herr v. Drach dagegen irrt sich beim Rechnen, und gelangt zu einem anderen Resultat, aus dem er die absurde Folgerung zieht, dass der Schnitt, den eine Tangentialebene in einer

---

*) Ich benutze diese Gelegenheit, um die Berichtigung zu veröffentlichen, die mir von ihm mitgetheilt wurde. Auf der citierten Seite muss man statt des Passus: „Die Gleichung (19) zeigt etc." lesen: „Die Gleichung (19) zeigt, dass, wenn der Scheitel des Kegels und die Punkte θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 gegeben sind, die Punkte θ_5 und θ_6 bei ihrer gleichzeitigen Veränderung eine Involution von Punkten auf der cubischen Raumcurve erzeugen."

Developpablen dritter Classe macht, ein Geradenpaar sein könne. Und auf S. 67. bekräftigt er diesen Irrthum, indem er behauptet, dass einer der parabolischen Schnitte, den eine der Osculationsebenen einer windschiefen Parabel in der entsprechenden Developpablen macht, sich auf zwei zusammenfallende Gerade reduciert: ein anderer gründlicher Irrthum."

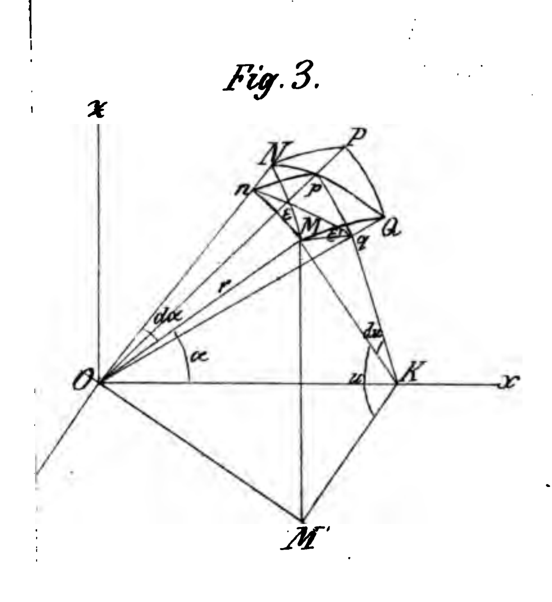
„Wie soll man die sehr seltsame Behauptung qualificieren, die in den ersten Zeilen der Seite 71. enthalten ist, nach der eine Fläche zweiter Ordnung einer Bedingung unterworfen ist, wenn sie eine Regelfläche sein soll."

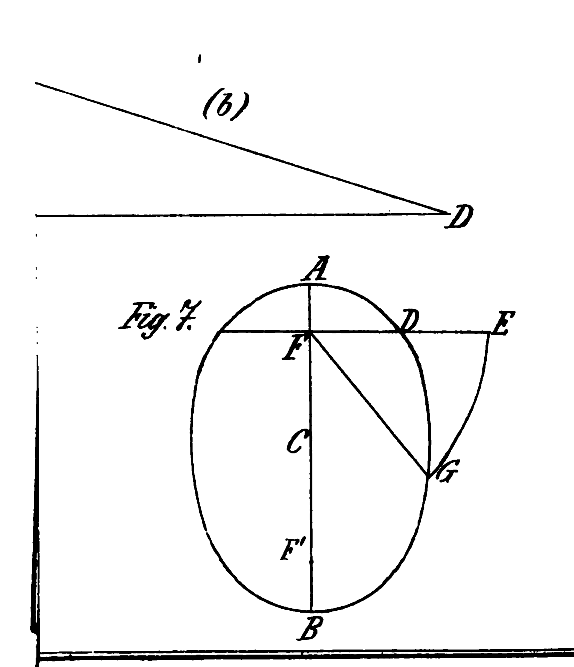
„Es ist ebenso unmöglich zu verstehen, was Herr v. Drach am Ende des vorletzten Absatzes der S. 65. in Bezug auf die unendlich entfernten Punkte der hyperbolischen Parabel hat sagen wollen."

„Mit Bezug auf diese gewichtigen Fehler scheint es überflüssig, dass wir hier die wenig glückliche Behandlung einiger derjenigen Theile betrachten, in denen Herr v. Drach von den Auseinandersetzungen des Herrn Professor Cremona abgewichen ist. Wir führen ein einziges Beispiel an. Auf Seite 47—48. stellt er die Gleichung dritten Grades auf, von der die Parameter der unendlich entfernten Punkte einer cubischen Raumcurve abhängen. Die Gleichung in λ in Form einer Determinante, zu der er auf Seite 48. gelangt, drückt offenbar aus, dass die drei Ebenen, die durch den Ursprung parallel zu den drei Generatrixebenen in Bezug auf einen Punkt im Unendlichen gezogen sind, sich in einer Geraden schneiden. Wenn Herr v. Drach sich auf diese Betrachtung gestützt hätte, die sich ganz von selbst darbietet, so würde er einen Beweis vermieden haben, der, auf die nicht nöthige Voraussetzung der Orthogonalität der Axen gegründet, viel zu compliciert für den Zweck ist und wenig conform mit dem Geiste der modernen algebraischen Theorie der Curven."

„Ich will auch noch folgende Eigenthümlichkeit bemerken. Herr v. Drach hat sich vorgenommen (S. 2.) eine analytische Abhandlung zu schreiben, und er bedient sich in der That stets der Gleichungen. Aber als er zu der Untersuchung des Rotationshyperboloids gelangt, das durch eine cubische Raumcurve geht (S .76—78.), einem Gegenstande, den Herr Professor Cremona mittelst der reinen Geometrie behandelt hat (Crelle Borchardt's Journal Th. 63), da verlässt er die analytische Geometrie, und reproduciert den synthetischen Beweis Cremonas."

„Wir schliessen mit einer Bemerkung zum letzten Absatze der Monographie (S. 109—110.), wo es sich um die Construc-


Fig. 3.
z
N
P
n
p
ε
M
ε
Q
q
r
dα
α
dω
ω
O
K
x
M'


E
(b)
D
A
Fig. 7.
D
E
F
C
G
F'
B

scher Beziehung für sehr lehrreich und beachtenswerth, und empfehlen ihn recht sehr zur Berücksichtigung.).

1867. II. Heft III. Herr Seidel macht Mittheilung: „Ueber eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrals erster Art mittelst unendlicher Producte“ in welchen die unendliche Vieldeutigkeit der genannten Functionen durch algebraische Vieldeutigkeiten wiedergegeben ist. S. 407. (Wir sind sehr begierig die hier nicht mitgetheilte Untersuchung bald selbst kennen zu lernen.).

1867. II. Heft IV. Als dem Kreise des Archivs nicht ganz fremd erwähnen wir aus diesem Hefte nur: Vogel: Gerding's Geschichte der Chemie. S. 601.

1868. I. Heft I. H. v. Schlaginweit-Sakünlünski: Ueber die Vorbereitung zu physikalischen Beobachtungen in Indien während totaler Sonnenfinsterniss. (Hat besondere Beziehung auf die totale Sonnenfinsterniss am 18. August 1868, und ist denen, die zu deren Beobachtung sich nach Indien zu begeben beabsichtigen, zur sorgfältigsten Beachtung sehr zu empfehlen.).

1868. I. Heft II. Pfaff: Ueber das Verhalten des atmosphärischen Wassers zum Boden. (Mit einer Tafel.). S. 311. — Herr Steinheil hält einen Vortrag: „Ueber das Chronoscop“ ein Instrument für die Zeitbestimmung. Die betreffende Abhandlung über dieses Instrument, welches Herr S. in der Sitzung vorlegte und erläuterte, nebst den zu denselben gehörenden Zeichnungen, wird in den Denkschriften erscheinen.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. S. Literar. Ber. Nr. CLXXXXI. S. 18.

Marzo ed Aprile 1868. Sopra alcuni teoremi di Gauss intorno alla teorica della ripartizione del circolo; per G. Jung. p. 67. — Coordinate sferiche omogenee; per P. Cassani. p. 81. — Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell' assioma XI di Euclide (giammai da potersi decidere a priori). Per Giovanni Bolyai (Versione dal latino). p. 97. — Annunzio Bibliografico. Correzione. p. 115. — Soluzione delle quistioni 49, 50, 66; per E. Padova. p. 116. — Soluzione della quistione 66; per L. Rajola. p. 121. — Sulle perturbazioni planetarie; per R. del Grosso. p. 125.

Fig. 6.

T

S

A

Fig. 3.

O

r

r

Q

P

B'

A'

a

b

A

B

si

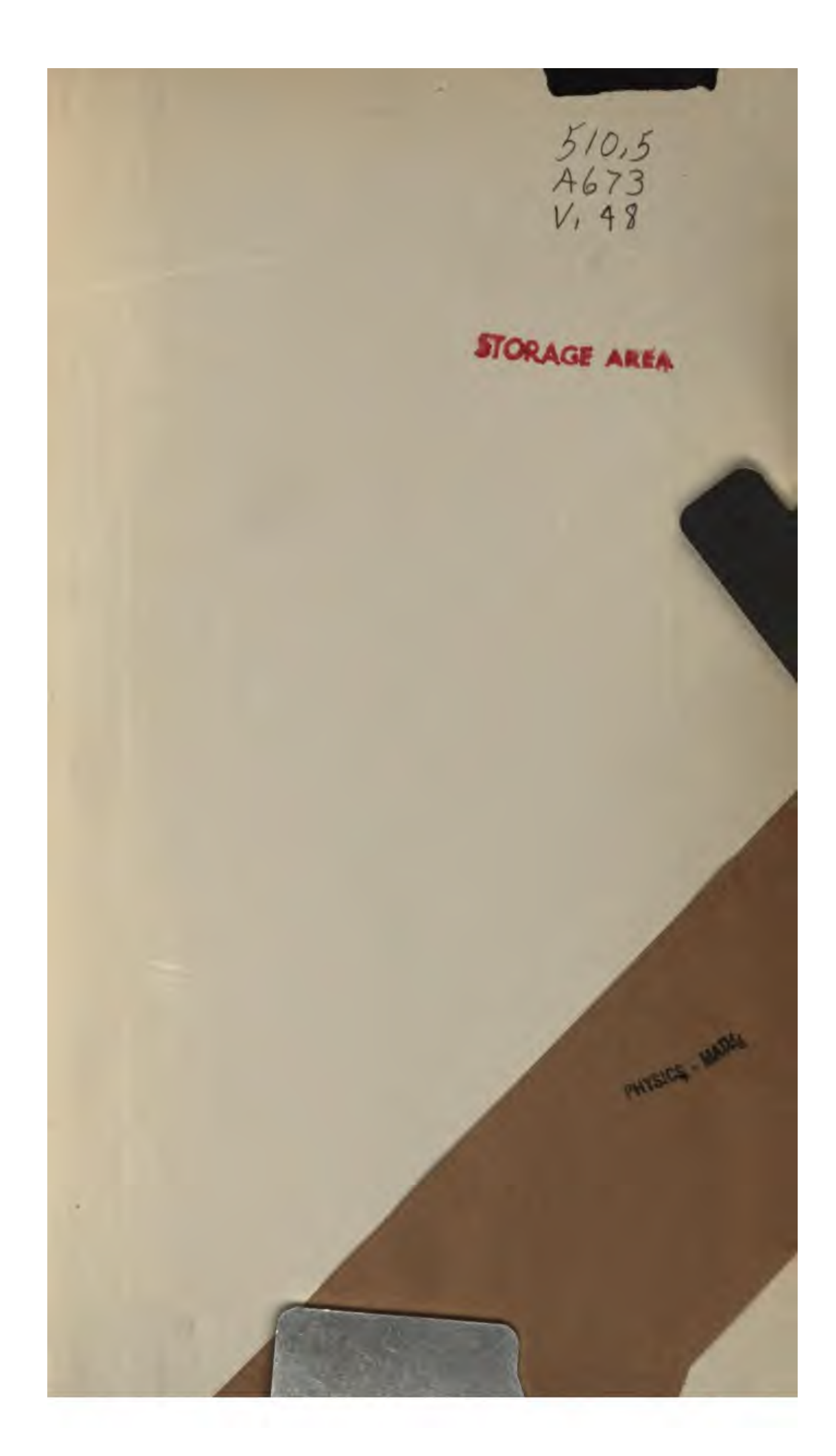
co

x

Gr







510.5
A673
V. 48
STORAGE AREA
PHYSICS - MATH

